Lehrbegrif der gesamten Mathematik.

Aufgesetzt
von
Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
Herzogl. Mecklenb. Schwerinschen Hofrath, der Phil. Doct. der Mathem. und Naturlehre Professor zu Bützow, der Churfl. Bayerschen Akademie der Wissenschaften zu München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Copenhagen Mitglied.

Der Achte Theil.

Die Photometrie.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röse. 1777.

KIELER
UNIVERSITAETS
BIBLIOTHEK

Der

unter dem allergnädigsten Schutz

Sr. Königl. Majestät

in Preussen

blühenden

Akademie der Wissenschaften

in

Berlin

widmet

diesen achten Theil

seines

Lehrbegrifs der Mathematik

als ein Zeugniß

seiner grösten Verehrung

und

vollkommensten Hochachtung

der Verfaßer.

Vorrede.

Obgleich die Voraussetzung, daß von jedem Theilchen eines für sich leuchtenden oder auch anderswoher erleuchteten sichtbaren Körpers das Licht sich nach allen Seiten in Gradlinichten Richtungen ausbreite, von allen optischen Schriftstellern angenommen wird; so muß man doch unterscheiden, wie weit selbige bloß **optisch**, und wie weit eben diese Voraussetzung **photometrisch** ist. Wer diesen Satz, wie er eben ausgedrückt ist, zugiebt, könnte doch noch wohl zweifeln, ob sich in gleichen conischen oder pyramiden-förmigen Räumen, in deren Spitze das für sich leuchtende, oder mit fremden Licht glänzende Element befindlich ist, gleichviele Lichtmasse so gleichförmig ausbreite, daß auf gleiche Stücke einer das Element als einen Mittelpunct umgebenden Kugelfläche auch allemahl gleichviel Licht falle. Was sonst in der Optik ein **Lichtstrahl** heißt, das kann in der Photometrie nicht mehr als eine geometrische Linie betrachtet werden. Soll dieser Nahme alles Licht bezeichnen, was von dem leuchtenden Element nach einerley gradlinichten Richtung ausgehet, und ist es erlaubt, das Licht selbst als eine zarte Masse zu betrachten; so könnten wohl zwey nach verschiedenen Richtungen ausgehende Strahlen ungleichviele Lichtmasse solchen Ebenen zuführen, wovon jede einen dieser Strahlen, auch wenn man will in gleicher Entfernung vom leuchtenden Element, senkrecht auffienge. Ferner könnten die nach allen Seiten ausgehenden Strahlen, auch wohl ungleichförmig vertheilt, durch gleich grosse conische oder pyramidenförmige Räume könnten wohl ungleichviele physische Lichtstrahlen verbreitet seyn. Wie sich also das von einem leuchtenden Element kommende Licht ausbreite, wie sich die Strahlenmenge auf Ebenen von gegebener Grösse und Lage verhalten, darin ist nicht alles geometrisch nothwendig: vielmehr ist es **Hypothese**, daß diese Ausbreitung gleichförmig sey. Der Satz, daß das Licht aus einem leuchtenden Puncte sich wie das Quadrat der Entfernung verbreite, steht freylich in allen Optiken im Anfang: aber eine recht deutliche Aufklärung und richtige Anwendungen dieses Satzes habe ich noch bey den meisten optischen Schriftstellern vermisset. Selbst richtig verstanden und angewandt, erschöpft dieser Satz das noch nicht alles, worauf die Wissenschaft gebauet werden muß, die Herr **Lambert** unter dem Nahmen der Photometrie so vollständig bearbeitet hat.

Die beyden vornehmsten Schriftsteller in einer sonst noch wenig oder gar nicht bearbeiteten Wissenschaft, Herrn **Bouguer** und Herrn **Lambert** sorgfältig zu lesen und mit einander zu vergleichen, würde ich für Pflicht gehalten haben, als ich selbst etwas über die Photometrie aufsetzen wollte, wenn ich nicht ohnehin schon beide Werke und besonders das Lambertsche für mich sehr lehrreich gefunden hätte. Neuere Bemühungen in dieser Wissenschaft sind mir nicht bekannt. Im Jahr 1766. hat Hr. **Hennert** angefangen, seinen etwas ausführlichen Lehrbegrif der Mathematik herauszugeben, wovon die ersten drey Theile die reine Mathematik enthalten. Im Jahr 1768 erschien der erste Theil seines Cursus Matheseos Applicatae und im Jahr 1770 Cursus Matheseos Applicatae Pars III, der die fünf optischen Wissenschaften, die Optik, Perspectiv, Catoptrik, Dioptrik, und Photometrie, oder Phaometrie, wie sie Herr Hennert nennt, in der hier genannten

Ordnung abhandelt. Zehn Jahr nach der Bekanntmachung eines so wichtigen Werks, als Hr. **Lamberts** Photometrie in einer ganz neuen Wissenschaft ist, hätte man wohl erwarten mögen, daß desselben einige Erwähnung geschehen wäre: allein Herr **Hennert** erwähnt desselben nicht, sondern allein der Schrift des H. **Bouguer**, woraus er unter dem Nahmen der Phaometrie etwas sehr weniges mittheilet. Das Original von H. **Priestleys Geschichte der Optik** ist im Jahr 1772 zu London herausgekommen, und gleichwohl hat H. **Priestley** von der Lambertschen Photometrie keine Nachricht gegeben, weil er sie nicht hat erhalten können? Werke die in lateinischer Sprache geschrieben sind, pflegen doch sonst wohl von den deutschen Buchhandlungen auch an auswärtige zu gelangen. Einige auf der 42 S. dieses Buchs angeführte kleine Schriften, worin nur von einem photometrischen Elementar-Problem die Rede ist, erregten aus mehr als einer Ursache, und vornemlich um deßwillen sehr meine Aufmerksamkeit, weil eine davon einen Verfasser hat, dessen grosse Verdienste um die Mathematik von allen Kennern der Wissenschaft nach Würden geschätzt werden: aber eben um deßwillen war es auch wider alles mein Erwarten, als ich eine leichte photometrische Aufgabe ganz anders behandelt fand, als es den Grundbegriffen und Grundsätzen der Wissenschaft gemäß zu seyn schien, die ich nicht allein in Bouguers und Lamberts, sondern zum Theil auch in Eulers und selbst eines Kaestners Schriften gefunden zu haben glaubte. Ein grosser und vielleicht der schönste Theil der Lambertschen Photometrie muste fallen, und blieb nichts weiter als höchstens Uebung in der Integralrechnung, sinnreiche Untersuchung über Erfolge, die es in der Natur geben könnte, aber nirgends giebt. Ich war im Begrif, ein Buch drucken zu lassen, wovon ich glaubte, daß ich doch nebst der Brauchbarkeit der darin enthaltenen Lehren

ren zugleich auf ihre Gewißheit gesehen hätte, und mir fiel natürlich eine Stelle aus der Vorrede zu Hn. d' Alemberts Dynamique ein, die auch Hr. **Kaestner** in der Vorrede zum vierten Theil seiner Anfangsgründe anführt: „daß man in der Mechanik manch„mahl nur bemühet gewesen sey, das Ge„bäude hoch aufzuführen, ohne sich zu be„kümmern, ob der Grund feste genug sey.“ Konnte es nicht vielleicht der Photometrie eben so ergangen seyn? Wie mich dies veranlasset habe, vorläufig etwas über die ersten Gründe dieser Wissenschaft aufzusetzen, das habe ich im Buch selbst, auf der 43 u. f. S. erzählt. Ich könnte und sollte vielleicht hinzusezen, daß eine Anzeige davon, die ich in einer gelehrten Zeitung gelesen habe, mich noch mehr habe befremden müssen, als der mir ungewöhnliche Vortrag der photometrischen Grundbegriffe, und die Auflösung eines Elementar-Problems mich befremdet hatte: allein ich kann mich nicht entschliessen, mehr

hievon

hievon zu sagen, als was ich an den angeführten Stellen im Buch selbst schon davon gesagt habe. Alles übrige unterwerfe ich der Prüfung einsichtsvoller Kenner der Wissenschaft, und gebe nur noch eine ganz kurze Rechenschaft davon, wie ich mich bey Ausarbeitung der Wissenschaft selbst verhalten habe.

Die Photometrie hat ihre ganz eigenthümlichen Gründe, (M. s. den 48 §.) also bin ich wohl deshalb gerechtfertiget, daß ich sie als eine von den übrigen Theilen der Optik verschiedene Wissenschaft besonders vortrage: wenigstens geschicht das mit völlig eben dem Recht, mit welchem man auch die Perspectiv von der Optik absondert. Alsdenn aber hat auch die Photometrie vor der Catoptrik und Dioptrik ihre natürliche Stelle, nicht allererst am Ende aller optischen Wissenschaften. Freylich muste ich nun die allgemeinen Lehren von der Zurückwerfung und Brechung des Lichts hier schon mit vortragen, allein das wird niemanden Anstoß verursachen, der es über=

überlegen will, daß die Eintheilung der optischen Wissenschaften in Optik, Catoptrik und Dioptrik überhaupt sehr willkührlich sey. Ein so vollkommener Vorgänger, als Herr Lambert, hatte mir nichts von Erheblichkeit nachzuhohlen übrig gelassen, also habe ich die Wissenschaft selbst nicht mit ganz neuen Untersuchungen bereichern können: doch habe ich auch Herrn Lamberts Photometrie nicht bloß abgeschrieben, oder nur ins Deutsche übersetzt noch einmahl wieder drucken lassen. Eben um deswillen, weil ich das weder wollte, noch mich dazu berechtiget halten konnte, habe ich weder alle lehrreiche Untersuchungen des Hn. Lamberts hier mitgetheilt, noch auch sonst alle seine Vorstellungsarten beybehalten; ich theile die Wissenschaft so mit, wie ich sonst Wissenschaften als mathematische zu behandeln gewohnt bin. Ich suche alles auf die einfachsten Vorstellungsarten zurück zu führen, und lasse mich auf keine physische Theorien vom Licht ein, so wie es in der Geometrie

metrie nicht nöthig ist, daß man sich auf physische, oder metaphysische Untersuchungen über die Natur des Raums einlasse. Das in seiner Art mit dem Lambertischen gleich schätzbare Werk des Herrn Bouguer habe ich ebenfalls möglichst genutzet, und dasjenige, was mir am interessantesten schien, daraus mitgetheilet: oft habe ich die aus Hn. Bouguers Werk vorgetragenen Lehren als Vorbereitungen gebraucht, um Herrn Lambert in seinen Schlüssen desto leichter folgen zu können, so wie es Pflicht für mich war, allenthalben bemerklich zu machen, wo Herr Lambert seinen Vorgänger übertroffen hatte.

Bützow im März des Jahrs 1777.

Der Verfasser.

Inhalt des achten Theils.

Die Photometrie

oder

Theorie von der Ausmessung der Stärke des Lichts.

Der

Die Photometrie,
oder
Theorie von der Ausmessung der Stärke des Lichts.

Der I. Abschnitt.

Vorläufige Untersuchungen über die ersten Gründe der Photometrie.

1. §.

Das Licht geht von jedem strahlenden Punct L nach allen Seiten in graden Linien aus, 1 F.
(5. 6. §. Opt.) und wenn derselbe für sich leuchtend ist, so schreibt man ihm einen gewissen Glanz zu. Fällt überdem ein Theil des Lichts, welches L nach allen Seiten umher strahlet, auf eine ebene, oder wie man sonst will gestaltete Fläche; so sagt man, der Punct L erleuchte die Fläche, welche das Licht auffängt. Ob es nun gleich in den übrigen optischen Wissenschaften, wenn allein der Weg des Lichts betrachtet wird, genügen kann, daß man sich die Lichtstrahlen als grade Linien vorstelle; so sind sie doch würklich nicht blos geometrische Linien. Dergleichen grade Linien, die sich von L aus nach allen Seiten er-

strecken, stellen nur die Richtung des Lichts vor, nach der es entweder von dem leuchtenden Punct würklich ausgehet, oder nach welcher es wenigstens seine Würkung äussert, es gehe übrigens damit zu, wie es wolle. Das Licht selbst, oder was auch sonst die Erscheinungen verursacht, die wir dem Licht zuschreiben, ist eine zarte Masse, jeder physische Lichtstrahl bestehet aus einer solchen Masse, die wie jede andere Masse in der Natur eine gewisse Dichtigkeit hat, und man kann sich die Sache so vorstellen, als wenn diese Lichtmasse von dem leuchtenden Punct nach allen Seiten in gradlinichten Richtungen ausflösse, gesetzt daß es auch würklich damit eine andre Bewandniß hätte. Alles Licht, was solchergestalt von L nach einer und eben derselben graden Linie ausfließt, heist hier ein physischer Lichtstrahl.

1 Fig. Um den leuchtenden Punct L als um einen Mittelpunct, stelle man sich eine Kugelfläche ABEF vor, so treffen alle von L ausgehende Strahlen diese Kugelfläche senkrecht. Wie nun diese Strahlen nicht blos geometrische Linien sind, so kann man bey den fernern Untersuchungen über die Art und Weise, wie sich das Licht nach allen Seiten vertheilt, auch L nicht als einen geometrischen Punct betrachten: vielmehr muß man sich L als einen physischen Punct vorstellen, der eine wiewohl unendlich kleine Ausdehnung hat. Dabey ist es nicht ganz gleichgültig, ob man sich in L einen unendlich kleinen Körper, wie etwa ein körperliches Element einer Lichtflamme wäre, oder eine unendlich kleine glänzende, übrigens aber undurchsichtige Ebene, vorstellen will. Allemahl muß man annehmen, jeder

der physische Lichtstrahl erstrecke sich durch einen gradlinichten prismatischen oder cylindrischen Raum $LlqQ$, $LlsS$, dessen Querschnitte, die man auf seiner Länge senkrecht annimmt, unendlich kleine Flächen, nicht blos geometrische Puncte sind.

2. §.

Wenn man L als einen unendlich kleinen Körper betrachtet, so ist es gleichgültig, unter welcher Figur man sich denselben vorstellen will. Wäre es eine unendlich kleine leuchtende Kugel, so würden alle davon ausgehende physische Lichtstrahlen in so fern einen gleichen unendlich kleinen Raum einnehmen, in wie fern die senkrechten Querschnitte aller Strahlen gleich groß seyn würden. Verbindet man mit dieser Voraussetzung noch die folgende, daß alle Strahlen aus einer Lichtmasse von durchgängig gleicher Dichtigkeit bestehen, so folgt daraus, daß auf alle Stellen, A, B, E, F, wo ein physischer Lichtstrahl die um L angenommene Kugelfläche trift, gleichviel Licht falle. Wofern endlich die physischen Lichtstrahlen um L auch so gleichförimg vertheilt sind, daß auf gleichgroße Stücke der Kugelfläche gleichviele Lichtstrahlen fallen, die vermöge der zweyten Voraussetzung alle einerley für sich eigene Dichtigkeit haben; so ist über gleiche Stücke dieser Kugelfläche gleichviele Lichtmasse verbreitet, und die ganze Kugelfläche ist gleichförmig erleuchtet. Ich werde im folgenden alle drey Voraussetzungen annehmen, wenn ich von L als einem nach allen Seiten umher leuchtenden physischen Punct rede.

Wenn dagegen L*l* eine unendlich kleine leuchtende Ebene ist, so fällt die erste von den dreyen erwähnten Voraussetzungen weg. Zwar muß man sich wiederum alles Licht, was von L*l* nach einerley gradlinichten Richtung ausgehet, wie L*lq*Q, L*ls*S, als einen physischen Lichtstrahl vorstellen, nun aber sind nicht mehr die senkrechten Querschnitte aller von L*l* ausgehenden Strahlen gleich groß: vielmehr werden diese Querschnitte desto kleiner, je kleiner der Winkel *l*LS wird, unter welchem der Strahl gegen die leuchtende Ebene geneigt ist, den ich im folgenden den Ausflußwinkel nennen werde. Man stelle sich die unendlich kleine Ebene L*l* nach allen Seiten erweitert vor, so wird dadurch jede um L als den Mittelpunct beschriebene Kugelfläche in zwo Halbkugelflächen, wie OQW, OGW, getheilt. Ist nun die unendlich kleine Ebene L*l* undurchsichtig, und nur auf einer Seite gegen die Halbkugelfläche OQW leuchtend, wie wenn es ein Element der Oberfläche eines für sich leuchtenden dabey aber undurchsichtigen Körpers wäre; so kann das von L*l* ausgehende Licht sich nur in dem Raum der Halbkugel OQW ausbreiten. Soll nun die zweyte der vorhin angenommenen Voraussetzungen stehen bleiben, daß alle Strahlen die L*l* aussendet, aus einer Lichtmasse von durchgängig gleicher Dichtigkeit bestehen, so kann nicht auf alle Stellen O, K, Q, S, wo diese Strahlen die um L angenommene Kugelfläche treffen, gleichviel Licht fallen: und wenn die dritte Voraussetzung von der gleichförmigen Vertheilung der Strahlen nach allen Seiten damit verbunden wird, so erhellet, daß nicht mehr über gleiche Stücke

der

der erwehnten Kugelfläche gleichveile Lichtmasse vertheilt bleibe, daß mithin die Halbkugelfläche OQW nicht gleichförmig erleuchtet sey.

Ob diese Vorstellungen insgesammt oder zum Theil mit dem, was in der Natur vorgeht, übereinstimmen, das läßt sich nicht sogleich ausmachen: es muß zuforderst untersuchet werden, was daraus folge, wenn man folgende zwey Voraussetzungen als Grundsätze der Photometrie annimmt:

1) Das Licht breitet sich von jedem leuchtenden Element in gradlinichten physischen Strahlen nach allen Seiten in so weit gleichförmig aus, daß auf gleiche Stücke einer das Element umgebenden Kugelfläche, so weit die Strahlen leztere treffen können, gleichviele Lichtstrahlen fallen.

2) Alle physische Lichtstrahlen, welche einerley leuchtendes Element nach allen Seiten gleichförmig aussendet, bestehen aus einer Lichtmasse von durchgängig gleicher Dichtigkeit, und diese den Strahlen eigene Dichtigkeit bleibt ohne merkliche Aenderung dieselbe, wie groß auch die Entfernung von dem leuchtenden Element angenommen wird, in welcher man die Strahlen auffängt.

3. §.

Auf jedes Stück der Kugelfläche wie AB fallen so viele von allen das Element, oder den physischen Punct L umgebenden Lichtstrahlen, als in dem Raum der pyramiden- oder kegelförmigen Spitze ALB enthalten sind, so wie die ganze Kugelfläche die gesammte Menge aller den Punct L umgebenden Lichtstrahlen auffängt. Man kann sich vorstellen, daß die ganze Kugelfläche in gleiche und ähnliche Elemente getheilt sey, über jedes dieser Elemente kann man sich eine Pyramide vorstellen, deren Spitze in L liegt: alsdenn sind die innern Räume der in L zusammen laufenden Ecken oder Spitzen alle gleich groß, und die Summe aller der Spitzen, welche die Ecke oder Spitze ALB ausmachen, ist in der Summe aller den Punct L umgebenden Spitzen so vielmahl enthalten, als die Summe der Elemente der Kugelfläche, welche das Stück AB ausmachen, in der Summe aller Elemente der ganzen Kugelfläche; oder mit andern Worten: die körperliche Ecke oder Spitze ALB verhält sich zur Summe aller Ecken, die den Punct L von allen Seiten umgeben können, wie das Stück der Kugelfläche AB zwischen den Seitenflächen der Ecke ALB, (oder zwischen der die Spitze L umgebenden conischen Fläche, wenn diese Spitze Kegelförmig ist) zur ganzen Kugelfläche.

Durch gleiche pyramiden- oder Kegelförmige Räume dieser Art, verbreiten sich gleichviele von den Lichtstrahlen, die L nach allen Seiten umher aussendet, und gleiche Stücke der Kugelfläche fangen gleichviele Strahlen senkrecht auf (2. §.). Diesemnach verhält sich die Menge der Strahlen, welche AB auffängt, zur Menge aller von L ausgehenden Lichtstrahlen, wie das Stück AB der Kugelfläche zur ganzen Kugelfläche.

Wenn also EF ein anderes Stück derselben Kugelfläche ist, so verhält sich die Strahlenmenge, welche AB auffängt, zu derjenigen, die EF auf-

fängt,

fängt, wie AB zu EF, und eben diese Stücke der Kugelfläche verhalten sich, wie die dazu gehörigen körperlichen Ecken oder Spitzen ALB ELF am Mittelpunct der Kugel.

4. §.

Um die Ausdrücke desto mehr abzukürzen, werde ich im folgenden die pyramiden- oder Kegelförmige Ecke oder Spitze wie ALB, schlechthin eine **Ecke** nennen, und die Fläche, welche sie von allen Seiten umgiebt, selbige mag aus ebenen Flächen bestehen, oder eine krumme kegelartige Fläche seyn, soll schlechthin die Gränze der **Ecke** heissen. Von einer solchen Ecke, und ihrem innern Raum muß man sich in der körperlichen Geometrie eine ähnliche Vorstellung machen, wie von einem ebenen gradlinichten Winkel in der ebenen Geometrie. Die Schenkel des ebenen Winkels laufen von seiner Spitze aus ins unendliche fort, und der Raum zwischen den Schenkeln erweitert sich immer mehr, je weiter die Schenkel von der Spitze aus fortlaufen. Die Gränze einer körperlichen Ecke läuft ebenfalls von ihrer Spitze aus ins unendliche fort, und ihr innerer Raum erweitert sich immer mehr, je weiter die Gränze fortläuft. Wie nun dem 472 §. Geom. gemäß ein Bogen zwischen den Schenkeln eines gradlinichten ebenen Winkels aus seiner Spitze als dem Mittelpunct mit dem Halbmesser = 1, zwischen seinen Schenkeln beschrieben dazu dienet, die Grösse des Winkels auszudrücken, wenn derjenige = 1 angenommen wird, wozu der seinem Halbmesser gleiche Bogen gehört; so kann hier ein Stück einer Kugelfläche aus der Spitze einer körperlichen Ecke, als dem Mittelpunct zwischen der sie umgebenden Gränze mit dem Halbmesser = 1 beschrieben, dazu dienen, die Grösse der Ecke auszudrücken, wenn diejenige Ecke = 1 angenommen wird, wozu ein Stück der Kugelfläche gehört, das dem Quadrat des Halbmessers gleich ist.

1 u. 2 Fig. Mit dem Halbmesser *al* sey um die Spitze *l* der Ecke *alb* eine Kugelfläche *abef* beschrieben, wovon das Stück *ab* zwischen der die Ecke umgebenden Gränze fällt, so ist $abef : ABEF = al^2 : AL^2$. Wenn also auch $ab : AB = al^2 : AL^2$ angenommen wird, so ist $ab : AB = abef : ABEF$, oder $ab : abef = AB : ABEF$. Ferner hat man $ab : abef = alb$: Summen aller Ecken um l, und $AB : ABEF = ALB$: Summe aller Ecken um L; also alb : Summe der Ecken um l = ALB : Summe der Ecken um L. Weil nun die Summe aller Ecken um l mit der Summe aller Ecken um L einerley ist, so hat man $alb = ALB$, wenn $\frac{ab}{al^2} = \frac{AB}{AL^2}$ ist: oder zwey Ecken sind gleich groß, wenn die Kugelflächen zwischen ihren Gränzen sich wie die Quadrate der zugehörigen Halbmesser verhalten.

Daraus fließt der besondre Satz, daß diejenige Ecke allemahl einerley Grösse habe, wozu ein Segment der Kugelfläche gehört, das dem Quadrat des zugehörigen Halbmessers gleich ist.

Ueberhaupt aber ist das Verhältniß zwoer Ecken zusammen gesetzt aus dem Verhältniß der Kugelflächen, zwischen ihren Gränzen und dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate ihrer Halbmesser. Es sey nemlich die Summe aller Ecken, die einen

Punct,

Punct, wie L oder l umgeben können, = S, so ist ALB : S = AB : ABEF, und S : alb = $abef$: ab, mithin ALB : alb = AB . $abef$: ab . ABEF; und weil $abef$: ABEF = al^2 : AL^2, so ist auch ALB : alb = AB . al^2 : ab . AL^2, oder ALB : alb

$$= \frac{AB}{AL^2} : \frac{ab}{al^2}.$$

Wenn nun $ab = al^2$ genommen wird, so ist ALB : alb = $\frac{AB}{AL^2} : 1$, und ALB = $\frac{AB}{AL^2} . alb$, oder ALB = $\frac{AB}{AL^2}$, weil alb eine bestimmte als bekannt anzunehmende Grösse hat, die man = 1 setzen kann.

5. §.

Auf AB falle die Strahlenmenge = M, und auf ein andres Stück AE derselben Kugelfläche die Strahlenmenge m, so ist M : m = AB : AE = ALB : ALE, und wenn der leuchtende Punct L einerley ist, so ist M : m zugleich das Verhältniß der Lichtmassen, die sich von L aus in die pyramiden- oder Kegelförmigen Räume ALB, ALE ausbreiten. Wenn demnach die Lichtmasse in dem Raum ALB = L, in dem Raum ALE = λ gesetzt wird, so ist auch L : λ = M : m.

Um einen andern leuchtenden Punct l stelle man sich ebenfalls eine Kugelfläche $abef$ vor, und nehme den conischen oder pyramidenförmigen Raum ale = ALE an, so verbreitet sich von l aus in dem Raum ale die Strahlenmenge = m, weil die gleichen Räume ALE, ale, gleichviele Strahlen fassen. Die Puncte L, l, kann man bey dieser Untersuchung nicht als geometrische Puncte betrachten: vielmehr müssen sie als physische Puncte, als unendlich kleine Massen betrachtet werden, und so könnten sie auch ungleich groß seyn. Es sey also des Elements L Grösse $= E^3$, des Elements l Grösse $= e^3$. Wenn nun $\delta : \Delta$ das Verhältniß der eigenen Dichtigkeit der von L ausgehenden Strahlen, zur eigenen Dichtigkeit derjenigen Lichtstrahlen ist, die l aussendet, und die Lichtmasse, die sich in dem Raum ale ausbreitet, $= l$ gesetzt wird, so hat man $\lambda : l = E^3 . \delta : e^3 . \Delta$. Denn die Lichtmenge in einerley conischen Raum, wächst in gleichen Verhältniß mit der eigenen Dichtigkeit des Lichts, wenn die Grösse des leuchtenden Elements einerley bleibt, und in gleichem Verhältniß mit der Grösse, wenn die eigene Dichtigkeit des Lichts sich nicht ändert: also in beyden Verhältnissen zugleich, wenn sich beydes, die eigene Dichtigkeit des Lichts, und die Grösse des leuchtenden Elements ändert.

Aus den beyden Proportionen

$$L : \lambda = M : m$$

und $\lambda : l = E^3 . \delta . e^3 . \Delta$

folgt $L : l = E^3 . \delta . M : e^3 . \Delta . m$.

also auch $L : l = E^3 . \delta . ALB : e^3 . \Delta . ale$,

weil $ale = ALE$ genommen ist: mithin ferner $L : l = \frac{E^3 . \delta . AB}{AL^2} : \frac{e^3 . \Delta . ae}{al^2}$. (4. §.) Nimmt man di Ecke $ale = 1$, also $ae = al^2$ an, so ist $L : l = \frac{E^3 . \delta . AB}{AL^2} : e^3 . \Delta$, und $L = \frac{E^3 . \delta . AB}{e^3 . \Delta . AL^2} . l$, da dann l diejenige Lichtmasse ist, welche der leuchtende de Punct l auf ein Stück der ihn umgebenden Kugelfläche wirft, das dem Quadrat des Halbmessers gleich ist.

6. §.

Je grösser die eigene Dichtigkeit der Strahlen ist, die ein leuchtender Punct um sich her verbreitet, desto grösser ist der Glanz desselben: er glänzt doppelt so stark, als ein andrer leuchtender Punct, wenn er doppelt so dichte Strahlen aussendet, als der andre verbreitet, und überhaupt ist der Glanz der eigenen Dichtigkeit dieser Strahlen proportional. Es sey also der Glanz des Puncts $L = S$, des Puncts $l = s$, so ist $S : s = \delta : \Delta$, mithin hat man auch $L = \frac{E^3 . S . AB}{e^3 . s . AL^2} . l$.

Wenn nun der Glanz s irgend eines leuchtenden Puncts l als bekannt angenommen wird, und die Grösse desselben $= e^3$ ein für allemahl bestimmt ist, um damit die Grösse andrer leuchtender Puncte zu vergleichen; so kann man $s = 1$ setzen. Ueberdem nehme man diejenige Lichtmenge $= 1$ an, welche ein leuchtender Punct, dessen glanz man $= 1$ gesetzt hat, wenn seine Grösse $e^3 = 1$ wäre, auf ein Stück der ihn umgebenden Kugelfläche werfen würde, das dem Quadrat des Halbmessers gleich ist, so muß in der gefundenen Formul $l = 1$ seyn, wenn $s = 1$ und $e^3 = 1$ ist, und man hat $L = \frac{E^3 . S . AB}{AL^2}$.

Vermöge dieser Formul ist S diejenige Lichmenge, welche ein Punct, dessen Glanz S und dessen Grösse $= 1$ ist, in dem Raum einer Ecke ausbreitet,

tet, deren Maaß = 1 ist: (4. §.) denn es wird L = S, wenn man AB = AL^2 und $E^3 = 1$ nimmt. Setzt man die durch den Raum einer Ecke = 1 scheinende Lichtmenge = Λ, so ist $\Lambda = E^3 . S$, und $S = \frac{\Lambda}{E^3}$. Eben dieser Ausdruck giebt die Lichtmenge, welche ein eben so stark glänzender Punct durch den Raum einer Ecke = 1 verbreiten würde, wenn seine Grösse = 1 wäre. Eben diese Lichtmenge giebt also ein bestimmtes Maaß ab für den Glanz des leuchtenden Elements, oder die eigene Dichtigkeit des Lichts, welches dasselbe nach allen Seiten umherstrahlet.

7. §.

Von dieser eigenen Dichtigkeit der Strahlen, die L nach allen Seiten gleichförmig ausbreitet, muß noch die Dichtigkeit des über der Fläche AB oder GH verbreiteten Lichts, in wiefern es diese Fläche erleuchtet, unterschieden werden. Die Kugelstücke AB, GH, zwischen den Gränzen einer und eben derselben Ecke, fangen gleichviel Licht auf, obgleich GH > AB ist, wenn GH zum grössern Halbmesser gehört. Jedes dieser Kugelstücke ist zwar für sich gleichförmig erleuchtet, gleiche Elemente von GH fangen gleichviel Licht auf, eben so, wie gleiche Elemente von AB gleichviel Licht auffangen: weil man aber die erleuchtete Fläche, in wiefern sich das Licht darüber gleichförmig vertheilt, nunmehro als den Raum betrachten muß, durch welchen das Licht verbreitet ist, so erhellet, daß über AB das Licht dichter beysammen sey, als über GH, GH, weil AB $<$ GH ist, mithin einerley Lichtmasse über AB in einem kleinern Raum, über GH aber in einem grössern Raum gleichförmig vertheilt sey. Von dieser Dichtigkeit des über einer Fläche gleichförmig verbreiteten Lichts hat man einen bestimmten Begrif, wenn man weiß, wie viel Licht über ein solches Stück der Fläche verbreitet ist, das man $= 1$ gesetzt hat. Wenn also der Quadrat-Inhalt der Fläche $= Q$, die darüber verbreitete Lichtmenge $= L$, die Dichtigkeit des Lichts über der Fläche $= D$ gesetzt wird; so hat man wegen der gleichförmigen Vertheilung des Lichts $Q : 1 = L : D$, und $D = \frac{L}{Q}$, so wie $L = D \cdot Q$. Diesemnach wird die Dichtigkeit des Lichts, in wiefern es eine Fläche gleichförmig erleuchtet, eben so gefunden, wie sonst die Dichtigkeit einer durch ihren Raum gleichförmig vertheilten Masse gefunden wird.

Es sey L die Lichtmenge, welche der leuchtende Punct L auf das Stück AB der Kugelfläche ABEF wirft; so ist $L = \frac{E^3 \cdot S \cdot AB}{AL^2}$ (6. §.) und AB ist das, was in der allgemeinen Formul Q war. Bezeichnet also D die Dichtigkeit des Lichts über AB, so ist $D = \frac{L}{AB} = \frac{E^3 \cdot S}{AL^2}$, und diese Dichtigkeit ist dem Quadrat des Halbmessers der Kugelfläche umgekehrt proportional.

Wenn man Lichtmengen, die von gleich großen physischen Puncten ausgehen, vergleicht; so kann man

man $E^2 = 1$ setzen, und $L = \frac{S \cdot AB}{AL^2}$, so wie $D = \frac{S}{AL^2}$ annehmen.

8. §.

1 Fig. Wenn der Punct L, dessen Grösse ich nun Kürze halber $= 1$ setze, sein Licht auf eine Ebene CD wirft, so kann er dieselbe nicht gleichförmig erleuchten, auf gleiche Elemente dieser Ebene kann nicht gleichviel Licht fallen. Es sey LE auf dieser Ebene senkrecht, und mit dem Halbmesser LE sey eine Kugelfläche beschrieben; so wird sie die Ebene in E berühren, und das Element Ee der Ebene kann zugleich als ein Element der Kugelfläche betrachtet werden: mithin ist die Lichtmenge, welche das Element Ee auffängt, $= \frac{Ee \cdot S}{EL^2}$, und die Dichtigkeit des darüber verbreiteten Lichts $= \frac{S}{EL^2}$.

Ferner sey Pp ein anderes Element der Ebene CD, durch P aber sey eine neue Ebene auf LP senkrecht gesetzt, wovon das Element $P\pi$ zwischen der die Ecke PLp umgebenden Gränze liegt; so erhellet, daß Pp nur grade soviel Licht auffangen könne, als $P\pi$ auffangen würde, und $P\pi$ kann als ein Element einer mit dem Halbmesser LP beschriebenen Kugelfläche angesehen werden. Mithin ist die Menge Lichts, welche Pp auffängt, $= \frac{P\pi \cdot S}{LP^2}$. Wenn nun gleich $Pp = Ee$ angenommen wird, so ist doch die Menge Lichts, welche Pp empfängt, kleiner als diejenige,

jenige, welche Ee auffängt, weil die Ecke $PLp <$ ELe ist. Es ist nemlich $\frac{P\pi}{LP^2} < \frac{Ee}{LE^2}$, weil $P\pi$ $< Pp$, oder $P\pi < Ee$, und $LP > LE$ ist.

Die Dichtigkeit des Lichts in der Entfernung LP vom leuchtenden Punct, wenn es in P senkrecht aufgefangen würde, ist $= \frac{S}{LP^2}$, aber das Element Pp fängt das in dem Raum PLp sich ausbreitende Licht nicht senkrecht auf. So wie sich indessen das senkrecht aufgefangene Licht über $P\pi$ gleichförmig verbreiten würde, so verbreitet sich auf ähnliche Art das schief aufgefangene Licht über Pp ebenfalls gleichförmig. Weil nun der Flächenraum Pp $> P\pi$ ist, so breitet sich einerley Lichtmenge über Pp in einen grössern Flächenraum aus, als wenn sie auf $P\pi$ fiele, und die Dichtigkeit des Lichts, so wie es sich über das Element Pp in der schiefen Lage gegen die auffallenden Strahlen verbreitet, ist kleiner, als die Dichtigkeit des in der Entfernung LP von dem leuchtenden Punct senkrecht aufgefangenen Lichts.

9. §.

Weil Ee, Pp, nur als Elmente der Ebene CD betrachtet werden, so sind alle Strahlen, die ein solches Element auffängt, unter sich parallel, und treffen das Element unter einerley Winkel, wie LEC, LPC, welcher hier der **Einfallswinkel** heist. Die Menge des über Pp verbreiteten Lichts war $= \frac{P\pi \cdot S}{LP^2}$, also ist die Dichtigkeit desselben =

ben $= \frac{P\pi \,.\, S}{Pp \,.\, LP^2}$. (7. §.) Weil es gleichviel ist, was man dem Element Pp für eine Gestalt geben will, so kann man es als ein unendlich kleines Rechteck betrachten, dessen eine Seitenlinie Pp, und die andre in P auf der Ebene LPC senkrecht ist: alsdenn ist $P\pi$ ebenfals ein Rechteck, und $P\pi = Pp \,.\, \sin LPC$, weil LpC, LPC, hier gleiche Winkel sind. Wenn also nunmehr die Grösse des leuchtenden Elements $= E^3$ angenommen wird; so hat man die Dichtigkeit des über Pp verbreiteten Lichts $= \frac{E^3 \,.\, S \,.\, \sin LPC}{LP^2}$ und die auffallende Lichtmenge $= \frac{E^3 \,.\, S \,.\, Pp \,.\, \sin LPC}{LP^2}$.

10. §.

Um L sey mit einem Halbmesser LG, der grösser als LA ist, auch die Kugelfläche OGWQ beschrieben, so erhellet, daß auf die ganze Kugelfläche OGWQ zwar eben so viel Licht, als auf ABEF fallen würde, wenn ABEF es nicht aufhielte: nimmt man aber auf der grössern Kugelfläche ein Stück MN eben so groß an, als ein andres Stück AB auf der kleinern Kugelfläche, und setzt die auf AB fallende Lichtmenge = L, die auf MN fallende $= l$; so hat man $L = \frac{AB \,.\, S}{LA^2}$, $l = \frac{MN \,.\, S}{LG^2}$, (6. §.) $E^3 = 1$ gesetzt, mithin $l < L$, weil MN = AB, und LG > LA angenommen ist.

Jede

Jede von den Kugelflächen AB, MN, ist also zwar für sich gleichförmig erleuchtet, aber AB empfängt von L eine grössere Erleuchtung, als MN von AB empfängt. Ist $L = 2l$, oder allgemeiner $L = n \cdot l$, so ist die Erleuchtung, welche L auf AB wirft, 2 mahl, oder überhaupt n mahl grösser, als diejenige Erleuchtung, welche MN von L empfängt. Eine solche Vergleichung läßt sich allemahl anstellen, wenn über zwey verschiedene gleich grosse Flächen, das darauf fallende Licht, (es komme übrigens von einem oder von mehrern leuchtenden Puncten zugleich her,) gleichförmig vertheilt ist, so daß auf gleiche Elemente einer jeden Fläche für sich gleich viel Licht fällt: die Erleuchtungen dieser Flächen verhalten sich, wie die darauf fallenden Lichtmengen.

11. §.

Demnach hat man einen völlig bestimmten Begrif von der Grösse der auf eine gleichförmig erleuchtete Fläche fallenden Erleuchtung, wenn man weis, wie groß die Lichtmenge sey, welche entweder die ganze Fläche, oder ein Theil von ihr von bekannter Grösse auffängt. Um also die Ausdrücke mehr abzukürzen, damit es nicht nöthig sey, jedesmahl zu sagen, die Fläche sey so stark erleuchtet, daß ein Theil von ihr in solcher Grösse soviel Licht auffange; ist es am bequemsten, ein für allemahl festzusetzen, daß der Ausdruck: Erleuchtung, Grösse der Erleuchtung, welche auf eine gleichförmig erleuchtete Fläche fällt, diejenige Lichtmenge bezeichnen solle, welche über ein Stück der Fläche, das man $= 1^2$ angenommen hat, verbreitet ist, oder darüber vertheilt seyn würde, wenn die Fläche die angezeigte Grösse hätte. Solchergestalt werden die Ausdrücke: **Erleuchtung der Fläche**, und **Dichtigkeit des darüber verbreiteten Lichts**, gleichgültig.

Fällt alles Licht senkrecht auf die Fläche, wie das von L kommende Licht auf das Kugelstück AB; so ist die auf AB fallende **Erleuchtung** $\frac{L}{AB} = \frac{S}{LA^2}$ einerley mit der Dichtigkeit des Lichts an der Stelle, wo es senkrecht aufgefangen wird. Wie nun eben so die Erleuchtung des Elements Ee der ebenen Fläche CD, worauf das Licht von L senkrecht fällt, $= \frac{\Lambda}{Ee}$ ist, wenn Λ die darauf fallende Lichtmenge $= \frac{Ee \,.\, S}{LE^2}$ bezeichnet; so ist die eben genannte Erleuchtung $= \frac{S}{LE^2}$ ebenfalls einerley mit der Dichtigkeit des von L ausgehenden, in der Entfernung LE mit einer unendlich kleinen Ebene senkrecht aufgefangenen Lichts, und man könnte sie die **senkrechte Erleuchtung** nennen. Wenn dagegen auf das Element Pp die Lichtmenge λ unter dem schiefen Winkel LPC fällt, so ist die von L auf Pp fallende **Erleuchtung** $= \frac{\lambda}{Pp} = \frac{S \,.\, \sin LPC}{LP^2}$ (9. §). Sie ist also wiederum einerley mit der Dichtigkeit des Lichts über einer unendlich kleinen Ebene, die es unter dem schiefen Winkel LPC auffängt.

12. §.

12. §.

Wenn die Flamme einer angezündeten Kerze oder Lampe ihr Licht umher Strahlet, so gelten die erwiesenen Sätze nur für jeden einzelnen Punct, oder eigentlich für jedes einzelne körperliche Element, der Flamme: und wenn man die von ihr herrührende Erleuchtung einer Fläche suchen wollte, so müste man für jeden Punct, oder für jedes Element der Flamme die Rechnung besonders anstellen: die Summe der Erleuchtungen, welche von allen Elementen zusammen genommen herrührt, wäre denn die gesuchte Erleuchtung. Für jedes Element der erleuchteten Ebene würde jeder Punct der Lichtflamme einen andern Abstand, und die aus demselben ausgehenden Strahlen einen andern Einfallswinkel haben. Weil indessen die Lichtflamme nie sonderlich groß ist, so kann man sie selbst als einen physischen Punct betrachten: oder, welches einerley ist, man kann die Rechnung so anstellen, als wenn alle Elemente der Flamme etwa in ihrer Mitte in einem einzigen Punct beysammen wären. Dies heist annehmen, daß alle Elemente der Flamme von einerley Element der erleuchteten Fläche gleich weit entfernt sind, und die von jedem Element der Flamme auf einerley Element der erleuchteten Fläche fallenden Strahlen, gegen dasselbe unter einerley Einfallswinkel geneigt sind. Beydes kommt der Wahrheit desto näher, je kleiner die Flamme selbst, und je weiter sie von der erleuchteten Fläche entfernt ist. Wenn man hiebey annimmt, daß eine solche Flamme ihr Licht nach allen Seiten gleichförmig umher strahle, eben so, als wenn es ein einziger leuchtender Punct wäre, hat seinen Grund in der Durchsichtigkeit der Flamme, weswegen auch die innern Theile durchscheinen, und solchergestalt die umher strahlende Lichtmenge vermehren können.

13. §.

Das Licht, was ein leuchtender Punct, (oder auch die glänzende Oberfläche eines leuchtenden Körpers,) einer für sich dunklen Fläche zuschickt, erleuchtet die Fläche; das heist, wenn man das Wort dem Sprachgebrauch am gemässesten erklären will: es ist die Ursache, welche macht, daß die Fläche sichtbar, hell, wird. So verstanden, beziehet sich das Wort: erleuchten, auf den glänzenden Punct, (oder die glänzende Fläche,) wovon das Licht herkommt. Wie man nun der erleuchteten Fläche eine gewisse **Helligkeit**, oder **Klarheit**, zuschreibt; so ist vermöge des eben angeführten die Menge des auf einen Flächenraum von bestimmter Grösse fallenden Lichts d. i. die **Erleuchtung**, als die Ursache, die **Helligkeit, Klarheit**, der Fläche aber als ihre Wirkung anzusehen. Es sey also L*l* eine unendlich kleine erleuchtete für sich dunkle Ebene, und um L als einen Mittelpunct sey eine Kugelfläche beschrieben, welche von der nach allen Seiten erweiterten Ebene L*l* in zwo Halbkugeln getheilt wird: das Licht falle auf die Seite der Ebene L*l*, welche der Halbkugelfläche OQW zugekehrt ist; so wird wenigstens ein Theil des auffallenden Lichts den im 2 §. angenommenen Gesetzen gemäß in gradlinichten Richtungen nach allen Seiten völlig eben so zurück strahlen, wie sich das Licht in gradlinichten physischen Strahlen nach allen Seiten verbreiten würde, wenn L*l* für sich leuchtend wäre.

14. §.

Diese physischen Lichtstrahlen haben durchgängig einerley eigene Dichtigkeit, und ihre Ausbreitung ist zwar in so weit gleichförmig, daß auf gleiche Stücke der Halbkugelfläche OQW gleichviele Lichtstrahlen fallen: nur führen, wie schon aus dem 2. §. bekannt ist, nicht alle Strahlen den Stellen der Halbkugelfläche, die sie treffen, gleichviele Lichtmasse zu. Wenn L*l* für sich leuchtend ist, so ist die eigene Dichtigkeit der davon ausgehenden Lichtstrahlen **das Maaß des Glanzes**; und wenn L*l* mit fremden Licht erleuchtet ist, so ist die eigene Dichtigkeit der zurückgehenden Strahlen **das Maaß der Klarheit** der Ebene L*l*. So läßt sich die Klarheit einer erleuchteten Fläche als ein entlehnter Glanz betrachten: für zwey verschiedene leuchtende Elemente ist **das Verhältniß der eigenen Dichtigkeiten der davon ausgehenden Strahlen zugleich das Verhältniß des Glanzes der Elemente**, es mag eigener oder entlehnter Glanz seyn.

Nach diesen Gesetzen strahlt wenigstens ein Theil des auffallenden Lichts allemahl von der Oberfläche eines dunklen Körpers zurück: und wenn gleich Spiegelflächen einen großen Theil des auffallenden Lichts nach andern Gesetzen zurückwerfen, so strahlt doch der übrige Theil ebenfalls nach den hier angenommenen Gesetzen zurück. Ich setze indessen die Spiegelflächen noch ganz beyseite, und verstehe hier die Fläche einer unpolirten Masse, wenn von einer dunklen Fläche die Rede ist, die das auffallende Licht wenigstens zum Theil nach allen Seiten wieder zurück sendet.

15. §.

Sind zwey leuchtende Elemente gleich groß, so ist das Verhältniß der eigenen Dichtigkeiten der von jedem Element für sich ausgehenden Strahlen zugleich das Verhältniß der Lichtmassen, die jedes Element für sich in dem Raum einer Halbkugel ausbreitet. Wenn nemlich die von Ll ausgehenden Strahlen n mahl dichter würden, so ist für sich klar, daß die in dem ganzen Raum der Halbkugel umher strahlende Lichtmasse n mahl grösser würde. Wenn dagegen ungleich große Elemente einen gleichen Glanz haben, so ist das Verhältniß der Lichtmassen, die jedes Element für sich in dem Raum einer Halbkugel umher strahlet, einerley mit dem Verhältniß der Grösse der Elemente. Demnach **ist das Verhältniß der Lichtmassen, die ungleich große Elemente bey ungleichen Glanz nach allen Seiten ausbreiten, zusammen gesetzt aus den Verhältnissen des Glanzes und der Grösse der leuchtenden Elemente.**

16. §.

Wenn gleich große Elemente einer leuchtenden Fläche, die ihre bestimmte Grösse hat, gleichviele Lichtmasse nach allen Seiten ausbreiten, so haben sie alle einerley Glanz, oder die ganze Fläche hat einen gleichförmigen Glanz. Man setze den Quadrat-Inhalt einer solchen Fläche $= Q$, die gesammte Lichtmasse, welche diese ganze Fläche nach allen Seiten ausbreitet, $= \Lambda$; ferner sey s diejenige Lichtmenge, welche eine in allen Elementen eben so stark glänzende Fläche nach allen Seiten ausbreiten würde, wenn ihr Flächen-Inhalt $= 1$ wäre:

wäre: so ist $Q : 1 = \Lambda : s$, also $s = \Lambda : Q$ und $\Lambda = s . Q$.

Was hier s heist, ist dem Glanz der Fläche proportional, und man hat einen bestimmten Begrif von der Grösse des (eigenen oder entlehnten) Glanzes einer überal gleichförmig glänzenden Fläche, wenn man weis, wie groß die Lichtmasse sey, die eine eben so stark und überal gleichförmig glänzende Fläche nach allen Seiten aussenden würde, wenn ihr Quadratinhalt $= 1$ wäre. Demnach ist eben diese Lichtmasse das Maaß des Glanzes der leuchtenden Fläche. Jede unendlich kleine leuchtende Ebene Ll, kann als gleichförmig glänzend angenommen werden: wenn also Λ die Lichtmasse ist die sie nach allen Seiten in dem Raum einer Halbkugel ausbreitet, und s ihr Glanz in dem eben erklärten Verstande, so hat man $\Lambda = s . Ll$. Man wird bey angestellter Vergleichung eben diese Begriffe beym Hn. **Bouguer** (Traite d'Optique sur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. VIII) finden. Was hier mit s bezeichnet ist, heist beym ihm intensité de la lumiere, und was ich mit Λ bezeichnet habe, heist bey ihm quantité totale de la lumiere.

17. §.

Auf die für sich dunkle unendlich kleine Ebene $Ll = \omega^2$ falle die Lichtmenge $= L$, und die nach allen Seiten zurückstrahlende Lichtmenge sey $= n . L$, ihre Klarheit $= \sigma$, so ist $\sigma = \frac{nL}{\omega^2}$. Setzt man ferner die Erleuchtung, welche Ll empfängt $= I$, so ist $\frac{L}{\omega^2} = I$, also $\sigma = n \,.\, I$. Wenn ein paar gleich weisse Flächen von völlig einerley physischen Beschaffenheit, (ein paar matt geschliffene gläserne oder metallene Tafeln, ein paar Stücke von feinem weissen holländischen Papier,) gleich stark erleuchtet sind, so ist I für beyde einerley. Wie es nun keinen Zweifel leidet, daß nicht zugleich n für beyde einerley sey; so ist auch σ für beyde einerley. Ein paar dergleichen gleich stark erleuchtete Flächen haben also eine gleiche Klarheit.

Kann man voraussetzen, daß bey völlig einerley physischen Beschaffenheit der erleuchteten Fläche die Zahl n einerley bleibe, wenn gleich I größer oder kleiner würde; so ist die Klarheit einer erleuchteten Fläche der darauf fallenden Erleuchtung proportional: und wenn dies keinen Zweifel unterworfen ist, so kann man die Ausdrücke: Erleuchtung und Klarheit, als gleichgültige brauchen, wenn es nur darauf ankommt, die Klarheit eines und eben desselben Elements, oder zweyer Elemente von einerley Art, bey verschiedenen Erleuchtungen zu vergleichen.

18. §.

Was nach der eben angegebenen Erklärung Klarheit der erleuchteten Fläche ist, muß übrigens noch von der gesehenen Klarheit, wie sie dem Auge vorkommt, unterschieden werden, und um deßwillen werde ich jene Klarheit, wovon kurz vorhin die Rede war, die wahre Klarheit nennen; Auch siehet man wohl, daß aus eben dem Grunde der wahre Glanz einer mit eigenem Licht glänzenden

den Fläche von ihrem gesehenen oder scheinbaren Glanz unterschieden werden müsse. Kommt nun die **gesehene Klarheit**, wie nicht zu zweifeln ist, auf die Art und Weise an, wie das von der erleuchteten, oder auch für sich leuchtenden Fläche ausgehende Licht das Auge rührt; so läßt sich keine Untersuchung darüber, wie etwa die gesehene Klarheit von der wahren Klarheit abhängen mag, anstellen, bevor der Bau des Auges, und die Art, wie es beym Sehen zugehet, ist erklärt worden. Ich nehme indessen bis auf weitere Prüfung folgendes an.

1) Gleich weisse und gleich stark erleuchtete Flächen von völlig einerley physischen Beschaffenheit, die ein Zuschauer beyde neben einander zugleich mit einem Blick übersehen kann, haben nicht allein eine gleiche wahre (17. §.) sondern auch für diesen Zuschauer eine gleiche scheinbare Klahrheit.

2) Sind eben die Flächen ungleich stark erleuchtet, so ist ihre wahre Klarheit ungleich groß, und sie scheinen eben dem Zuschauer auch ungleich klar, wenn anders die erwehnte Ungleichheit der Erleuchtung und wahren Klarheit nicht etwa sehr geringe ist.

3) Wenn also ein Paar neben einander befindliche Flächen von der vorausgesetzten Beschaffenheit einem Zuschauer, der sie beyde zugleich mit einem Blick übersiehet, gleich klar zu seyn scheinen; so sind sie würklich gleich klar, mithin sind die auf beyde fallenden Erleuchtungen gleich groß.

Die Einschränkung, die dieser Satz eben um deßwillen leidet, weil bey dem vorhergehenden eine Einschränkung nöthig war, wird einem jeden von selbst beyfallen. So wenig aber die kleinen unvermeidlichen Fehler bey Schätzung der Gleichheit grader Linien die Geometrie selbst und ihre Gründe unsicher machen, so wenig machen die nicht ganz zu vermeidenden kleinen Fehler bey Schätzung dessen, ob ein Paar Flächen gleich klar oder hell sind, die Photometrie und ihre Gründe unsicher.

19. §.

Wenn man mit einigen Kerzen soviel möglich von einerley Art und Grösse, am besten ist es mit Wachskerzen, versehen ist, damit ihre Flammen, wenn sie nach der Anzündung ruhig brennen, wenigstens beynahe eine gleiche Grösse und gleichen Glanz haben; so kann man im finstern Zimmer auf mehr als eine Art Versuche anstellen, welche zur Bestättigung der bisher vorgetragenen photometrischen Grundsätze dienen. Von der gleichen Grösse der Flammen kann man sich ziemlich durch den Augenschein versichern, wenn man ein paar solcher Kerzen neben einander stellt. Es sey also AB die Grundlinie der weissen Wand eines dunklen Zimmers auf der Ebene DEAB, die hier den Fußboden des Zimmers, oder auch jede damit parallele Ebene, etwa eines Tischblades, vorstellt. Ueber L stelle man eine oder mehrere brennende Kerzen sehr nahe bey einander, daß man ihre Flammen als eine einzige aus allen zusammengesetzte Flamme betrachten kann, deren Grösse ich $= E^3$, ihren Glanz $= S$ setze. Ueber EF stelle man eine dunkle Ebene, welche die Gestalt eines Rechtecks hat, lothrecht, damit ihr Schatten, den die (einfache oder aus mehrern zusammen gesetzte Lichtflamme) in L an an der gegen über stehenden Wand verursacht, zwischen den Verticallinien über B und G falle. Weiter stelle man eine andre einfache oder zusammengesetzte Kerze in H so, daß der Schatten der dunklen Ebene über EF, den diese in H befindliche Flamme allein verursachen würde, zwischen den Verticallinien über A und G falle, und setze die Grösse der in H befindlichen Flamme $= e^3$; ihren Glanz $= s$. Der Stellung der Kerzen gemäß, empfängt die Fläche der Wand über AG allein von der Flamme L eine Erleuchtung $= I$, die Fläche über BG aber allein von der Flamme H eine Erleuchtung $= i$, und auf diese Stellen fallen die Strahlen wenigstens beynahe senkrecht. Demnach hat man $I : i = \frac{E^3 . S}{LO^2} : \frac{e^3 . s}{HK^2}$. Man ändre eine von beyden Entfernungen LO oder HK so lange, bis beyde Stellen über AG und BG gleich hell scheinen, so sind die darauf fallende Erleuchtungen gleich groß, (18. §. n. 3.) und man hat $\frac{E^3 . S}{LO^2} = \frac{e^3 . s}{HK^2}$, oder $LO^2 : HK^2 = E^3 . S : e^3 . s$.

20. §.

Wenn die einzelnen Lichtflammen alle gleich groß sind, und ihre Anzahl in $L = m$, in $H = n$ ist, so hat man $E^3 : e^3 = m : n$, also $LO^2 : HK^2 = m . S : n . s$; und eben wegen dieser bequemen Vergleichung sucht man solche Kerzen zu Versuchen dieser Art aus, deren Flammen wenigstens sehr nahe von gleicher Grösse sind.

Stellt man in jeder von den Stellen L und H nur eine einfache Kerze, so ist $LO^2 : HK^2 = S : s$,

und

und wenn alsdenn LO = HK befunden wird, so ist man versichert, daß die Flammen einen gleichen Glanz haben. Von solcher Beschaffenheit sucht man sich etwa drey oder mehrere Kerzen aus, um die weiter folgenden Versuche anzustellen: da dann bey eben der Zubereitung zum Versuch, wie im vor. §., $LO^2 : HK^2 = m : n$ ist, wenn man sich davon versichert hat, daß für alle einzelne Lichtflammen $S = s$ sey.

Stellt man zwey Kerzen über C und D bey einander, die eine doppelte Kerze in L vorstellen, und in H eine einfache Kerze, so ist $LO^2 : HK^2 = 2 : 1$, oder es muß $LO^2 = 2\,HK^2$ seyn, und $LO = HK\sqrt{2}$. H. Lambert hat den Versuch angestellt (Photom. §. 58. Exper. 1) und er beschreibt den Erfolg so, daß er würklich sehr nahe $LO = HK\sqrt{2}$ befunden habe.

21. §.

4 Fig. Wiederum sey AB die Grundlinie einer verticalstehenden Wand im dunklen Zimmer, und über EF sey eine undurchsichtige rechteckte Ebene aufgerichtet. In C sey eine Kerze so gestellt, daß sie den Schatten der Ebene EF zwischen den Verticallinien über G und H werfen würde, übrigens aber die Stellen der Wand zunächst bey G von ihr unter dem Einfallswinkel CGA erleuchtet werden. Ferner stelle man in D eine andre Kerze, deren Flamme eben so groß, und eben so stark glänzend, als die vorige ist, so daß sie den Schatten der Ebene EF auf der Seite von G werfe, wo A liegt, verrücke sie aber in der Linie DG so lange, bis die Wand auf beyden Seiten der Verticallinie über G gleich helle

helle erscheint, so werden die Stellen der Wand zunächst bey G auf der Seite wo H liegt, allein von D unter dem Einfallswinkel DGH erleuchtet, so wie die Stelle zunächst bey G auf der Seite, wo A liegt, allein von C unter dem Winkel CGA erleuchtet wird. Also ist die Erleuchtung in GA $= \frac{S \cdot \sin CGA}{CG^2}$, in GH $= \frac{S \cdot \sin DGH}{DG^2}$, mithin vermöge des Versuchs, und der Voraussetzung im 18 §. n. 3. $\sin CGA : \sin DGH = CG^2 : DG^2$. Weil man nun beym Versuch die Linie CG, DG, CA, DK, messen kann, so hat man $\sin CGA = \frac{CA}{CG}$, $\sin DGH = \frac{DK}{DG}$, und der Versuch muß $\frac{CA}{CG} : \frac{DK}{DG} = CG^2 : DG^2$ geben. Auch dies hat H. Lambert so befunden a. a. O. 63 §. Exper. IV.

22. §.

Nachdem in C eine oder etliche Kerzen bey einander gestellt worden, könnte man die Entfernung GD = GC annehmen, und in D ebenfalls einige Kerzen bey einander stellen, allemahl solche, wovon die Flammen gleich groß und gleich stark glänzend sind. Hierauf müste man die Entfernung GC = GD so lange verändern, bis die Stellen von beyden Seiten gleich hell zu seyn scheinen. Ist nun in C die Zahl der Kerzen $= n$, in D aber $= m$, so ist hier die Erleuchtung aus C $= \frac{nS \cdot \sin CGA}{CG^2}$, und die aus D kommende Erleuchtung $= \frac{mS \cdot \sin DGH}{DG^2}$. 4Fig.

Ver-

Vermöge des Versuchs, und der Voraussetzung im 18 §. n. 3. sind diese Erleuchtungen gleich, und CG = DG, also n. sin CGA = m. sin DGH, oder sin CGA : sin DGH = m : n. So hat es wiederum Hr. L. würklich befunden, a. a. O. 62. §. Exper. III.

Der II. Abschnitt.

Die Erleuchtung einer Ebene von einer Lichtflamme, in wie weit leztere als ein Punct betrachtet werden kann.

23. §.

Wenn nicht auf gleiche Elemente einer erleuchteten Fläche eine gleiche Lichtmenge fällt, wenn die Erleuchtungen, welche auf verschiedene Elemente dieser Fläche fallen, verschieden sind; so kann eigentlich nie von der Erleuchtung der ganzen Fläche die Frage seyn. Wenn indessen die gesammte Lichtmenge bekannt ist, welche die Fläche auffängt; so giebt diese Menge des auffallenden Lichts, durch den Quadrat-Inhalt der Fläche dividirt, einen Begrif von ihrer mittlern Erleuchtung. Man kann nemlich so fragen: wenn die ganze auf die Fläche fallende Lichtmenge über selbige gleichförmig vertheilt wäre, wieviel davon auf ein

ein solches Stück der Fläche fallen würde, das man = 1 gesetzt hat. Das wäre denn die mittlere Erleuchtung der Fläche, und derselben wäre auch die mittlere Klarheit proportional. (M. s. H. Lamberts Photom. P. I. Cap. II. §. 167. p. 77.) Ein einziger leuchtender Punct kann eine Ebene nicht gleichfömig erleuchten: wenn also gefragt wird, wie groß die Erleuchtung, oder Klarheit der Ebene sey, die sie von einem Punct empfängt, so kann nur von der mittlern Erleuchtung die Rede seyn.

Unter welchen Umständen es verstattet sey, eine Lichtflamme, die eine Ebene, etwa einen Tisch erleuchtet, als einen einzigen Punct zu betrachten, ist schon aus dem 12 §. bekannt: mit den nöthigen Einschränkungen also läßt sich die eben angestellte Betrachtung auf Erleuchtungen, welche von einer Lichtflamme kommen, anwenden.

24. §.

Es sey LMON ein Kreis, und AC eine im Mittelpunct A auf seiner Ebene lothrecht stehende grade Linie: in der leztern befinde sich eine Lichtflamme C in gegebener Höhe AC über der Ebene: man soll die mittlere Erleuchtung des Kreises finden. 5 Fig.

Aufl. Der Halbmesser AM = z wachse um das Element Mμ, und mit dem Halbmesser Aμ = $z + dz$ stelle man sich einen andern concentrischen Kreis $\lambda\mu\omega\nu$ beschrieben vor, so ist zwischen beyden ein Ring enthalten, dessen Breite Mμ unendlich klein, und dessen Fläche = $2\pi z dz$ ist. Ein anderer Halbmesser Am schliesse mit AM einen unendlich

lich kleinen Winkel MAm ein: so ist Mμnm ein Element der Kreisfläche, wovon beyde Abmessungen unendlich klein sind. Man setze $AC = c$, den Winkel $ACM = \psi$, so ist $CM = \sqrt{(c^2 + z^2)}$ und die Erleuchtung des Elements $M\mu nm = \frac{S \cdot \sin\psi}{CM^2}$ (11. §.) $= \frac{S \cdot \sin\psi}{c^2 + z^2}$, wenn S den Glanz der Lichtflamme bezeichnet, und ihre Grösse $= 1$ ist. Ueberdem ist $\sin\psi = \frac{AC}{CM} = \frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}}$, mithin eben diese Erleuchtung $= \frac{S \cdot c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle Elemente, die zu dem Ringe LMON $\lambda\mu\omega\nu$ gehören, ist diese Erleuchtung einerley, weil für sie alle z, also auch ψ und CM einerley bleibt, mithin wird dieser Ring gleichförmig erleuchtet, und der Ausdruck $\frac{S \cdot c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ giebt zugleich die Erleuchtung des ganzen Ringes. Eben dieses Ringes Fläche war $= 2\pi z dz$, mithin ist die auf ihn fallende Strahlenmenge $= \frac{2\pi c S z dz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, und durch Integration dieser Formul findet man die Summe der auf alle Ringe der ganzen Kreisfläche fallenden Strahlen; mithin die ganze den Kreis erleuchtende Lichtmenge.

Man setze diese Strahlenmenge $= M$, so ist $dM = \frac{e\pi c S z dz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Ferner sey $c^2 + z^2 = y$, so so ist $2zdz = dy$, und $dM = \pi c S y^{-\frac{3}{2}} dy$, mithin $M = C - 2\pi c S y^{-\frac{1}{2}}$, oder $M = C - \frac{2\pi c S}{\sqrt{(c^2+z^2)}}$.

Mit z muß dies Integral zugleich verschwinden, also wird $C = 2\pi S$, und $M = 2\pi S \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}}\right)$.

Weil endlich der Flächen-Inhalt des Kreises LMON $= \pi z^2$ ist, so wird die gesuchte mitlere Erleuchtung $= \frac{2S}{z^2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}}\right)$.

25. §.

Weil $\frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}} = \sin AMC = \cos ACM$ war, so ist auch $M = 2\pi S \operatorname{sinv} ACM$, da dann ACM der scheinbare Halbmesser des erleuchteten Kreises ist, aus dem leuchtenden Punct C gesehen. Um C als einen Mittelpunct sey mit dem Halbmesser CB $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben, so ist zwischen der Fläche des auf den Kreis fallenden Strahlenkegels MCN ein Segment der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kugelfläche enthalten, dessen Fläche $= 2\pi \operatorname{sinv} ACM$ ist. (621 §. Geom.) Wenn also die Fläche dieses Segments $= K^2$ gesetzt wird, so ist auch $M = K^2 . S$. Hier aber bezeichnet S die Menge Lichts, welche der Punct C auf ein Stück der Kugelfläche wirft, das dem Quadrat des Halbmessers gleich, mithin hier $= 1$ ist (6. §.): also hat man $1 : K^2 = S : M$, und der Ausdruck $M = K^2 . S$ zeigt an, daß auf den

Kreis LMON so viele Lichtmasse falle, als das Kugelsegment FBG zwischen den Gränzen des auf den Kreis fallenden Strahlenkegels auffängt.

Das hätte man auch ohne alle Rechnung von selbst wissen können, denn es ist für sich klar, daß der Kreis LMON nicht mehr und nicht weniger Licht auffangen könne, als das Kugelsegment FBG auffangen würde. Indessen war es nicht undienlich, die bisher vorgetragenen Gründe der Photometrie auf ein so leichtes Beyspiel anzuwenden, und zu zeigen, wie die Rechnung aus den Grundformuln auf eben das Resultat führe, was man auch sonst kürzer hätte finden können.

26. §.

Die Erleuchtung des Ringes, wozu der Halbmesser z gehört, war $= \frac{S \, . \, c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, und diese ändert sich mit z so, daß sie $= \frac{S}{c^2}$ wird, wenn z verschwindet, übrigens aber beständig abnimmt, wenn z wächst, bis sie verschwindet, wenn man z unendlich groß setzt. Die Voraussetzung $z = 0$ giebt die senkrechte Erleuchtung grade unter der Lichtflamme, und bey der Voraussetzung $z = \infty$ muß die Erleuchtung verschwinden, weil der Einfalswinkel AMC verschindet. Auf die Stelle grade unter dem Licht, fällt um deswillen eine grössere Erleuchtung als auf jede andre Stelle, weil nicht allein die Entfernung dieser Stelle von der Flamme kürzer ist, als die Entfernung jeder andern Stelle, sondern auch, weil zugleich auf diese Stelle das

Licht senkrecht, auf jede andre unter einem schiefen Winkel fällt. Auf jeder von den Wänden des dunklen Zimmers, worin eine Kerze brennt, giebt es demnach ebenfals eine Stelle, die am stärksten erleuchtet ist, da nemlich, wohin eine grade Linie fällt, die von der Flamme auf die Wand senkrecht gezogen wird. Oben an der Decke des Zimmers giebt es eben so eine am stärksten erleuchtete Stelle. (Man vergleiche den 153 §. der Perspectiv).

27. §.

Nimmt man z beständig, dagegen aber c als veränderlich an, so verschwindet die Erleuchtung des Ringes durch M, wenn $c = 0$ ist, weil der Einfallswinkel für jede Stelle M nun $= 0$ wäre: mit c wächst sie zwar anfangs, nimmt aber hiernächst wieder ab, und verschwindet zum zweyten mahl, wenn $c = \infty$ genommen wird, weil nun zwar der Einfallswinkel $= 90°$, aber die Entfernung unendlich groß wäre. Man kann also fragen: wie weit die Flamme über der gegebenen Stelle A erhöhet seyn müste, damit auf eine gleichfals gegebene Stelle M, oder einen Ring, wozu der gegebene Halbmesser CM gehört, die möglichst gröste Erleuchtung falle?

Stehet die Lichtflamme über der Mitte eines kreisrunden Tisches grade so hoch, als erfordert wird, damit auf den äussersten Rand desselben die gröste Erleuchtung falle, so sind alle übrige mit dem Rande concentrische Ringe noch mehr erleuchtet, als der äusserste. Wenn also die auf den äussern Rand fallende Erleuchtung noch so groß ist, als man sie nöthig hat, um ohne Beschwerde dabey seine Augen zu gebrauchen; so wird um so mehr die Erleuchtung aller übrigen Stellen auf dem Tisch dazu hinlänglich seyn. Die Erleuchtung wäre auf solche Art auch am besten über dem Tisch vertheilt: Denn würde das Licht mehr erhöhet, so würde die Erleuchtung aller Stellen ohne Ausnahme kleiner werden, als sie vorher war: würde dagegen die Lichtflamme mehr erniedriget, so würden zwar die Stellen grade unter dem Licht und in der Nähe umher desto mehr Erleuchtung empfangen, je niedriger die Flamme gestellt würde, allein die Erleuchtung der gegen den Rand zu liegenden Stellen würde man desto mehr schwächen. Die Flamme wirft zwar desto mehr Strahlen auf den Tisch, je niedriger sie steht, und die Hälfte aller Strahlen, die sie um sich her verbreitet, so viele, als auf die Fläche einer um selbige beschriebenen Halbkugel fallen würden, ist die Gränze, welche die auf den Tisch fallende Strahlenmenge nie übertreffen kann, wenn gleich die Höhe der Flamme über dem Tisch kleiner würde, als jede gegebene Höhe.

28. §.

So wie dies alles aus der Natur der Sache klar ist, so stimmt auch die Formul für die Strahlenmenge $M = 2\pi S \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}}\right)$ damit überein; denn dieser Werth wächst, wenn c abnimmt, und wird am grösten, nemlich $= 2\pi S$, wenn c verschwindet, da dann 2π die Fläche einer dem Halbmesser $= 1$ zugehörigen Halbkugel ist. Allein bey dieser möglichsten Erniedrigung der

Lichtflamme würde man alles auf den Tisch fallende Licht in den nächsten Stellen um den Mittelpunct vereinigen: nur das mittelste Element allein würde erleuchtet werden, wenn die Flamme würklich ein Punct, und ihre Höhe über dem Tisch unendlich klein wäre; wie denn auch die Formul für die Erleuchtung eines zum unbestimmten Halbmesser z gehörigen Ringes $= \frac{S \cdot c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ allemahl $= 0$ ist, wenn $c = 0$ genommen wird, was auch z bedeutet, wenn nur $z > 0$ ist. Demnach hat man Grund, diejenige Erleuchtung des kreisrunden Tisches von einer über seiner Mitte stehenden Lichtflamme für die beste anzunehmen, wobey auf den äussersten Rand die gröste Erleuchtung fällt.

29. §.

Zu finden, wie hoch eine Lichtflamme über der Mitte eines kreisrunden Tisches stehen müsse, damit sie ihn am besten erleuchte.

Aufl. Es sey der beständige Halbmesser des kreisrunden Tisches $= a$, die veränderliche Höhe $= x$, so ist die Erleuchtung des äussern Randes $= \frac{S \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, wenn man in der Formul des 24. §. a statt z, und x statt c schreibt. Nach der nun schon oft gebrauchten im 343 §. Mech. zuerst vorgekommenen Regel setze man $d \cdot x (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$

 $= 0$,

$= 0$, so wird $(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x (a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$\cdot 2x = 0$, oder $1 - \frac{3x^2}{a^2 + x^2} = 0$ gefunden. Daraus folgt $a^2 + x^2 = 3x^2$, oder $2x^2 = a^2$, und $x = a \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071068 \cdot a$; mithin muß die Höhe der Lichtflamme über dem erleuchteten Tisch nur etwas weniges mehr denn $\frac{7}{10}$ des Halbmessers betragen. Uebrigens ist $\frac{x}{a}$ die Tangente des Einfallswinkels AMC und $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sin 45°$. Es wird aber erfordert, daß $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ sey, mithin muß die Tangente des Winkels, unter welchem die Strahlen auf den äussersten Rand des Tisches fallen, dem Sinus von 45° gleich seyn, wenn der Tisch am besten erleuchtet seyn soll; und zu dieser Tangente gehört ein Winkel von 35° 16′.

30. §.

Aehnliche Betrachtungen mit denjenigen, die im 27. §. darüber sind angestellt worden, wie sich die Erleuchtung des Ringes LMON$\lambda\mu\omega\nu$ ändre, wenn c Aenderungen leidet, kann man auch über das Gesetz anstellen, nach welchem sich die auf einen solchen Ring fallende Lichtmenge $dM = \frac{2\pi c S z dz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ (24. §.) ändert, wenn man z veränderlich annimmt. In der Voraussetzung, daß dz ungeändert bleibe, oder alle Ringe eine gleiche Breite haben, verschwindet bey einer gegebenen Höhe c der

der Lichtflamme die auf den Ring fallende Lichtmenge zweymahl, sowohl wenn $z = 0$, als auch wenn z unendlich groß gesetzt wird: sie wächst anfangs mit z und nimmt hiernächst wieder ab. Demnach muß es einen Ring geben, auf welchen die gröste Strahlenmenge fällt.

31. §.

Bey gegebener Höhe der Lichtflamme über der Mitte des Tisches den Halbmesser desjenigen Ringes zu finden, der die gröste Strahlenmenge auffängt.

Aufl. Man setze $d \dfrac{z}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, so wird $(c^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 (c^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0$, also $1 - \dfrac{3z^2}{(c^2 + z^2)} = 0$, und $z = c\sqrt{\frac{1}{2}}$ gefunden. Vermöge dieser Gleichung fällt die gröste Strahlenmenge auf einen Ring, dem ein Einfallswinkel zugehört, dessen Tangente $= \dfrac{c}{z} = \sqrt{2}$ ist, mithin ein Einfallswinkel von $54^\circ 44'$. Hier muß also $\dfrac{z}{c}$ als die Cotangente des Einfallswinkels dem sin 45° gleich seyn; so wie die Aufgabe des 29. §. erfoderte, daß die Tangente des Einfallswinkels = sin 45° sey, und der Einfallswinkel selbst $= 35^\circ\ 16'$. Die eine dieser Aufgaben erfordert demnach einen Einfallswinkel, welcher denjenigen, den die andre erfordert, zu 90° ergänzt.

32. §.

6 Fig. Wenn AGB dasjenige Stück der Oberfläche eines Körpers ist, wohin der leuchtende Punct M Strahlen werfen kann, und man nimmt etwa in der Mitte der leuchtenden Fläche AGB, oder wo es sonst am bequemsten ist, einen bekannten Punct G an, so kann die grade Linie MG als eine Axe des auffallenden Strahlenkegels betrachtet werden. Eine Ebene durch diese Axe gelegt schneidet die Kegelfläche, so wie die erleuchtete Fläche, und giebt an M einen Winkel AMB, der als der scheinbare Durchmesser der erleuchteten Fläche in der schneidenden Ebene anzusehen wäre, wenn das Auge in M stünde. (15. §. Opt.) Auf ähnliche Art, wie dieser Winkel einen Begrif giebt von der scheinbaren Länge oder Breite des erleuchteten Körpers, nach einer gewissen Richtung genommen, kann der ganze innere Raum der Ecke oder conischen Spitze an M dienen, von der ganzen scheinbaren Ausdehnung des erleuchteten Körpers nach allen Seiten einen Begrif zu geben, wenn man sich vorstellt, er werde aus M gesehen. Dasjenige Stück DFE einer um den Mittelpunct M mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kugelfläche, was innerhalb der Gränzen dieses Kegel- oder Pyramidenförmigen Raums liegt, ist das Maaß der Ecke oder conischen Spitze an M, (4. §.) mithin kann eben dieses Stück DFE der Kugelfläche um M das Maaß der scheinbaren Grösse oder Ausdehnung des erleuchteten Körpers nach allen Seiten abgeben, wenn die Stelle des Auges in M angenommen wird.

Auf die Fläche AGB fällt so viel Licht als DFE auffangen würde, wenn das Licht von einer in M befindlichen kleinen Lichtflamme kommt, und diese Lichtmenge ist das Product der Grösse und des Glanzes der Flamme in die scheinbare Grösse der Fläche AGB aus M gesehen. (13. §.) Diesemnach ist die Lichtmenge leicht gefunden, wenn die scheinbare Grösse der erleuchteten Fläche schon sonst aus geometrischen Gründen bekannt ist, welches der Fall im 25. §. war. In andern Fällen müste die Lichtmenge vermittelst der Integralrechnung gefunden werden: weil jedoch Aufgaben dieser Art keinen erheblichen practischen Nutzen haben würden, so kann diese allgemeine Betrachtung darüber genügen. Ich füge also dem bisherigen nur noch folgende Anmerkung bey. Im 13. §. war $L : l = \frac{E^3 . S . AB}{AL^2} : \frac{e^3 . s . al}{al^2}$: will man nun diejenige Lichtmenge $l = 1$ setzen, die eine Lichtflamme, deren Grösse $e^3 = 1$, und Glanz $s = 1$ ist, durch den Raum einer Halbkugel ausbreitet, so muß man $ae = 2\pi . al^2$ setzen, wenn $s = 1$ und $e^3 = 1$ ist, und man erhält $L = \frac{E^3 . S . AB}{2\pi . AL^2}$. Alsdenn ist das Maaß S des Glanzes der Flamme diejenige Lichtmenge, welche sie in dem Raum einer Halbkugel umher strahlen würde, wenn ihre Grösse $= 1$ wäre. In dem Fall $AB = 2\pi\ AL^2$ ist nun $L = E^3 . S$, und wenn man diese Lichtmenge $= A$ setzt, so ist $S = \frac{A}{E^3}$.

33. §.

Ueber die im 29 §. vorgetragene Aufgabe hat man eine Sammlung von drey kleinen Abhandlungen unter dem Titel: Bestättigte Vorschrift über die beste Erleuchtung einer Ebene mittelst einer Lampe, nebst Untersuchungen darüber von H. H. Kaestner, Wien 1772, und die Ausgabe derselben ist von H. Gerlach Lehrer bey der K. K. Jngenieur = Academie zu Wien veranstaltet, der auch von zweyen der erwehnten Abhandlungen Verfasser ist. Die erste davon war nur ein ganz kurzer Aufsatz von H. Gerlach im 52 Stück der K. K. Realzeitung vom 21 Dec. 1771; die zweyte ist von H. H. Kaestner, der sie im 33 Stück des neuen Hannöverschen Magazins unterm 24 April 1772 bekannt gemacht hatte, und eben diese veranlaßte Hrn. Gerlach zu einer weitern Erläuterung seiner Meinung im dritten Aufsatz.

Jm ersten Aufsatz nahm H. Gerlach an:

„es wachse die Helle auf dem Tisch (seine Meinung „ist, die Erleuchtung auf einer gegebenen Stelle „des Tisches) wie des Lichts Höhe, und umge„kehrt das Quadrat seiner Weite von dem erleuchte„ten Punct,“

und das gab ihm den Ausdruck $\frac{x}{a^2 + x^2}$ dem die Erleuchtung oder Helligkeit proportional seyn soll. Weil nun diese Formul am grösten wird, wenn x

$= a$

$= a$ ist, so fand er, für die beste Erleuchtung des kreisförmigen Tisches müsse die Höhe der Flamme über dem Tisch dem Halbmesser des leztern gleich seyn; da dann die Strahlen auf dem äussern Rand unter einem Winkel von 45° fallen würden. In der Erleuterung sagt er zwar, er habe statt des Lichts Höhe eigentlich den Sinus des Winkels gemeint, unter welchem die Strahlen den äussern Rand des Tisches erleuchten. Er sezt aber diesen Sinus $= x$, und kommt so wieder auf denselben vorhin angezeigten Ausdruck. Es scheint indessen, daß H. Gerlach das oben im 11 §. bewiesene Gesetz der Erleuchtung im Sinne gehabt, und dabey nur aus der Acht gelassen habe, daß in den analytischen Formuln gewöhnlich die zum Halbmesser $= 1$ gehörigen trigonometrischen Linien gebraucht werden; deswegen ist nicht x, sondern $\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$ das, was Hr. Gerlach den Sinus der Schiefe nennt, und wenn er hiemit multiplicirt hätte, so hätte er die hier vorgetragene Auflösung ebenfals gefunden.

H. Lamberts Photometrie ist im Jahr 1760 zu Augsburg im Druck erschienen, und mir sind seit der Zeit keine neuere Bemühungen in dieser Wissenschaft bekannt geworden. Da ich seit einigen Jahren mit Ausarbeitung der Photometrie beschäftiget gewesen, und eben dadurch veranlaßt worden bin, im Jahr 1774 der Churfürstl. Bayerschen Academie der Wissenschaften zu München einen nunmehro im 9 Bande ihrer Ab-

Abhandlungen abgedruckten Aufsatz: über die ersten Gründe der Photometrie, zu überreichen; so hätten bey der kleinen Anzahl photometrischer Schriften, die wir bis jetzt haben, die vorhin angeführten Abhandlungen allemahl meine Aufmerksamkeit sehr erreget, wenn auch nicht die eine derselben einen **Kaestner** zum Verfasser hätte, dessen Verdienste um die Mathematik schwerlich jemand mehr als ich schätzen wird. Denn ausser den Schriften anderer um der Mathematik verdienter Männer, deren Nahmen zu bekannt sind, als daß ich sie hier nennen dürfte, bin ich die Kaestnerischen nicht blos flüchtig durchgegangen, ich glaube vielmehr selbige aufs genaueste durchgedacht zu haben. Wenn ich demnach H. Kaestners Aufsatz über die vom H. Gerlach veranlaßte Aufgabe eben so genau durchgegangen bin, als ich meine eben angeführte im 9 B. der Schriften der Churf. Bayerschen Acad. d. Wiss. gedruckte Abhandlung schrieb; so ist das kein Beweis davon, daß ich nur genigt gewesen wäre, einem Manne von allgemein erkannten Verdiensten zu widersprechen, wenn ich gleich Gründe anführen muste, weswegen ich mit Hn. Kaestner nicht übereinstimmte: vielmehr zeuget es davon, daß mir eine Schrift von **Kaestner** allemahl sehr wichtig sey, sie mag übrigens in einem Wochenbladt oder in einer Sammlung von Schriften einer Wissenschafts-Academie stehen.

In einer Schrift, die für eine Academie der Wissenschaften bestimmt ist, soll man freylich sonst eben nicht die Anfangsgründe einer schon bekannten, und in Ansehung der Grunbegriffe und

Grund-

Grundsätze völlig berichtigten Wissenschaft abhandeln: die nähere Aufklärung und Berichtigung der Gründe einer noch ganz neuen, und wie es scheint, noch wenig bekannten Wissenschaft dürfte aber ganz wohl eine der Absicht einer solchen Gesellschaft angemessene Beschäftigung seyn. Herrn **Lamberts** Photometrie ist der einzige eigentliche Lehrbegrif, den wir von dieser Wissenschaft haben, und ich glaube dies sagen zu können, ohne gegen die Verdienste seines Vorgängers des H. **Bouguer** ungerecht zu seyn. (M. s. unten den 54 §.) Allemahl hatte es mir ein besonderes Vergnügen verursacht, dem Herrn **Lambert** in seinen sehr lehrreichen Untersuchungen zu folgen, und ich hatte für mich schon sehr oft dasselbe von der Lambertschen Photometrie geurtheilt, was nur kürzlich Herr **Klügel** in einem Zusatz zur Uebersetzung von **Priestleys** Geschichte der Optik 312 S. davon gerühmt hat: bey dem allen war es mir noch immer so vorgekommen, als wenn einige Aenderung in der Ordnung, wie Hr. **Lambert** seine Untersuchungen hat nach einander folgen lassen, gewissen Schwierigkeiten leichter abgeholfen hätte, wovon H. **Lambert** selbst erklärt hatte, daß ihnen nicht leicht auszuweichen sey, und eben das veranlaßte mich hauptsächlich, die oberwehnte Abhandlung aufzusetzen.

Herr **Lambert** berührt bie erwehnten Schwierigkeiten gleich anfangs, wo er die ersten Begriffe und Gründe der Photometrie vorträgt, und hebt sie allererst spät im IV Theil seines Lehrbegrifs, nachdem eine sehr grosse Anzahl andrer auch sonst

sehr

sehr interessanter Untersuchungen vorangegangen ist, die gleichwohl zur Hebung der erwehnten Schwierigkeiten nicht alle gleich nothwendig waren. Ich setze ein paar Stellen aus H. Lamberts Photometrie her, woselbst er diese Schwierigkeiten vorläufig anzeigt.

Deest physica luminis, siquidem demonstratam rationibusque innixam desideraveris, theoria. Desunt, quibus lumen metiremur, instrumenta. Desunt denique prima, a quibus cetera deducerentur, principia. Et quod non minus his omnibus geometrae facessit operam, dum singula inventa connectere, suoque ordine debite digerere cupit, *ne in circulum incurrat logicum, vix sibi cavere potest.* (Phot. §. 2.)

Im 7. §. ist die Rede von der Unsicherheit dessen, wenn wir vermittelst des Gesichts die Klarheit erleuchteter Gegenstände empfinden, und bald eine grössere, bald eine geringere Klarheit bey einerley Erleuchtung zu empfinden glauben, weil sich wegen allerley Nebenursachen leicht ein betrügliches Urtheil mit einmischt. Oft geht es uns dabey nicht besser, als wenn uns die Luft bey einerley Grad der Wärme bald kalt bald warm vorkommt. Ohne schon die innere Structur des Auges zu kennen, ist es auch eine sonst nicht unbekannte Sache, und jeder, der es noch nicht wüste, könnte sich durch leichte Erfahrungen davon überzeugen, daß die kreisförmige Oefnung des

Sterns

Sterns im Auge beym schwächern Licht grösser, beym stärkern Licht aber kleiner werde, weshalb im ersten Fall mehr, im lezten Fall weniger Licht ins Auge kommt, als geschehen würde, wenn die Oefnung des Sterns unveränderlich wäre. Sollte nicht jenes die gesehene Klarheit, wie sie empfunden wird, vergrössern, und dieses sie vermindern? Daraus entsteht folgende Schwierigkeit:

Utraque haec aberratio, quae oculi de claritate judicium reddit incertius, simul aliud post se trahit incommodum. Ut enim oculi judicium exactius definiri queat, oporteret aberrationis istius rationem habere, eamque in calculum inducere, ut inde cetera Photometriae principia stabilire liceret. At si curatius in rem istam inquiramus, principiis hisce jam opus esse patebit; pro determinando errore, qui in oculi judicio occurrit. *Quomodo ergo hic vitari possit circulus logicus, si universam Photometriam omni rigore demonstratam desideràveris, ego quidem non video.* Quodsi vero ab isto rigore paullo recedamus, medium dabitur, positiones Photometriae ita connectendi, ut certitudine sua non careant. (Phot. §. 8.) Ich setze noch eine Stelle hinzu, womit der IV Theil anfängt.

Eam

Eam jam Photometriae Partem inchoamus, quae ceteris praemittenda fuisset, nisi ordinem hunc turbasset *circulus ille logicus*, *quem in demonstrandis Photometriae legibus vix evitabilem esse supra diximus*, quemque jam claudemus, cum eo simus redituri, unde simus profecti. (Phot. 784. §.)

Hieraus wird man die Veranlassuug ersehen, die ich gehabt habe, in meiner obangeführten Abhandlung einfliessen zu lassen: einige Stellen in der Lambertischen Photometrie könnten bey dem Leser den Verdacht erregen, als lasse sich beym Vortrage der Photometrie schwerlich ein logischer Cirkel vermeiden. Wie Hr. Lambert dies verstanden wissen will, weis ich sehr wohl, nicht anders, als man Herrn Hofrath Kaestner verstehen muß, wenn man in der Vorrede zum ersten Bande seiner Astronomischen Abhandlungen folgendes ließt:

„Die astronomischen Kenntnisse sind nicht nur „die weitläuftigsten, deren der menschliche Ver„stand fähig ist, sondern sie sind auch so in einan„der verwickelt, daß immer einige zu ihrer Voll„kommenheit andre voraussetzen, welche andern sich „doch ohne die ersten nicht erlangen lassen. — — „Von einer solchen Wissenschaft wie ich die Astro„nomie

„nomie beschrieben habe, jemanden dem sie noch neu „ist, dergestalt zu belehren, daß er das Ganze über„sieht, begreift wie man zu diesen Kenntnissen nach „und nach gekommen ist, und wie sie sicher sind, ob „man gleich oft vorhergehende durch folgende, die „man erst aus den vorhergehenden erlangt hat, voll„kommener macht, dazu ist zuerst ein kurzer Begriff „der Wissenschaft nöthig. — — Umständliche Un„tersuchungen würden nicht nur die Aufmerksam„keit des Lernenden ermüden und zerstreuen, sondern „selbst einander so durchkreuzen, daß er nicht allemahl „wissen würde, ob er aus festen Gründen schlösse, „oder aus Voraussetzungen, die er jetzo auf Treu „und Glauben annähme, und in der Folge wieder „nur aus dem, was er aus ihnen geschlossen hat, „herleiten würde."

Wenn nun die photometrischen Kenntnisse ebenfals wenigstens zum Theil eben so wie die astronomischen in einander verwickelt sind; wenn die völlige Berichtigung der Theorie von der Erleuchtung und der wahren Klarheit erleuchteter Gegenstände, die Theorie von der gesehenen und scheinbaren Klarheit derselben, wie sie das Auge empfindet, voraussetzet, und wenn umgekehrt eine völlig berichtigte Theorie von der letztern nicht zu erlangen ist, ohne die erstgenannte vorauszusetzen; so konnte mich dies wohl veranlassen, darauf zu dencken: ob es nicht vielleicht auf eine genauere Zergliederung der ersten Grundbegriffe und Grundsätze der Photometrie ankomme, um den erwehnten Schwierigkeiten noch mehr, als bisher geschehen war, auszuweichen.

Wenn man meine hier vorgetragenen Gedanken 1 - 18. §. mit jener Abhandlung in den Schriften der Churf. Bayerschen Acad. der Wissens. vergleichen will, so wird man finden, daß ich hier würklich die Begriffe von dem was die Ausdrücke: **Erleuchtung**, **wahre Klarheit** erleuchteter Flächen bezeichnen sollen, noch genauer unterscheide, als in jenem Aufsatz geschehen ist, wo ich mich ohngefehr so darüber erkläre, wie Hr. **Lambert**, (Phot. §. 36. 37.) ob ich gleich glaube, schon damahls eben so wie jetzt darüber gedacht zu haben, und mit H. Lamberts eigentlichen Meinung noch jetzt einstimmig zu seyn. Um nicht gleich anfangs Untersuchungen zu veranlassen, wobey es schlechterdings darauf mit ankommt, was man durch die gesehene **Klarheit** verstehen, und nach welchen Gesetzen man sie messen will; halte ich es am besten zu seyn, wenn der Ausdruck: **Erleuchtung** gebraucht wird, grade nur das, nichts weiter zu verstehen, als was ich hier im 10 und 11 §. angezeigt habe. Ob nun gleich die wahre Klarheit der Erleuchtung, wie ich das Wort verstehe, proportional ist; (17. §.) so mögte es doch, um alle Mißdeutung zu vermeiden, besser seyn, lieber ausser dem Wort **Erleuchtung** kein andres zu gebrauchen, weil ohnehin darüber, wie die **wahre Klarheit** sowohl erleuchteter Körper unter einander, als auch mit dem Glanz für sich leuchtender Körper verglichen werden kann, unten noch Untersuchungen vorkommen müssen. Indessen liegt auch nichts daran, wenn man hier bis auf weitere Untersuchung die Ausdrücke: **Erleuchtung** und **Klarheit** mit H. **Lambert** als gleichgültige brauchen will.

Uebrigens glaube ich die den Ausdrücken, **Erleuchtung**, **Helligkeit**, (wahre) **Klarheit**, angemessenen photometrischen Grundbegriffe nicht allein in H. **Lamberts** Photometrie, sondern auch in einer hieher gehörigen Abhandlung vom H. **Leonh. Euler** im VI. Tom. der Histoire de l'Acad. de Berlin p. 280., woraus ich unten mehreres anführen werde, und eben so in dem vollständigen Lehrbegriff der Optik nach H. **Rob. Smiths** englischen, mit Aenderungen und Zusätzen von H. H. **Kaestner** an verschiedenen Stellen, vornemlich aber im 2 Buch 2 Th. 2 Cap. 155. S. zum Theil auch, wiewohl nicht aufs genaueste auseinander gesetzt, in des H. **Bouguer** bekannten und unten oft anzuführenden Werk: sur la gradation de la lumiere, gefunden zu haben. An der aus dem Smith-Kaestnerischen Werk angeführten Stelle, ist zwar die Rede von der Helligkeit des Bildes auf der Netzhaut im Auge, sie wird aber, ob ich gleich unten allererst den Bau des Auges erklären werde, hier schon völlig verständlich seyn, wenn ich sie ganz hersetze.

„Das Bild im Auge enthält eine gewisse Men-
„ge Lichtstrahlen, es wird heller, wenn es eben
„so groß bleibt, und mehr bekommt, dunkler,

„wenn es unter eben der Grösse weniger hat.
„Was man bey Körpern Menge der Materie,
„Räume, Dichte, nennt, das sind hier Menge
„der Lichtstrahlen, Grössen des Bildes, Hellig-
„keit. Also verhält sich die Helligkeit, wie die
„Menge der Lichtstrahlen mit der Grösse des Bil-
„des dividirt." Man setze statt des Bildes im
Auge jede andre Fläche, die das Licht auffängt, so
stimmt das mit meinen Vorstellungen von der Sache
völlig überein: nur daß ich wegen der oben ausge-
führten Gründe alsdenn, wenn das Licht auf eine
Fläche fällt, lieber das Wort: **Erleuchtung**
brauche, und die Klarheit oder Helligkeit der Fläche
davon als die Wirkung von der Ursache unter-
scheide. Ich finde würklich, daß die zuletzt be-
merkte Vorstellungsart mit H. **Eulers** Gedanken
a. a. O. n. XXV. u. f. 291 S. u. f. zusammen
treffe. Wie man ein Wort definiren will, dar-
auf kommt an sich nichts an: wenn aber in einer
Wissenschaft ein Wort schon seine bestimmte Be-
deutung hat, oder gute Gründe vorhanden sind,
die sonst schon bekannte Bedeutung desselben noch
genauer zu bestimmen; so setzt die Vernunftlehre
der Freyheit, die man sonst hat, einem Wort eine
Bedeutung wie man will zu geben, ihre Grän-
zen.

Der

Der III. Abschnitt.

Theorie der Erleuchtung wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet.

34. §.

Die Lichtmenge, welche von der unendlich kleinen Ebene Ll vermittelst des senkrechten Strahls $LlqQ$ ausgehet, verhält sich zu der Lichtmenge, die vermittelst eines andern gegen die Ebene geneigten Strahls $LlsS$ davon ausgehet, wie der ganze Sinus zum Sinus des Ausflußwinkels. 1 Fig.

Beweis. Man kann Ll als ein unendlich kleines Rechteck betrachten, dessen eine Seitenlinie Ll, die andre aber durch l auf der Ebene WLQ senkrecht ist, so hat jeder physische Strahl $LlsS$ die Figur eines Parallelepipedi. Durch l sey eine Ebene auf den Seitenlinien desselben senkrecht gesetzt, wovon das Stück $l\lambda$ zwischen den Gränzen des physischen Strahls $LlsS$ enthalten ist, so wie zwischen den Gränzen eben dieses Strahls das unendlich kleine Stück Ss, der das Element Ll umgebenden Kugelfläche liegt. Zwischen den Gränzen des senkrechten Strahls liegt das Element Qq der Kugelfläche, und es ist $Qq = Ll$, $Ss = l\lambda$. Weil nun die eigene Dichtigkeit des Lichts für alle Strahlen gleich groß angenommen wird, (2. 14. §.) so ist das Verhältniß der Lichtmengen, die vermittelst

telst des senkrechten, und unter dem Winkel lLS ausgehenden Strahls der Kugelfläche zugeführet, werden $= Qq : Ss = Ll : l\lambda = 1 : \sin lLS$.

35. §.

1 Fig. Die gesammte Lichtmenge, welche das leuchtende Element Ll nach allen Seiten in dem Raum einer Halbkugel umher strahlet, ist gegeben: man soll die Lichtmenge finden, die ein Element ST der von Ll erleuchteten Halbkugelfläche OQW auffängt, dessen Abstand vom Pol Q der Halbkugel durch den Winkel $QLS = \alpha$ gegeben ist.

Aufl. Die Fläche des Elements ST sey $= \omega^2$, die darauf fallende Lichtmenge $= l$, und die ganze in dem Raum der Halbkugelfläche umher strahlende Lichtmenge $= \Lambda$. Ferner sey $QR = \omega^2$ ein Element der Kugelfläche in ihrem Pol, worauf das Licht senkrecht fällt, die Lichtmenge die es auffängt $= \lambda$, so ist $l = \lambda \cdot \cos\alpha$. (34. §.) Wie nun das Element QR unter allen übrigen eben so großen Elementen die gröste Erleuchtung empfängt, so kann man fragen: wie groß ein zu eben der Axe LQ gehöriges Kugelsegment seyn müste, wenn die ganze von Ll umher strahlende Lichtmenge Λ dasselbe gleichförmig und eben so stark erleuchten sollte, als das Element QR erleuchtet ist. Um dies zu finden, setze man den Halbmesser $LQ = r$, so ist die Halbkugelfläche $QOW = 2\pi r^2$, und wenn man das gesuchte Kugelsegment $= 2n\pi r^2$ setzt, so kommt es nur darauf an, die Zahl n zu finden. Vermöge der angenommenen gleichförmigen Erleuchtung des Segments hätte man $\omega^2 : 2n\pi r^2$

$= \lambda$

$= \lambda : \Lambda$, also $\lambda = \frac{\omega^2 . \Lambda}{2 n \pi r^2}$, mithin $l = \frac{\omega^2 . \Lambda \cos\alpha}{2 n \pi r^2}$.

In der 1 Figur stelle ST die eine Seitenlinie des Elements der Halbkugelfläche vor, welches diese Lichtmenge l auffängt, so ist diese Seitenlinie $= r d\alpha$. Die andre Seitenlinie SZ sey ein Element eines zur Axe LQ gehörigen Parallelkreises, wozu ein Halbmesser $= r \sin\alpha$ gehört. Wenn also der Winkel am Pol SQZ $= d\varphi$ gesetzt wird, so hat man $\omega^2 = r^2 d\varphi\, d\alpha \sin\alpha$, und $l = \frac{\Lambda . d\varphi d\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{2 n \pi}$.

Wird dies Differential so integrirt, daß man allein φ veränderlich annimmt, und nach der Integration $\varphi = 2\pi$ setzt; so findet man die Lichtmenge, welche die Zone zwischen zweenen Parallelkreisen durch S und T auffängt. Diese Lichtmenge sey $= d$L, so ist $d\text{L} = \frac{\Lambda . d\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{n}$. Dies Differential integrire man von neuen so, daß es mit α zugleich verschwindet, so findet man die Lichtmenge L, welche das Segment KQS auffängt, mithin $\text{L} = \frac{\frac{1}{2} \Lambda . \sin \alpha^2}{n}$. Wie nun dieser Ausdruck die gesammte Lichtmenge giebt, welche die Halbkugelfläche QOW auffängt, wenn $\alpha = 90°$ gesetzt wird; so muß $\text{L} = \Lambda$ seyn, wenn $\sin\alpha = 1$ ist, und das giebt $\Lambda = \frac{\frac{1}{2} \Lambda}{n}$, mithin $n = \frac{1}{2}$. Dieser Werth statt n gebraucht giebt die gesuchte Lichtmenge $l = \frac{\omega^2 . \Lambda \cos\alpha}{\pi r^2}$.

Ein zur Axe LQ gehöriges Kugelsegment, welches von der gesammten Lichtmenge Λ gleichförmig, und eben so stark als das Element QR erleuchtet würde, müste $= \pi r^2$ seyn, mithin so groß, als der gröste Kreis der Kugel, oder die Hälfte der Halbkugelfläche. Auch hat man $L = \Lambda \sin\alpha^2$.

Man setze den Glanz der unendlich kleinen Ebene $Ll = s$, so ist $s = \frac{\Lambda}{Ll}$, und $\Lambda = s \,.\, Ll$. (16. §.), also auch $l = \frac{s \,.\, Ll \,.\, \omega^2 \cos\alpha}{\pi r^2}$, oder $l = \frac{s \,.\, Ll \,.\, \omega^2 \,.\, \sin lLS}{\pi \,.\, LS^2}$. Ferner ist $L = \Lambda \sin\alpha^2 = s \,.\, Ll \,.\, \sin\alpha^2$, mithin $\frac{s \,.\, Ll}{\pi}$ die Lichtmenge, welche ein Kugelsegment KQS auffängt, dessen Axe der senkrecht ausgehende Strahl LQ, und dessen scheinbarer Halbmesser $QLS = Ang \,.\, \sin \,.\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ wäre, wenn es aus L gesehen würde. Nimmt man nun $\frac{s}{\pi} = S$ an, so bleibt S eine Zahl, die dem Glanz des Elements Ll proportional ist, und es ist $L = \pi S \,.\, Ll \,.\, \sin\alpha^2$, also $\pi \,.\, S = s$ die Lichtmenge, welche eine Fläche $= 1^2$ nach allen Seiten umher strahlen würde, wenn sie mit Ll einerley Glanz hätte, so wie $\pi \,.\, S \,.\, Ll$ die Lichtmenge ist, welche Ll in dem Raum einer Halbkugel verbreitet. Wird also in der gefundenen Formul $s = \pi S$ gesetzt; so ist $l = \frac{S \,.\, Ll \,.\, \omega^2 \sin lLS}{LS^2}$, und die Erleuchtung, welche das unter dem Winkel lLS ausfliessende Licht auf ein Element $= \omega^2$ der Kugelfläche wirft, das von diesem Licht beschienen wird, $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin lLS}{LS^2}$.

Was in diesen Formuln S heist, kann in einem völlig ähnlichen Verstande für **das Maaß des** Glanzes des leuchtenden Elements Ll angenommen werden, in welchem bisher s das Maaß des Glanzes geheissen hat: nur ist alsdenn dies S nicht die ganze Lichtmenge, welche eine eben so stark glänzende Fläche, wenn sie $= 1^2$ wäre, nach allen Seiten ausbreiten würde; sondern ein Theil von ihr, der sich zur ganzen nach allen Seiten umher strahlenden Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält. Soll nun $S = 1$ seyn, wenn der Glanz der leuchtenden Fläche $= 1$ gesetzt wird; so heist das: denjenigen Theil der ganzen von einer gleichförmig und eben so stark glänzenden Fläche $= 1^2$ nach allen Seiten umher strahlenden Lichtmenge $= 1$ setzen, der sich zu dieser ganzen Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält.

36. §.

Die unendlich kleine Ebene Ll wirft ihr Licht auf eine Ebene DE: man sucht die Erleuchtung eines Elements Pp dessen Stelle auf dieser Ebene gegeben ist. 7 Fig.

Aufl. Es sey LM auf DE senkrecht, und Mm ein Element der Ebene DE, worauf das Licht

 senk-

senkrecht fällt; ferner sey mit dem Halbmesser LM um L diejenige Halbkugelfläche BAC beschrieben, worin das von Ll kommende Licht sich ausbreitet: so ist Mm zugleich ein Element dieser Kugelfläche, mithin empfängt es eine Erleuchtung $= \frac{S \cdot Ll \cdot \sin CLM}{LM^2}$. (35. §.) Weil nun die Stelle des Elements Pp gegeben ist, so ist MP gegeben, und man hat $\sin LPD = \frac{LM}{\surd\,(LM^2 + MP^2)}$.

Wird ferner mit dem Halbmesser LP um L eine Kugelfläche beschrieben, wovon das Element $P\pi$ zwischen den Gränzen des Raums $LlPp$ liegt, worin die gesammte von Ll auf Pp fallende Lichtmasse enthalten ist; so erhellet, daß $P\pi$ eben so viel Licht auffangen würde, als Pp auffängt: mithin ist die über Pp verbreitete Lichtmenge $= \frac{S \cdot Ll \cdot P\pi \cdot \sin CLP}{LP^2}$, (35. §.) oder auch eben diese Lichtmenge $= \frac{S \cdot Ll \cdot Pp \cdot \sin LPD \cdot \sin CLP}{LP^2}$, und die Erleuchtung, welche Pp von Ll empfängt, die Dichtigkeit des über Pp verbreiteten Lichts $= \frac{S \cdot Ll \cdot \sin CLP \sin LPD}{LP^2}$.

37. §.

7 Fig. Von zwoen unendlich kleinen gleich stark glänzenden Ebenen Ll, Pp, schickt jede der andern einerley Menge Lichts zu, es mag die eine, oder die andre als leuchtend angenommen werden.

Be-

Beweis. In beyden Fällen, es mag Ll oder Pp die leuchtende Fläche seyn, wirft eine Fläche auf die andre die Lichtmenge =

$$\frac{S \cdot Ll \cdot Pp \cdot \sin CLP \sin LPD}{LP^2},$$ weil sich nur die Einfalls- und Ausflußwinkel verwechseln. Mithin ist die Menge Lichts, welche eine Ebene der andern zuschickt, in beyden Fällen einerley.

Wenn also beyde unendlich kleine Ebenen gleich groß sind, so ist auch die Erleuchtung in beyden Fällen einerley: widrigenfals verhält sich die Erleuchtung, wie die erleuchtende Fläche. Wenn Ll leuchtend ist, so ist die Erleuchtung über

$$Pp = \frac{S \cdot Ll \cdot \sin CLP \sin LPD}{LP^2};$$ wenn aber Pp leuchtend ist, so ist die Erleuchtung über Ll =

$$\frac{S \cdot Pp \cdot \sin CLP \cdot \sin LPD}{LP^2},$$ und die erste verhält sich zur zweyten wie $Ll : Pp$.

38. §.

1) Wenn das Element Mm das von Ll ausgehende Licht senkrecht auffängt; so verhält sich die Erleuchtung, welche Mm von Ll empfängt, wie das Product der scheinbaren Grösse des leuchtenden Elements Ll, das Auge in M angenommen, in den Glanz des Elements. 7 Fig.

Beweis. Die unendlich kleine auf LM senkrechte Ebene $l\lambda$ zwischen den Gränzen der auf Mm fallenden Lichtmasse ist auch als ein Element einer

mit

mit dem Halbmesser Ml beschriebenen Kugelfläche zu betrachten, und so ist $\frac{L\lambda}{LM^2} = \frac{Ll \,.\, \sin CLM}{LM^2}$ das Maaß des conischen oder pyramidenförmigen Raums LMl, (4. §.) und der scheinbaren Grösse des Elements Ll aus M gesehen. (32. §.) Es war aber die Erleuchtung dieses Elements Mm = $\frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin CLM}{LM^2}$, (36. §.), also verhält sich die Erleuchtung wie $\frac{S \,.\, l\lambda}{LM^2}$, oder wie das Product der scheinbaren Grösse des Elements Ll aus M gesehen, in den Glanz des Elements.

2) Wenn das Element Pp das von Ll ausgehende Licht schief auffängt, so ist die Erleuchtung dem Product der scheinbaren Grösse des leuchtenden Elements aus P gesehen in den Glanz des Elements und den Sinus des Einfallswinkels proportional.

Beweis. Die scheinbare Grösse des Elements Ll aus P gesehen ist = $\frac{Ll \,.\, \sin CLP.}{LP^2}$ (4. 32. §.) und LPD ist der Einfallswinkel, mithin das Product der scheinbaren Grösse des Elements Ll aus P gesehen in den Glanz des Elements und den Sinus des Einfallswinkels = $\frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin CLP \,.\, \sin LPD}{LP^2}$,

und

und diesem Ausdruck ist die Erleuchtung, welche Pp von Ll empfängt, proportional. (36. §)

Diesemnach ist bey einerley Glanz, einerley Einfallswinkel und einerley scheinbaren Grösse des leuchtenden Elements die Erleuchtung einerley: also auch die auffallende Strahlenmenge, wenn die Grösse des erleuchteten Elements einerley ist.

Das Element Mm wird von Ll eben so erleuchtet, als wenn Ll nach Mm eine Anzahl Lichtkegel zusammen gehender Strahlen, wie LlM, Llm schickte, die der Grösse des Elements Mm proportional wäre: jeder Lichtkegel aber eine Lichtmasse auf Mm brächte, die sich wie die scheinbare Grösse des Elements Ll aus M gesehen verhielte. Wird dagegen ein Element, wie Pp schief erleuchtet, so ist die Anzahl der auffallenden Lichtkegel LlP dem Product der Grösse des Elements in den Sinus des Einfallswinkels proportional.

39. §.

Die Lichtmenge, welche das leuchtende Element Ll der unendlich kleinen Ebene Pp zuschickt, verhält sich wie das Product der scheinbaren Grösse des erleuchteten Elements Pp aus L gesehen in den Sinus des Ausflußwinkels, den Flächen-Inhalt und Glanz des leuchtenden Elements.

Beweis. Die erwehnte scheinbare Grösse ist $= \frac{Pp \,.\, \sin LPD}{LP^2}$; (32. §.) Diese in den Sinus des

Aus-

Ausflußwinkels den Flächeninhalt und Glanz des leuchtenden Elements Ll multiplicirt giebt

$$\frac{S \,.\, Ll \,.\, Pp \,.\, \sin LPD \,.\, \sin CLP}{LP^2},$$ und die auf Pp fallende Lichtmenge verhält sich wie das angezeigte Product. (36. §.)

Bey einerley scheinbaren Grösse des erleuchteten Elements also, und einerley Ausflußwinkel ist die auffallende Lichtmenge einerley, wenn auch die Grösse des leuchtenden Elements nebst dem Glanz desselben einerley ist.

Man kann sich auch vorstellen, das Element Pp werde von Ll so erleuchtet, als wenn jeder Punct L, ω, l, des leuchtenden Elements nach Pp einen Lichtkegel LPp, ωPp, lPp aus einander fahrender Strahlen schickte, da dann die Anzahl dieser Lichtkegel dem Product der Grösse des leuchtenden Elements in den Sinus des Ausflußwinkels proportional ist.

40. §.

6Fig. **Wenn eine in allen ihren Elementen gleich stark glänzende Fläche AGB von endlicher Grösse, die übrigens eben oder wie man will gekrümmt seyn mag, die unendlich kleine Ebene Mm erleuchtet; so ist die Erleuchtung, welche Mm empfängt, eben so groß als sie seyn würde, wenn zwischen den Gränzen des auffallenden Strahlenkegels AMB eine andre eben so stark glänzenden Fläche HOK befindlich wäre, die ihr Licht nach Mm schickte.**

Beweis.

Beweis. Es sey L*l* ein Element der leuchtenden Fläche AGB, so ist zwischen den Gränzen der auf M*m* fallenden Strahlen-Pyramide LM*l* ein Element Q*q* der Fläche HOK enthalten, und beyde Element L*l*, Q*q*, haben einerley scheinbare Grösse aus M gesehen; auch würde das Licht von Q*q* auf M*m* unter eben dem Winkel fallen, unter welchem es von L*l* auffällt. Mithin würde M*m* von Q*q* so stark erleuchtet seyn, als von L*l*, und von Q*q* eben soviel Licht, als von L*l* empfangen (38. §. n. 2.) Wäre aber die ganze Fläche AGB in unendlich kleine Elemente wie L*l* getheilt, so würden die von allen diesen Elementen auf M*m* fallenden Strahlen-Pyramiden die Fläche HOK in eben soviele Elemente theilen, und jedes Element in AGB würde mit dem dazu gehörigen Element in HOK einerley scheinbare Grösse haben, das Auge in M angenommen; auch würde der Einfallswinkel für jede zwey dergleichen zusammen gehörige Elemente einerley seyn. Mithin würde jedes Element in HOK eben soviel Licht, als das dazu gehörige Element in AGB, nach M*m* werfen; folglich muß auch die Summe der Lichtmengen, welche alle Elemente zusammen in HOK auf M*m* werfen, so groß seyn, als die Summe der Lichtmengen, welche M*m* von allen Elementen in AGB zusammen empfängt, oder die ganze Fläche HOK muß eben soviel Licht, als die ganze Fläche AGB nach M*m* werfen: mithin die Erleuchtung in beyden Fällen gleich groß seyn.

41. §.

Wenn die unendlich kleine Ebene M*m* leuchtend ist, und ihr Licht auf eine Fläche 6 Fig.

AGB

AGB von willkührlicher Gestalt und Grösse wirft; so fängt AGB eine eben so große Lichtmenge auf, als jede andre Fläche HOK zwischen den Gränzen des von M*m* auf AGB fallenden Strahlenkegels auffangen würde.

Beweis. Es sey wiederum L*l* ein Element der Fläche AGB, und zwischen den Gränzen der auffallenden Strahlen-Pyramide LM*l* sey das Element Q*q* der Fläche HOK enthalten, so haben die Elemente L*l*, Q*q*, einerley scheinbare Grösse aus M gesehen, und für beyde ist der Ausflußwinkel einerley, mithin auch die auffallende Lichtmenge. (39. §.) Man kann aber die ganze Fläche AGB in Elemente wie L*l* theilen, so wird durch die auffallenden Strahlen-Pyramiden HOK in eben so viele Elemente getheilt. Für jedes Paar zusammengehöriger Elemente ist die scheinbare Grösse und der Ausflußwinkel einerley, mithin auch die auffallende Lichtmenge: (39. §.) also muß die ganze Fläche HOK eine eben so grosse Lichtmenge als AGB auffangen.

42. §.

6 Fig. **Jede leuchtende Fläche AGB oder HOK wirft soviel Licht auf eine unendlich kleine Ebene M*m*, als die letztere, wenn sie leuchtend und eben so stark glänzend wäre, auf erstere werfen würde.**

Beweis. Um den Mittelpunct M sey eine Kugelfläche mit dem Halbmesser = 1 beschrieben, wovon das Stück DFE zwischen den Gränzen des auf M*m* fallenden Strahlenkegels AMB liegt; so wirft DFE soviel Licht auf M*m* als AGB oder HOK dahin

hin werfen würden. (40. §.) Umgekehrt, wenn Mm leuchtend ist, so wirft Mm soviel Licht auf AGB oder HOK, als Mm auf DFE werfen würde. (41. §.) Nun sey Nn ein Element von DFE, so empfängt Mm von Nn die Strahlen-Menge S. Mm . Nn . sin . NMm, und dieser Ausdruck für alle Elemente in DFE summirt, giebt die auf Mm fallende Strahlenmenge = S . Mm . ∫Nn sin NMm. Umgekehrt würde Mm auf Nn die Strahlenmenge S . Nn . Mm . sin NMm werfen, mithin auf alle Elemente in DFE zusammen die Strahlenmenge = S . Mm . ∫Nn . sin NMm, welche der vorigen gleich ist.

Die Richtigkeit des Satzes läßt sich auch ohne alle Rechnung so übersehen. Jedes Element Ll wirft auf Mm soviel Licht als Mm bey einerley Glanz auf Ll werfen würde. (37. §.) Mithin, müssen alle Elemente Ll zusammen auf Mm soviel Licht werfen, als Mm über alle Elemente Ll zusammen verbreiten würde: Das heißt Mm empfängt von der ganzen Fläche AGB soviel Licht, als umgekehrt Mm der ganzen Fläche AGB zuschicken würde.

43. §.

Jede leuchtende Fläche *AB* wirft auf jede andre Fläche *CD* soviel Licht, als umgekehrt letztere, wenn sie leuchtend und eben so stark glänzend als *AB* wäre, auf *AB* werfen würde. 8 Fig.

Beweis. Auf jedes Element Mm von CD wirft AB soviel Licht, als umgekehrt Mm auf AB werfen würde. (42. §.) Mithin wirft AB auf alle Elemente Mm zusammen soviel Licht als letztere zusammen umgekehrt auf AB werfen würden: d. i. AB wirft auf CD soviel Licht, als umgekehrt CD auf AB werfen würde.

Der Satz im 40 §. ist wahr, man mag ihn von der Erleuchtung, oder von der Strahlenmenge verstehen, welche die eine oder die andre von den leuchtenden Flächen AGB, oder HOK auf M*m* wirft. Denn wofern jede dieser Flächen nach M*m* gleich viel Licht schickt, so ist auch M*m* in beyden Fällen gleich stark erleuchtet, weil die Erleuchtung gefunden wird, wenn man die Strahlenmenge, welche auf M*m* fällt, durch diese unendlich kleine Fläche M*m* dividirt.

In den dreyen letzten Sätzen des 41. 42. 43. §. ist nur von der Menge des Lichts die Rede, so eine Fläche der andern zuschicken würde; keinesweges von der Erleuchtung. Dies ist um deswillen zu erinnern nöthig, weil die Begriffe von dem, was Erleuchtung, und Menge des auffallenden Lichts heist mit einander sehr oft verwechselt werden.

44. §.

7 Fig. Die Halbkugelfläche *BAC* ist leuchtend, alle ihre Elemente haben einen gleich starken Glanz, und sie wirft ihr Licht auf das Element *Ll* welches im Mittelpunct der Halbkugel auf ihrer Axe *LA* senkrecht ist: man sucht die Erleuchtung des Elements *Ll*, welche es von jedem gegebenen Segment *MAN* der Kugelfläche empfängt, das zur Axe *AL* gehört.

Aufl.

Aufl. Wenn MN und mn ein Paar zur Axe AL gehörige Parallelkreise vorstellen, deren Entfernung von einander unendlich klein ist; so liegt zwischen beyden eine Zone MmnN der Kugelfläche, und von allen Puncten dieser Zone fällt das Licht auf Ll unter einerley Einfallswinkel CLM, so wie überall der Ausflußwinkel $= 90°$ ist. Der Flächen-Inhalt des Segments MAN ist dem 621. §. Geom. gemäß $= 2\pi r^2 \sin v\alpha$, wenn ALM $= \alpha$, und der Kugel Halbmesser $= r$ gesetzt wird, also die Fläche der Zone MNnm $= 2\pi r^2 \partial\alpha \sin\alpha$. Ferner sey die Fläche des Elements Ll $= \omega^2$, so ist überdem der Einfallswinkel CLM $= 90° - \alpha$, und man findet die Lichtmenge, welche die Zone MNnm nach Ll schickt, $= 2\omega^2 . S . \pi . d\alpha \sin\alpha \cos\alpha$. (36. §.) Das Integral hievon so genommen, daß es mit $\alpha = o$ verschwindet, ist $= \omega^2 . S . \pi . \sin\alpha^2$, und dasselbe drückt die gesammte Lichtmenge aus, welche das Segment MAN nach Ll schickt. Daraus findet man die Erleuchtung, welche Ll empfängt, $= S . \pi . \sin\alpha^2$.

Wenn also ALM $= \alpha = 90°$ genommen wird, so ist für die völlige Halbkugel die gesuchte Erleuchtung $= \pi S$.

Weil die Fläche des Kreises MN $= \pi r^2 \sin\alpha^2$ ist, und die Erleuchtuug, welche das Segment MAN nach Ll schickt, $= \pi S \sin\alpha^2$ war, so ist selbige der Grundfläche dieses Segments proportional, nicht der Kugelfläche des Segments.

Könnten die Strahlen alle senkrecht auf Ll fallen, so wäre die Erleuchtung, welche jede Zone MmnN dahin schickte, $= 2S\pi d\alpha \sin\alpha$, und die gesammte von dem Segment MAN dahin fallende Erleuchtung

tung wäre $= 2S\pi \sin v\alpha$, mithin wäre sie der Fläche des Segments MAN proportional. Sie ist aber wegen der Schiefe der Einfallswinkel $= \pi S \sin\alpha^2$, und weil man $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2 = 1 - (1 - \sin v\alpha)^2$ $= 2\sin v\alpha - \sin v\alpha^2$ erhält, so ist eben diese Erleuchtung, welche Ll von dem Segment MAN empfängt, $= 2\pi S \sin v\alpha - \pi S \sin v\alpha^2$. Der positive Theil wäre die Erleuchtung, wenn die Schiefe der Einfallswinkel die Erleuchtung nicht schwächte, und die von dieser Ursache herrührende Verminderung ist $= \pi S \sin v\alpha^2$. Dieser negative Theil verschwindet in Vergleichung des positiven, wenn α unendlich klein angenommen wird.

So lange demnach ein solches Segment wie $aA\alpha$ als unendlich klein betrachtet werden kann, so lange ist die Erleuchtung der Fläche desselben proportional.

45. §.

Die Strahlemenge, welche das Segment MAN auf Ll wirft, ist $= \omega^2 . \pi S \sin\alpha^2$, und eben soviel Licht würde das Element Ll, wenn es leuchtend und eben so stark glänzend wäre, über die Fläche des Segments MAN verbreiten. (42. §.) Diese Strahlenmenge ist also ebenfals nicht der Fläche des Kugelsegments MAN, sondern der Grundfläche desselben MON proportional, und diejenige Lichtmenge, welche das Element Ll über die völlige Halbkugelfläche verbreitet, ist $= \omega^2 . \pi . S$.

Wenn alles Licht, das von jedem Punct des Elements Ll kommt sich ungehindert nach allen Seiten ausbreiten könnte, ohne daß wegen der Undurchsichtigkeit des Elements das schief ausge-

hende

hende Licht Abgang litte, so wäre die Strahlenmenge, welche die Zone $MmnN$ auffienge, $=$

$$\frac{\omega^2 . S . MmnN}{r^2} = 2\omega^2 \pi S d\alpha \sin\alpha,$$ und die gesammte Strahlenmenge, welche das Segment MAN auffienge, wäre $= 2\omega^2\pi S \sin v\alpha$, mithin eben so groß, als die Strahlenmenge, die MAN nach Ll schicken würde, wenn die Schiefe der Einfallswinkel das Licht nicht schwächte, so wie es hier die Schiefe der Ausgehungswinkel schwächt: die von Ll ausgehende auf MAN fallende Strahlenmenge wäre der Fläche des Segments MAN proportional, wie auch für sich klar ist. Wie nun die auf MAN würklich fallende Strahlenmenge $= \omega^2\pi S \sin\alpha^2 = \omega^2\pi S\,(2\sin v\alpha - \sin v\alpha^2)$ ist, so zeigt hier der negative Theil die von der Schiefe der Ausflußwinkel herrührende Verminderung der Strahlenmenge an. Wenn diese Ursache das Licht nicht schwächte, so wäre die Lichtmenge, welche Ll über die völlige Halbkugel verbreitete, $= 2\omega^2\pi S$, mithin doppelt so groß, als sie wegen der Schiefe der Ausflußwinkel ist.

46. §.

Die Menge Lichts, welche ein einziger leuchtender Punct L (1 Fig.) um sich her verbreitet, mithin auch diejenige, so er auf einen bestimmten Theil der um denselben beschriebenen Kugelfläche wirft, ist oben im I. und II. Abschnitt als eine endliche Grösse in der Rechnung betrachtet worden; dies war daselbst verstattet, weil die von dem einzigen Punct ausgehende Lichtmenge allein in Betrachtung kam, und die gesammte von einem sol-

 chen

chen Punct ausgehende Lichtmenge nur mit ihren Theilen verglichen ward. Gesetzt, daß es auch in der Natur keine leuchtende Puncte gäbe, worauf man jene Rechnungen anwenden könnte, so ließ sich doch eine kleine Lichtflamme ohne sehr zu fehlen, als ein leuchtender eben so stark glänzender Punct betrachten, als alle in der Lichtflamme zu unterscheidende Puncte zusammen genommen: auch war die Menge Lichts, welche eine solche Flamme nach allen Seiten um sich her verbreitet, und die sie auf jede von ihr erleuchtete Fläche wirft, würklich endlich. Hier wird die Menge Lichts, welche ein Ele-
8 Fig. ment einer leuchtenden Fläche, wie Ll, um sich her verbreitet, als unendlich klein in der Rechnung betrachtet, und zwar dies in Vergleichung mit derjenigen Menge, welche die ganze Fläche, wozu das Element gehört, nach allen Seiten verbreitet: Von dieser zuletzt erwehnten Lichtmenge fällt wiederum auf jedes Element der erleuchteten Fläche nur ein unendlich kleiner Theil. Es sey AB die leuchtende, CD die erleuchtete Fläche, so ist die Lichtmenge, welche jedes Element Mm der Fläche CD von AB empfängt, ein unendlich kleiner Theil von derjenigen, welche die ganze Fläche CD von AB empfängt. Wiederum ist diejenige Lichtmenge, welche Mm von einem Element Ll der Fläche AB empfängt, ein unendlich kleiner Theil von derjenigen Lichtmenge, welche die ganze Fläche AB auf das Element Mm wirft. Wenn M die gesammte Lichtmenge ist, welche AB auf CD wirft, so ist dM diejenige Menge, welche Mm von AB empfängt, und $\frac{dM}{Mm}$ die Erleuchtung des

Ele-

Elements Mm, welche von AB herrührt. Damit diese endlich sey, müssen dM und Mm unendlich kleine Grössen seyn, die zu einerley Ordnung gehören. Man setze also $\frac{dM}{Mm} = I$, so ist I die Erleuchtung des Elements Mm, und $dM = I . Mm$. Ob nun gleich diese Lichtmenge in Vergleichung mit derjenigen, welche AB auf CD wirft, unendlich klein ist; so ist doch in Vergleichung mit jener wiederum diejenige unendlich klein, welche ein Element Ll der Fläche AB auf Mm wirft. Wird also L statt $I . Mm$, oder statt dM geschrieben, so wirft Ll auf Mm die Lichtmenge $dL = dI . Mm$, und die Erleuchtung welche Mm von Ll empfängt, ist

$$\frac{dL}{Mm} = dI, \text{ woraus } I = \int \frac{dL}{Mm} \text{ gefunden}$$

wird. So begreift man, wie die Erleuchtung, welche Mm von AB empfängt, als die Summe der Erleuchtungen betrachtet werden kann, welche alle Elemente der Fläche AB nach Mm schicken, wie also I durch die Integralrechung gefunden werden könne, wenn $dI = \frac{dL}{Mm}$ bekannt ist. Aus I wird alsdenn ferner die Strahlenmenge $M = \int I . Mm$ gefunden.

47. §.

Ob nun gleich dieser Vorstellung gemäß die Lichtmenge, welche ein Element einer leuchtenden Fläche um sich her verbreitet, als unendlich klein in der Rechnung zu betrachten ist; so ist doch das, was bisher der Glanz des Elements genannt, und in den Formuln mit S bezeichnet ist, als eine endliche Grösse in der Rechnung zu betrachten. Eigentlich hat es damit folgende Bewandniß. Man stellt sich vor, daß von jedem Punct L des Elements Ll nach allen Seiten Strahlen ausgehen, und zwar so, daß für jeden Punct diese nach allen Seiten ausgehende Strahlenmenge einerley ist, weil wenigstens für einerley Element alle dazu gehörige Puncte als gleich stark glänzend angenommen werden, gesetzt daß auch verschiedene Elemente der ganzen leuchtenden Fläche nicht einerley Glanz hätten. Ist diese von jedem Punct ausgehende Strahlenmenge doppelt so groß, so ist das Element doppelt so stark glänzend, und überhaupt verhält sich der Glanz des Elements wie die von jedem Punct des Elements ausgehende Strahlenmenge. Ob nun gleich wegen der Schiefe der Ausflußwinkel das Element nur halb soviel Licht in dem Raum einer Halbkugel verbreiten kann, als geschehen würde, wenn das Element vollkommen durchsichtig wäre, und jeder Punct sein Licht nach allen Seiten frey und gleichförmig verbreiten könnte; so ist doch beym doppelten Glanz diese durch den Raum einer Halbkugel verbreitete Lichtmenge, der Schiefe der Ausflußwinkel ungeachtet, doppelt so groß, und beym n fachen Glanz n mahl so groß, als beym einfachen Glanz. Sind zwey gleich grosse Elemente ungleich stark glänzend, und verhält sich der Glanz des ersten zum Glanz des zweyten, wie $m : n$, so ist der Glanz des ersten $= \frac{m}{n}$, wenn der Glanz des letztern $= 1$ angenomnommen wird. Setzt man alsdenn $\frac{m}{n} = S$, so ist S eine Zahl, keine Linie oder Fläche. Es ist nemlich S der Exponent des Verhältnisses der Strahlenmenge, welche das erste Element in den Raum einer Halbkugel verbreiten würde, zur Strahlenmenge, welche das zweyte Element in einen gleichen Raum ausbreitet. Wenn also gleich die Strahlenmenge, welche ein solches Element durch den Raum einer Halbkugel ausbreitet, hier als unendlich klein in der Rechnung vorkommt; so kann doch das Verhältniß der Strahlenmengen, welche zwey gleich grosse Elemente auf diese Art ausbreiten, jedes endliche seyn, und dasselbe ist mit dem Verhältniß des Glanzes beyder Elemente einerley. Diesemnach behält der Buchstab S in den Formuln, woraus die Rechnung geführt werden muß, wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet, eine völlig übereinstimmige Bedeutung mit derjenigen, die er oben im 10 §. hatte, woselbst das Licht nur betrachtet ward, in wiefern es von einem leuchtenden Punct ausgehet.

48. §.

Es sey demnach AB eine leuchtende Fläche, die ihr Licht auf die Fläche RS wirft, ferner sey M*m* ein Element der erleuchteten Fläche RS, dessen Stelle in der Fläche als bekannt angenommen wird; so kann man zuerst fragen: 6 Fig.

Wie groß die Erleuchtung sey, welche jedes Element wie *Mm* von der leuchtenden Fläche *AB* empfängt?

Hiernächst aber auch:

Wie groß die gesammte Menge Licht sey welche die leuchtende Fläche *AB* der Fläche *RS* zuschickt?

Um die erste Aufgabe aufzulösen, betrachte man ein Element L*l* der leuchtenden Fläche AB, und setze die Erleuchtung, welche M*m* von L*l* empfängt, $= dI$, den Ausflußwinkel *l*LM $= \eta$, den Einfallswinkel LM*m* $= \vartheta$, so ist $dI = \frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\vartheta}{ML^2}$. Mit dem Halbmesser MD $= 1$ sey eine Kugelfläche um M beschrieben, und DFE sey das Stück von ihr, welches zwischen den Gränzen der Strahlen-Pyramide AMB enthalten ist, welche die Fläche AB auf M wirft, N*n* aber das Stück eben der Kugelfläche, was zwischen den Gränzen der Strahlenpyramide enthalten ist, die aus L*l* auf M fällt; so ist $Nn = \frac{Ll \,.\, \sin\eta}{ML^2}$ die scheinbare Grösse des Elements L*l*. Wenn also $Nn = d\mu$ gesetzt wird, so ist $dI = S \,.\, d\mu \sin\vartheta$, und weil $d\mu$ als ein Element einer Kugelfläche, deren Halbmesser $= 1$ ist, kein Element einer Linie oder Fläche, sondern einer Zahl ist, (wie denn auch der Ausdruck $\frac{Ll \,.\, \sin\eta}{ML^2}$ eine Zahl ist, weil L*l* und ML² Flächen sind,) so wird auch das Integral $I = \int S d\mu \sin\vartheta$ eine Zahl, welche die Erleuchtung ausdrückt, die M*m* von einem unbestimmten Theil der Fläche AB empfängt, welches man sodann leicht für die ganze Fläche ausdehnt. **Hiebey ist noch zu bemerken, daß *S* bey der Rech-**

nung als veränderlich zu betrachten wäre, wenn nicht alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz hätten, sondern ihr Glanz sich nach einem bekannten Gesetz änderte, und von der Stelle eines jeden Elements in der Fläche abhienge. Wofern aber alle Elemente einerley Glanz haben, so ist $I = S\int d\mu \sin\vartheta$.

Ist I gefunden, so läßt sich auch die zweyte vorhin erwehnte Aufgabe vermittelst der Integralrechnung auflösen. Man setze nemlich das Element Mm der erleuchteten Fläche $= dz$, so ist die auf Mm fallende Strahlenmenge $= Idz$. Diese sey $= dM$, so hat man $dM = Idz$, oder $dM = dz\int S d\mu \sin\vartheta$, woraus durch die Integration $M = \int Idz$ gefunden wird, und das ist die Strahlenmenge, welche AB auf einen unbestimmten Theil der Fläche RS wirft, die man nach der Integration auf die ganze Fläche ausdehnt.

Es sind demnach die beyden Gleichungen $dI = S d\mu \sin\vartheta$, und $dM = Idz$, oder $dM = dz\int S d\mu \sin\vartheta$ als die Fundamentalgleichungen der ganzen Photometrie zu betrachten, und es kommt bey Auflösung photometrischer Aufgaben nur auf eine geschickte Anwendung dieser Gleichungen an, wozu das folgende eine allgemeine Anleitung geben wird.

49. §.

Ein leuchtender Körper der sein Licht auf ein solches Element, wie Mm wirft, mag eine Gestalt haben, welche er wolle, so kann man doch allemahl M als die Spitze eines Pyramiden- oder Kegelförmigen Körpers betrachten, dessen Seitenflächen, oder in M zusammenlaufende Seitenlinien, 6 Fig.

den

den leuchtenden Körper um und um berühren: in dem innern Raum dieses nach M zu gespitzten Körpers wird alles Licht enthalten seyn, was der leuchtende Körper nach M schickt; so wie zwischen den ihn umgebenden in M zusammenlaufenden Gränzen das Stück der Oberfläche des leuchtenden Körpers enthalten ist, welches allein, mit Ausschliessung des übrigen von M abgewandten Theils Licht nach M schicken kann. Statt dieser das Element M*m* erleuchtenden Fläche läßt sich allemahl eine andre zwischen den Gränzen desselben zugespitzten Raums enthaltene Fläche annehmen, die bey einerley Glanz mit AB das Element M*m* eben so stark erleuchten würde: (40. §.) und da würde man wohl am natürlichsten eine solche Fläche zu wählen suchen, worauf sich die Rechnung am leichtesten anwenden liesse, wenn auch nicht die Gleichung $dI = Sd\mu \sin\vartheta$ schon von selbst darauf leitete, eine Kugelfläche *DFE* anzunehmen, deren Mittelpunct in *Mm* liegt, und deren Halbmesser = 1 ist.

Wenn nun gleich nicht alle Elemente der Fläche AGB einerley Glanz hätten; so wird doch zwischen den Gränzen der von jedem Element L*l* auf M*m* fallenden Strahlenpyramide ein Element N*n* der Kugelfläche DFE enthalten seyn, welches M*m* eben so stark als L*l* erleuchtet, wenn man voraussetzt, daß N*n* und L*l* einen gleichen Glanz haben. (39 §.) Mithin wird auch die gesammte Erleuchtung, welche M*m* von AGB empfängt, eben so groß seyn, als diejenige, welche M*m* von DFE empfangen würde. Uebrigens wird die Gestalt und Grösse dieses Kugelstücks DFE von der Gestalt und Grösse

der

der körperlichen Ecke oder der conischen Spitze um M abhängen, so wie die Gestalt und Grösse der letztern von der Gestalt und Grösse der Gränze desjenigen Theils der leuchtenden Fläche abhängt, der nach M Lichtstrahlen werfen kann.

Wofern die Fläche, welche die Ecke oder Spitze an M umgiebt, eine grade Apollonianische Kegelfläche ist, wie sie allemahl seyn wird, wenn die scheinbare aus M*m* gesehene äussere Gränze der leuchtenden Fläche AB Kreisförmig, und die Ebene dieses Kreises auf der graden Linie durch ihren Mittelpunct und M senkrecht ist; so ist auch das Kugelstück DFE von einem Kreise eingeschlossen, und es ist selbst ein Segment der Kugel. Wenn aber die Spitze M eine von ebenen Flächen eingeschlossene körperliche Ecke ist, wie sie seyn wird, wenn die äussere Gränze der leuchtenden Fläche AB eine ebene gradlinichte Figur ist; so ist das Kugelstück DFE von sovielen Bogen grosser Kugelkreise eingeschlossen, als AB grade Seitenlinien hat; und die auf M fallenden Strahlen sind in dem Raum einer eigentlichen Pyramide enthalten. Es kann ausser diesen beyden jetzt erwehnten sehr viele andre verschiedene Fälle geben, indessen werden diese eben angeführten Fälle im folgenden vornemlich vorkommen.

50. §.

Die äussere Gränze der leuchtenden Fläche, welche ihr Licht auf M*m* wirft, sey also Kreisförmig, und die Fläche, welche die auffallenden Strahlen umschließt, eine grade Apollonianische Kegelfläche; so ist das eben so stark als AB erleuchtende

Kugel-

Kugelstück DFE ein Segment, dessen Umfang so lange ein kleinerer Kreis der Kugel bleibt, als das Segment selbst kleiner ist als eine Halbkugel. Die Axe dieses Segments wird durch M gehen, weil der dazu gehörige Mittelpunct in M angenommen wird, auch geht eben diese Axe durch den Mittelpunct C der Kreisförmigen Grundfläche des Segments, worauf sie zugleich senkrecht ist. Uebrigens aber kann das Element Mm gegen die auffallenden Strahlen sehr viele verschiedene Lagen haben; und in keiner angenommenen Lage desselben, sie sey welche sie wolle, können alle Strahlen unter einerley Winkel auffallen.

1) Die erste merkwürdige Lage eines solchen ebenen Elements, welche hier zu betrachten vorkommt, ist diejenige, wenn dasselbe auf der Axe MF des Kugel-Segments DE senkrecht ist: wie denn überhaupt die Lage aller auffallenden Strahlen gegen Mm bestimmet ist, wenn die Lage der Axe MF gegen Mm bestimmt ist. Bey der angenommenen senkrechten Lage der Axe MF gegen Mm hat man den Vortheil, daß alle Strahlen, welche von Puncten des Segments kommen, die in einerley zur Axe MF gehörigen Parallelkreise liegen, unter einerley Winkel auf Mm fallen. Man kann sich übrigens das Segment durch dergleichen Parallelkreise, deren Abstand von einander unendlich klein ist, in Zonen eingetheilt vorstellen, so fallen alle Strahlen, die von einerley Zone ausgehen, unter einerley Winkel auf M, und man wendet die Fundamentalgleichung $dl = S d\mu \sin\vartheta$ (48 §.) leicht an, weil durch $d\mu$ die Fläche einer solchen unendlich kleinen Zone verstanden werden kann; da dann ϑ

den

den Abstand dieser Zone von ihrem nächsten Pol zu 90° ergänzt. Wie nun in diesem Fall die Erleuchtung des Elements in $M\mu$ gefunden werde, weis man schon aus dem 44 §. woselbst $d\mu = 2\pi d\alpha \sin\alpha$ war, ($r = 1$ gesetzt) und $\vartheta = 90° \alpha$. Von der übrigen daselbst gegebenen Auflösung sollen bald fernere Anwendungen gemacht werden, und ich bemerke nur noch, daß man diejenige Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene von einer Kreisförmig scheinenden leuchtenden Fläche empfängt, wenn der Strahlenkegel grade, und seine Axe auf dem erleuchteten Element senkrecht ist, die **senkrechte Erleuchtung** Kreisförmig scheinender leuchtender Flächen nennen könne.

Hieher gehört demnach allemahl der Fall, wenn die leuchtende Fläche ein Kreis ist, und eine vom Mittelpunct des Kreises auf seiner Fläche senkrecht ausgehende grade Linie das erleuchtete Element Mm senkrecht trift; so wie auch der Fall, wenn die Axe einer leuchtenden Kugel das erleuchtete Element Mm senkrecht trift. Allemahl ist diese senkrechte Erleuchtung $= \pi \,.\, S \,.\, \sin\alpha^2$ (44 §.), wenn α den scheinbaren Halbmesser der Kreisförmig scheinenden leuchtenden Fläche bezeichnet: und die auf das Element fallende Lichtmenge $= Mm \,.\, \pi S \sin\alpha^2$.

2) Wird die Lage der unendlich kleinen Ebene Mm gegen die Axe des auffallenden Strahlenkegels schief angenommen; so ist nicht für jede zwischen zweyen zu dieser Axe gehörigen Parallelkreisen liegende unendlich kleine Zone der Einfallswinkel durchgängig einerley: alsdenn muß die von jeder einzelnen Zone herrührende Erleuchtung zuförderst

derst besonders gesucht werden, indem man sich diese Zone abermahl in unendlich kleine Elemente eingetheilt vorstellt, da dann für jedes einzelne Element, die Erleuchtung vermittelst der Gleichung $dI = S . d\mu \sin\vartheta$ gefunden wird. Die Summe dieser Erleuchtungen giebt die von der Zone herrührende Erleuchtung, und wenn man hiernächst aufs neue die Erleuchtungen aller Zonen summirt, so giebt sich die ganze gesuchte Erleuchtung.

51. §.

Diese Betrachtung dient zugleich zur allgemeinen Anleitung, um daraus abzunehmen, wie man in andern Fällen verfahren muß, wenn der auffallende Strahlenkegel kein grader Kegel, oder auch wohl der Umfang der leuchtenden Fläche, die ihre Strahlen nach M wirft, gar nicht Kreisförmig ist. Allemahl kann man sich eine gerade Linie, wie MG durch die Mitte, oder sonst einen bekannten Punct innerhalb der leuchtenden Fläche vorstellen, und sie als die Axe der auffallenden Strahlen-Pyramide betrachten. Eine Ebene durch diese Axe gelegt schneidet die Pyramidenfläche und giebt an M einen Winkel, der als der scheinbare Durchmesser der leuchtenden Fläche in der schneidenden Ebene genommen anzusehen wäre, wenn das Auge in M stünde: und dasjenige Stück einer mit dem Halbmesser = 1 aus dem Mittelpunct M beschriebenen Kugelfläche, was innerhalb den Gränzen des pyramidenförmigen oder conischen Raums liegt, den die von den äussern scheinbaren Gränzen der leuchtenden Fläche auf M fallenden Strahlen umschliessen, ist das **Maaß der scheinbaren**

Grösse

Grösse oder Ausdehnung des leuchtenden Körpers vorausgesetzt, daß in M das Auge stünde. (32. §.) Diese Kugelfläche, welche das Maaß der scheinbaren Grösse der leuchtenden Fläche abgiebt, betrachtet man in allen Fällen statt der leuchtenden Fläche selbst: man nimmt ihre Elemente so stark glänzend an, als die Elemente der leuchtenden Fläche selbst, deren scheinbare Grösse jene Elemente der Kugelfläche vorstellen. Auf leztere wendet man die Formul $dI = S \,.\, d\mu \sin\vartheta$ an, und alsdenn hängt alles übrige von einer geschickten Integration dieser Formul ab.

52. §.

Das Maaß der scheinbaren Grösse des leuchtenden Körpers ist gewöhnlich keine völlige Halbkugel: indessen kann man sich drey Fälle vorstellen, in welchen es eine völlige Halbkugel werden müste. Der erste ist der, wenn die leuchtende Fläche die unendlich kleine Ebene M*m* würklich von allen Seiten umgiebt, so wie das scheinbare Himmelsgewölbe nach allen Seiten über dem Horizont ausgebreitet ist; der zweyte Fall wäre der, wenn die leuchtende Fläche eben, mit M*m* parallel und nach allen Seiten unendlich weit ausgebreitet, die Ebene M*m* aber nur um einen endlichen Abstand davon entfernt wäre: der dritte Fall aber, wenn die erleuchtete Ebene M*m* noch mit der leuchtenden Fläche parallel, aber um einen unendlich kleinen Abstand von ihr entfernt wäre, und sie unmittelbar berührte. In allen dieyen Fällen empfängt M*m* die möglichst gröste Erleuchtung, die ihr einerley leuchtender Körper bey einerley Glanz mittheilen kann: und diese soll hinführo die absolute Erleuchtung heissen. Ohne schon das Gesetz zu kennen, nach welchem die Erleuchtung von der scheinbaren Grösse der leuchtenden Fläche abhängt, ist soviel aus dem bisherigen klar, daß selbige mit der scheinbaren Grösse wachsen müsse, und so wird es keinen Zweifel leiden, daß nicht in den beyden zuerst erwehnten Fällen die Erleuchtung bey einerley Glanz der leuchtenden Fläche die möglichst gröste sey. Was den dritten Fall betrift, so könnte es zweifelhaft scheinen, weil eine unendlich kleine Ebene, wenn sie die leuchtende Fläche berührt, nur von demjenigen Element, welches sie berührte, Strahlen auffangen würde, von den übrigen aber gar keine, und so schiene es, als wenn die Erleuchtung nur unendlich klein seyn könnte. (46 §.) Allein dies würde nur seine Richtigkeit haben, wenn das erleuchtete Element in endlicher Entfernung die Strahlen von einem leuchtenden Element allein auffienge. Eigentlich ist die Erleuchtung, welche

Ll nach Mm schickt $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\vartheta}{ML^2}$ und

wegen der parallelen Lage beyder Elemente wären η und $\vartheta = 90°$. Zugleich würde wegen der unmittelbaren Berührung ML unendlich klein, und weil auch Ll eine unendlich kleine Fläche ist, so würde

$\frac{S \,.\, Ll}{ML^2}$ eine endliche Grösse seyn. Bey diesen Schlüssen muß man übrigens noch voraussetzen, daß alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz haben, weil sonst nicht für jedes Element Ll, wenn man auch alle gleich groß annähme, diese absolute Erleuchtung einerley wäre.

§. 53.

53. §.

Die Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene empfängt, wenn die leuchtende Fläche in allen Elementen einerley Glanz hat, und ihre scheinbare Grösse eine völlige Halbkugel wird, ist im 44 §. $= \pi . S$ gefunden: Demnach giebt dieser Ausdruck allemahl die absolute Erleuchtung, mithin auch diejenige, welche das erleuchtete Element empfangen würde, wenn es den leuchtenden Körper unmittelbahr berührte. Mit dieser absoluten Erleuchtung läßt sich jede andre von demselben leuchtenden Körper herrührende Erleuchtung vergleichen, die derselbe der erleuchteten unendlich kleinen Ebene in jeder angenommenen Lage und Entfernung zuschicken würde. Wird die Rechnung auf eine leuchtende Fläche angewendet, deren Glanz man $= 1$ gesetzt hat, so ist ihre absolute Erleuchtung $= \pi$, und mit dieser absoluten Erleuchtung einer Fläche, deren Glanz $= 1$ ist, läßt sich auch jede andre Erleuchtung vergleichen, die von einer Fläche kommt, deren Glanz $= S$ ist. Die allgemeine Formul für die Erleuchtung war $I = \int S d\mu \sin\vartheta$, (48. §.) wenn also die absolute Erleuchtung einer Fläche, deren Glanz $= 1$ angenommen ist, $= y$ gesetzt wird, so ist $I : y = \int S d\mu \sin\vartheta : \pi$; und wenn man auch $y = 1$ annehmen will, so ist $I =$

$$\frac{1}{\pi} \int S d\mu \sin\vartheta.$$

Man hat es häufig als eine Haupt-Schwürigkeit angesehen, weswegen keine vollständige Theorie von Ausmessung der Stärke des Lichts zu hoffen sey, daß es hier an einem Maaß fehle, womit sich die Stärke des Lichts ausmessen lasse: allein Herr Bouguer erinnert gleich anfangs in seinem Traité d' Optique sur la gradation de la lumiere ganz richtig, daß es mit dieser anscheinenden Schwürigkeit nicht mehr zu sagen habe, als bey allen andern Ausmessungen, selbst in der Geometrie, wo allemahl das Maaß als gegeben betrachtet wird, und die Grösse einer Linie, einer Fläche, eines körperlichen Raums nur dadurch bestimmt werden kann, daß man das Verhältniß einer solchen Grösse gegen das als bekannt angenommene Maaß zu bestimmen sucht. Wir sind eben so wenig im Stande zu sagen, wie groß eigentlich eine Ruthe, ein Fuß sey? als wir im Stande sind, schlechthin zu sagen, wie groß diese oder jene Erleuchtung sey, ohne sie mit einer andern zu vergleichen, die wir als bekannt annehmen, so wie die Länge einer Ruthe eines Fusses als bekannt angenommen wird. Jede mathematische Wissenschaft sucht nur die Gesetze auf, nach welchen sich Grössen unter einander vergleichen lassen; und wie es allemahl willkührlich ist, welche Grösse man = 1 setzen, oder als das Maaß annehmen will, um alle übrige von eben der Art damit zu vergleichen; so ist es auch in der Photometrie willkührlich, welche Erleuchtung, und welche Strahlenmenge, man = 1 annehmen will. Soll die absolute Erleuchtung, einer leuchtenden Fläche, deren Glanz als bekannt anzusehen ist, und eben deswegen = 1 gesetzt werden kann, für das Maaß, oder diejenige Einheit, angenommen werden, womit man alle übrige Erleuchtungen vergleichen will; so ist die absolute Erleuchtung jeder andern leuchtenden Fläche

che

che $= S$, wie denn auch für sich schon klar ist, daß die absolute Erleuchtung zweyer Flächen von verschiedenen Glanz eben diesem Glanz derselben proportional seyn muß. Bey eben der Voraussetzung wäre nun auch diejenige Strahlenmenge $= 1$, die eine Fläche, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ gesetzt ist, auffangen würde, wenn ihre Erleuchtung in allen Elementen eben so groß wäre, als die absolute Erleuchtnng derjenigen Fläche, deren Glanz $= 1$ gesetzt ist.

Wird eine unendlich kleine Ebene von einer Kreisförmig scheinenden in allen Elementen gleich stark glänzenden Fläche senkrecht erleuchtet, so ist die Erleuchtung $I = \pi S \sin\alpha^2$, wenn α den scheinbaren Halbmesser der leuchtenden Fläche bezeichnet. Wird also ihr Glanz $S = 1$ angenommen, so erhält man $I = 1$, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist. Es ist aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861837\,9$ (470 §. Geom.) also $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5641895$, und zu diesem Sinus gehört ein Winkel von $34^\circ, 20\frac{3}{4}'$. Zugleich wird die absolute Erleuchtung einer solchen Fläche $= \pi$, so wie die absolute Erleuchtung einer jeden andern in allen Elementen gleich stark glänzenden Fläche, deren Glanz $= S$ ist, $= \pi S$. Behält man also die Fundamental-Formuln, so wie sie im 48 §. gefunden sind, ungeändert bey; so ist diejenige Erleuchtung $= 1$, welche eine Kreisförmig scheinende überal gleich stark glänzende Fläche einer unendlich kleinen Ebene senkrecht zuschickt,

 wenn

wenn ihr scheinbarer Halbmesser aus der erleuchteten Ebene gesehen $34° \, 20\frac{3}{4}'$ groß ist, oder wenn das Quadrat vom Sinus ihres scheinbaren Halbmessers sich zum Quadrat des ganzen Sinus verhält, wie der Durchmesser eines Kreises zu seiner Peripherie. Fällt alsdenn auf alle Elemente einer Ebene, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ ist, eine eben so grosse Erleuchtung, so ist die auffallende Strahlenmenge $= 1$.

Wenn übrigens von zwoen leuchtenden Flächen jede für sich überall gleich stark glänzt, wenn ferner die scheinbare Gestalt und Grösse beyder Flächen einerley, und die Lage des erleuchteten Elements gegen den auffallenden Strahlenkegel oder die auffallende Strahlen-Pyramide einerley ist; so ist für beyde Flächen $\int d\mu \sin\vartheta$ einerley, und $I = S \int d\mu \sin\vartheta$ verhält sich wie S, oder die Erleuchtung ist dem Glanz der leuchtenden Flächen proportional.

54. §.

Bey dem bisherigen Vortrage der Gründe der Photometrie bin ich vornemlich dem Herrn Lambert gefolget, so wie ich zugleich bemühet gewesen bin, die hieher gehörigen Grundbegriffe möglichst aufzuklären, und zugleich H. Lamberts Vortrag mehr zu erläutern, der soviel ich weis, den ersten eigentlichen Lehrbegrif dieser Wissenschaft unter dem Titel: Photometria, sive de mensura et gradibus luminis colorum et umbræ. Aug. Vindel. 1760 geliefert hat. Was H. Bouguer davon zuerst im Jahr 1729 in seinem Essay d' Optique sur la Gradation de la lumiere vorgetragen, und nachher in dem grössern Werk: Traité d' Optique sur la gradation de la lumiere, das vom H. de la Caille nach des Verfassers Tode im Jahr 1760 zum Druck befördert worden, weiter ausgeführt hat, bestehet theils in einer schätzbaren Sammlung wohl gewählter Versuche zur nähern Entwickelung der Gründe dieser Wissenschaft, theils in besondern Untersuchungen über die Gesetze, nach welchen das Licht geschwächt wird, wenn es von dunklen polirten oder auch unpolirten Flächen zurück strahlet, oder wenn es durch durchsichtige Massen dringt. Die Form einer allgemeinen systematischen Theorie von der Erleuchtung und was davon abhängt, hat H. Bouguer der Wissenschaft noch nicht gegeben: vor H. Lambert ist H. Euler der letztern am nächsten gekommen, von dessen hieher gehörigen Aufsätzen, wie auch von demjenigen, was sich bey andern Schriftstellern hieher gehöriges findet, ich unten weitere Nachricht geben werde.

Der IV. Abschnitt.

Theorie der Erleuchtung ebener Flächen von leuchtenden Kugeln.

55. §.

Wenn die unendlich kleine Ebene M*m* von einer Kugel HOKP erleuchtet wird, so sind alle auf M fallende Strahlen in dem Raum eines gra- 6 Fig.

den Apollonianischen Kegels enthalten, und das Kugelstück DFE, welches die Ebene Mm eben so stark als die Kugel selbst erleuchten würde, ist ein Segment, dessen Axe mit der Axe des auffallenden Strahlenkegels zusammen fällt. Schneidet man nun die in M zusammengehende conische Spitze mit einer Ebene durch ihre Axe, so ist der Winkel DME, welchen dieser Schnitt giebt, der scheinbare Durchmesser der leuchtenden Kugel aus Mm gesehen, und CMD = CME der scheinbare Halbmesser.

Wird nun CMD = CME = α gesetzt, und angenommen, daß die Axe des auffallenden Strahlenkegels die unendliche kleine Ebene Mm senkrecht treffe, so weis man schon aus dem 50 §. n. 1. daß die senkrechte Erleuchtung der unendlich kleinen Ebene Mm = $\pi S \sin\alpha^2$ sey, vorausgesetzt, daß alle Elemente der Kugel gleich stark glänzen. Setzt man diese Erleuchtung = I, und nimmt zugleich den Glanz der Kugel = 1 an, so ist $I = \pi \sin\alpha^2$, und man weis schon aus dem 53 §. daß diese Erleuchtung = 1 sey, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, oder $\alpha = 34° \; 20\frac{3}{4}'$ ist. Nun sey a die Entfernung des erleuchteten Elements von der Kugel Mittelpunct, und der letztern Halbmesser = r, so ist $\sin\alpha = \frac{r}{a}$, und die Erleuchtung = 1, wenn $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\pi}$ ist. Diesemnach läßt sich jede Erleuchtung mit derjenigen senkrechten Erleuchtung vergleichen, welche eine überal gleich stark glänzende

Kugel

Kugel einer unendlich kleinen Ebene zuschickt, wenn das Quadrat der Entfernung ihres Mittelpuncts von der erleuchteten Ebene sich zum Quadrat ihres Halbmessers verhält, wie die Peripherie eines Kreises zum Durchmesser, oder wie die Fläche eines Kreises zum Quadrat seines Halbmessers. Fiele also auf alle Elemente einer Fläche, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ gesetzt ist, eine eben so grosse Erleuchtung, so wäre die auffallende Strahlenmenge $= 1$.

Ueberhaupt aber ist die von einer überal gleich stark glänzenden Kugel kommende senkrechte Erleuchtung $I = \pi . S . \sin\alpha^2$, mithin ist sie dem Quadrat vom Sinus des scheinbaren Halbmessers der leuchtenden Kugel, aus der erleuchteten unendlich kleinen Ebene gesehen proportional. Weil der Halbmesser der Kugelfläche, welche das Maaß der scheinbaren Grösse abgiebt, $= 1$ angenommen ist, so ist die Fläche ihres grösten Kreises $= \pi . 1^2$, und die Fläche desjenigen Parallelkreises, welcher das der erleuchtenden Fläche gleichgültige Segment begränzt, $= \pi \sin\alpha^2$. Wird nun in der gefundenen Formul $I = \pi S \sin\alpha^2$ der scheinbare Halbmesser $\alpha = 90°$ angenommen, so hat man $I = \pi . S$, und das ist die absolute Erleuchtung der Kugel, (52. §.) diese verhält sich also zu jeder andern von eben der Kugel herrührenden senkrechten Erleuchtung, wie der gröste Kreis einer Kugel zur Fläche eines Parallelkreises, der von seinem Pol um das Maas des scheinbaren Halbmessers der leuchtenden Kugel entfernt ist, allemahl das Auge in der unendlich kleinen Ebene

 selbst

selbst angenommen, welche die Erleuchtung auffangen soll. Eben das angezeigte Verhältniß ist auch einerley mit dem Verhältniß vom Quadrat des ganzen Sinus zum Quadrat vom Sinus des scheinbaren Halbmessers der leuchtenden Kugel.

Wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne in ihrer mittlern Entfernung 16′ 7″ groß annimmt, so ist für die Sonne $\sin\alpha = 0,0046881$, und $\sin\alpha^2 = 0,0000220$, mithin die absolute Erleuchtung der Sonne $\frac{10000000^2}{220000000}$, oder 45454 mahl grösser als diejenige Erleuchtung, welche sie einer solchen Stelle auf der Erdfläche zuschickt, in deren Scheitellinie sie stehet.

Das Maaß der ganzen Ausdehnung des scheinbaren Himmelsgewölbes in dem Verstande des 51 §. ist eine Halbkugel: wenn also der ganze nach allen Seiten ausgebreitete Himmel durchgängig so stark glänzte, als die Sonne glänzt, so würde jede Stelle der Erdfläche eben so stark erleuchtet werden, als wenn sie sich in der Oberfläche der Sonne selbst befände. Dieser Satz ist eine richtige Folge aus dem bisherigen: nur wäre die fernere Folge unrichtig, wenn man daraus schliessen wollte, daß die absolute Erleuchtung der Sonne sich zu derjenigen Erleuchtung, die sie einer Stelle auf der Erdfläche, in deren Scheitel sie steht, zuschickt, verhalte, wie die Fläche der ganzen Halbkugel zur Fläche des Segments, welches der scheinbare Sonnenteller fasset. Es verhält sich vielmehr jene Erleuchtung zu dieser wie die Fläche des grösten Kugelkreises zur Grundfläche des Segments, welches

ches mit dem Sonnenteller einerley scheinbare Grösse hat. Weil dies Segment in Vergleichung mit der Halbkugel sehr klein ist, so ist jenes zuerst erwehnte Verhältniß beynahe nochmahl so groß, als das lezte richtige Verhältniß.

56. §.

Von der Aufgabe: **die senkrechte Erleuchtung zu finden, welche eine überal gleich stark glänzende Kugel auf eine unendlich kleine Ebene wirft**, hat Herr L. **Euler** in einer Abhandlung: Reflexions sur les divers degrés de lumiere du soleil et des autres corps celestes, (Histoire de l' Academie de Berlin A. 1750. Tom. VI. p. 280. sqq.) eine Auflösung gegeben, vermöge welcher sich die gesuchte Erleuchtung ebenfals wie $\sin\alpha^2$ verhält: er findet aber $I = 2\pi S \sin\alpha^2$, statt dessen, daß hier $I = \pi S \sin\alpha^2$, mithin nur die Hälfte des Eulerischen Resultats gefunden ist. Der Unterscheid rührt daher, weil H. **Euler** die Verminderung der Erleuchtung, die vermöge des 34. §. von der Schiefe des Ausgehungswinkels herrührt, nicht in Rechnung gebracht, sondern vorausgesetzt hat, die Erleuchtung sey bey jeder Schiefe des Ausgehungswinkels einerley. Verbindet man aber jene Regel des 34. §. mit H. Eulers Rechnung, so kommt man auf eben das Resultat, was hier im 55. §. ist gefunden worden. Es wird der Mühe werth seyn, dies umständlicher ins Licht zu setzen, um zugleich einen Begrif davon zu geben, wie H. **Euler** bey Auflösung dieser Aufgabe zu Werk gehet.

9 Fig. Es sey AEBF die leuchtende Kugel, ihr Halbmesser AC = a, Oo die unendlich kleine Ebene, worauf die Erleuchtung senkrecht fällt, ihr Abstand vom Mittelpunct der leuchtenden Kugel OC = c, FAE das erleuchtende Segment, dessen Axe mit OC zusammen fällt, der leuchtenden Kugel scheinbarer Halbmesser COE = COF = ϑ, so ist OCE = OCF = $90° - \vartheta$. Ferner sey MmnN eine unendlich kleine Zone zwischen zweenen zur Axe OC gehörigen Parallelkreisen, deren Abstand vom Pol ACM = ϕ ist, so ist ihre Fläche = $2\pi aad\phi \sin\phi$, und OM = $\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac\cos\phi)}$. Ferner ist oOM = OMP der Einfallswinkel, sein

$$\text{Sinus} = \frac{\text{OP}}{\text{OM}} = \frac{c - a\cos\phi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\phi)}},$$

$$\text{sein Cosinus} = \frac{\text{PM}}{\text{OM}} =$$

$$\frac{a\sin\phi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\phi)}}.$$ Wofern nun die Erleuchtung nur der Fläche der Zone MmnN, dem Sinus des Einfallswinkels, und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, ohne daß die Schiefe des Ausgehungswinkels OMT in Betrachtung kommen darf, so ist die Erleuchtung, welche jede unendlich kleine Zone nach Oo schickt =

$$\frac{2 \,.\, S \,.\, \pi aad\phi\sin\phi}{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\phi} \times \frac{c - a\cos\phi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\phi)}}$$

$$= \frac{2S \,.\, \pi aa\,(c - a\cos\phi)\, d\phi \sin\phi}{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\phi)^{\frac{3}{2}}},$$ oder wenn man $\cos\phi = u$, mithin $du = - d\phi\sin\phi$ setzt, so wird diese

Erleuch-

Erleuchtung $= - \dfrac{2S\pi aa\,(c - au)\,du}{(a^2 + c^2 - 2cau)^{\frac{3}{2}}}$.
Diese Formul nimmt H. Euler würklich dafür an, und weil $\dfrac{c - au}{a^2 + c^2 - 2cau} = \dfrac{1}{2c} + \dfrac{c^2 - a^2}{2(a^2 + c^2 - 2cau)}$ gefunden wird, so ist eben die Formul auch $= - \pi Sac$

$$\left(\frac{du}{c\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac.u)}} + \frac{(c^2 - a^2)\,du}{c(a^2 + c^2 - 2acu)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Man setze $(a^2 + c^2 - 2acu = z)$ so ist $du = - \dfrac{dz}{2ac}$, und die Formul verwandelt sich in folgende: $\dfrac{\pi Sa}{2cc}\left(\dfrac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{(c^2 - a^2)\,dz}{z^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Davon ist das Integral $= \dfrac{\pi Sa}{2cc}$

$$\left(2z^{\frac{1}{2}} - \frac{2(c^2 - a^2)}{z^{\frac{1}{2}}} + C\right) = \frac{\pi Sa}{cc}$$

$$\left(\frac{z - c^2 + a^2}{z^{\frac{1}{2}}} + C\right) = \frac{\pi Sa}{cc}$$

$\left(\dfrac{2(a^2 - acu)}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2acu)}} + C\right)$, oder wie man es auch ausdrucken kann, $= \dfrac{2\pi Saa}{cc}$

$\left(\dfrac{a - cu}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2acu)}} + E\right)$, nemlich E

statt

statt $\frac{C}{2a}$ geschrieben. Dies Integral muß verschwinden wenn $\varphi = 0$, also $\cos\varphi = u = 1$ ist, mithin wird $E = \frac{c - a}{\sqrt{(a^2 - 2ac + cc)}} = \lambda$. Nach der Integration, muß man $\varphi = OCE$, also $u = \cos\varphi = \cos OCE = \frac{a}{c}$ setzen, da dann $a - cu = 0$, und die Erleuchtung $= \frac{2\pi Saa}{cc}$ gefunden wird, oder $= 2\pi S \sin\vartheta^2$, weil $COE = \vartheta$ angenommen, und $\frac{a}{c} = \sin\vartheta$ ist.

Wenn dagegen die Regel des 34 §. angenommen wird, so muß die von der Zone $MmnN$ herkommende Erleuchtung noch in den Sinus des Ausgehungswinkels OMT multiplicirt werden. Weil nun $OMT = OMP - PMT$, also $\sin OMT = \sin OMP \cos PMT - \cos OMP \sin PMT$, und $PMT = \varphi$ ist, so findet man $\sin OMT =$
$$\frac{(c - a\cos\varphi)\cos\varphi - a\sin\varphi^2}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\varphi)}} = \frac{c \,.\, \cos\varphi - a}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\varphi)}}$$
: und wenn $\cos\varphi = u$ angenommen wird, so ist die erwehnte Erleuchtung $= \frac{2S\pi aa\,(c - au)\,(a - cu)\,du}{(a^2 + c^2 - 2cau)^2}$ die ich $= dI$ annehmen will. Man findet aber $\frac{(c - au)\,(a - cu)}{(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, u)^2}$

=

$$= \frac{ac - (a^2 + c^2)\,u + acu^2}{(a^2 + c^2)^2 - 4\,ac\,(a^2 + c^2) + 4\,a^2\,c^2\,u^2}$$

und wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, so ist der Quotient $= \frac{1}{4ac} +$

$$\frac{4\,a^2\,c^2 - (a^2 + c^2)^2}{4ac\,(a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u)^2} = \frac{1}{4ac} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{4ac\,(a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u)^2},$$ mithin $dI =$

$$\frac{S\pi a}{2c}\,du - \frac{S\pi a\,(a^2 - c^2)^2\,du}{2c\,(a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u)^2}$$ oder $dI =$

$$\frac{S\pi a}{2c}\left(du - \frac{(a^2 - c^2)^2\,du}{(a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u)^2}\right).$$

Man nehme $a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u = z$ an, so ist $du = -\frac{dz}{2ac}$, und $\frac{du}{(a^2 + c^2 - 2ac\,.\,u)^2}$

$= -\frac{dz}{2ac\,.\,z^2}$. Hievon ist das Integral $=$

$$\frac{1}{2ac\,.\,z} = \frac{1}{2ac\,(a^2 + c^2\;2acu)},$$ also wird I

$$= \frac{S\pi a}{2c}\left(u - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac\,(a^2 + c^2 - 2acu)} + C\right)$$

gefunden. Dies Integral muß verschwinden, wenn $u = 1$ ist, also wird $C = \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac\,(a - c)^2}$

$- 1 = \frac{(a + c)^2}{2ac} - 1 = \frac{a^2 + c^2}{2ac}$

gefunden. Nach der Integration setzt man

$u =$

$u = \frac{4}{c}$ und das giebt $I = \frac{S\pi a}{2c}$
$$\left(\frac{a}{c} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac\,(c^2 - a^2)} + \frac{a^2 + c^2}{2ac}\right),$$
da dann der eingeschlossene Factor $= \frac{2a}{c}$,

und $I = \frac{S\pi aa}{cc}$, oder $I = S\pi \sin\vartheta^2$ gefunden wird, welches mit dem 55. §. übereinstimmet.

57. §.

Aus dieser Vergleichung der Eulerischen Auflösung der Aufgabe des 55. §. mit der hier vorgetragenen wird erhellen, wie nothwendig es sey, sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Regel des 34. §. zu überzeugen, weil man auf ganz andre Gesetze der Photometrie kommen muß, wenn man mit Herrn Euler voraussetzt, daß die Erleuchtung durch keine Schiefe des Ausgehungswinkels geschwächt wird, als in dem Fall, wenn man der Regel des 34 §. gemäß annimmt, daß die Erleuchtung dem Sinus dieses Winkels proportional sey. Wer dafür hielte, daß die im 34 §. angeführten Gründe die dortige Regel noch nicht ausser allem Zweifel setzten, der müste sie wenigstens so lange als Hypothese gelten lassen, bis durch Vergleichung der daraus fliessenden Folgsätze mit der Erfahrung mehreres zu ihrer Beståttigung gesagt werden kann. Die im 48 bis zum 52 §. aus der Regel des 34 §. geschlossenen Folgsätze haben übrigens etwas vorzüglich nettes, welches die Anwendung auf

auf besondre Fälle gar sehr erleichtert, und die Vergleichung der im 44. 50. und 55. §. vorgetragenen Auflösung der bisher betrachteten Aufgabe mit der von eben der Aufgabe im 56. §. gegebenen Auflösung kann zum Beyspiel dienen, wie sehr die Rechnung abgekürzt wird, wenn man sie auf den Satz des 40. §. nach Anleitung des 48. 49. und 50. §. gründet. Dieser Satz des 40 §., so wie die Regel des 34. §. ist dem Herrn Lambert eigen, und ich finde nicht, daß andre Schriftsteller davon Gebrauch gemacht haben. Zwar hat Herr Bouguer im Traite d' Optique sur la gradation de la lumiere auf der 90 u. f. S. schon Untersuchungen darüber angestellet, ob das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels schwächer werde? auch ganz richtig bewiesen, daß solches seyn müsse, weil wenn man mit H. Euler annimmt: daß das Licht sich nach allen Seiten gleich stark ausbreite, Folgen daraus fliessen, die der Erfahrung wiedersprechen, wovon ich weiter unten umständlicher handeln muß. Allein H. Bouguer meint aus einer angestellten Beobachtung, die ich allererst unten vollständig beurtheilen kann, und der er selbst auch nicht so ganz sicher trauet, gefunden zu haben, daß das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels noch stärker abnehme, als im Verhältniß vom Sinus dieses Winkels. Anwendungen hievon auf theoretische Untersuchungen hat H. Bouguer davon weiter nicht gemacht, mithin bleibt der Satz, des 34. §. wie ich gesagt habe, dem H. Lambert eigen, obgleich H. Bouguer schon im allgemeinen bewiesen hat, daß das Licht wegen der Schiefe des Aus-

 fluß-

flußwinkels sich nicht gleich stark nach allen Seiten ausbreite.

58. §.

9 Fig. Wenn eine unendlich kleine Ebene *Oo* von einer Kugel *AEBF* senkrecht erleuchtet wird; so verhält sich die dieser Ebene mitgetheilte Erleuchtung zur absoluten Erleuchtung von eben der Kugel, wie das Quadrat des Halbmessers *AC* der leuchtenden Kugel zum Quadrat der Entfernung *OC* der erleuchteten Ebene vom Mittelpunct der Kugel.

Beweis. Wenn die Erleuchtung $= I$, der scheinbare Halbmesser $COE = \alpha$ gesetzt wird, so ist $I = \pi \cdot S \cdot \sin\alpha^2$. (55. §.) und $\sin\alpha =$

$$\frac{CE}{OC} = \frac{AC}{OC}, \text{ mithin } I = \frac{\pi \cdot S \cdot AC^2}{OC^2}.$$

Wenn also die absolute Erleuchtung $\pi \cdot S$ (28. §.) $= Y$ gesetzt wird, so hat man $I : Y = \frac{AC^2}{OC^2} : 1 = AC^2 : OC^2$.

In verschiedenen Entfernungen OC also ist die von einer Kugel herrührende senkrechte Erleuchtung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

59. §.

Die Axe des Segments einer leuchtenden Kugel, welches eine unendlich kleine Ebene erleuchtet, trift diese Ebene unter einem schiefen Winkel: man sucht die Grösse der Erleuchtung.

Aufl.

Aufl. Man stelle sich die unendlich kleine Ebene Kk als horizontal liegend vor, weil es gleichviel ist, in welcher Lage man sie betrachten will. Um K als einen Mittelpunct stelle man sich eine mit dem Halbmesser = 1 beschriebene Kugelfläche vor, die von der erweiterten Ebene Kk in dem grösten Kreise BAC geschnitten wird. Ferner sey KP die Axe des Kegels der in K zusammen gehenden Strahlen, so wird P der Pol desjenigen hohlen Kugel-Segments seyn, welches die Ebene Kk eben so stark erleuchtet, als das erhabene Segment derjenigen leuchtenden Kugel, welche ihr Licht nach Kk wirft. Weiter sey KZ eine Verticallinie, so ist die Ebene PKZ vertical, sie schneidet die Kugel um K in dem Vertical-Kreise BZCV, und CKP ist die Neigung der Axe des auf K fallenden Lichtkegels gegen die Ebene Kk. Wenn nun die Ebene dieses Verticalkreises die Fläche des auf K fallenden Lichtkegels in KD und KE schneidet, so ist PKD = PKE der scheinbare Halbmesser der leuchtenden Kugel. Eben die Fläche des auffallenden Lichtkegels wird auch die Kugelfläche um K in dem zum Pol P gehörigen Parallelkreise DHE schneiden, und so ist PDHE dasjenige hohle Kugel-Segment, welches wenn es mit der leuchtenden Kugel einerley Glanz hätte, die Ebene Kk eben so stark als die leuchtende Kugel selbst erleuchten würde. (40. §.) Man suche also die Erleuchtung, welche die Ebene Kk von dem Segment PDHE empfangen würde, zu dem Ende sey der scheinbare Halbmesser des Segments PKD = PKE = ϱ, der Abstand des Pols P vom Scheitel Z, oder der Winkel PKZ = δ. Ferner sey M ein unbestimmter Punct des 10 F.

Segments, dessen Abstand vom Pol PM $= \varepsilon$, sein Abstand vom Scheitel ZM $= \zeta$, und der Winkel am Pol ZPM $= \phi$. Durch M laufe ein zum Pol P gehöriger Parallelkreis XMY, und in der Voraussetzung, daß PM um das Differential Mm wachse, stelle man sich auch durch m den Parallelkreis xmy vor. Weiter wachse der Winkel ZPM um das Differential MPμ, so giebt sich ein Element der Kugelfläche Mμnm, und man kann die Erleuchtung, welche dies Element nach Kk schickt dem 48. §. gemäß finden. Es ist nemlich hier der Einfallswinkel MKF $= 90° - \zeta$; also sin MKF $= \cos\zeta$, und dieser Winkel MKF hies ϑ im 46 §. Was überdem, daselbst $d\mu$ wor, das ist hier das Element Mμnm, also ist die Erleuchtung, welche Kk von dem Element Mμnm empfängt, $=$ S . Mμnm . $\cos\zeta$. Der zum Bogen Mμ gehörige Halbmesser ist $= \sin\varepsilon$, also Mμ $= d\phi \sin\varepsilon$, so wie Mm $= d\varepsilon$, mithin das Element Mμnm $= d\phi d\varepsilon \sin\varepsilon$; und wenn die gesuchte Erleuchtung $=$ I gesetzt wird, so hat man $dI = S . d\phi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\zeta$, wo man auch S $= 1$ annehmen, und $dI = d\phi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\zeta$ setzen kann. Im sphärischen Dreyeck PZM aber sind die Seiten PZ $= \delta$, PM $= \varepsilon$, und der eingeschlossene Winkel ZPM $= \phi$, also hat man für die dritte Seite ZM $= \zeta$ aus dem 550 §. Geom. $\cos\zeta = \cos\varepsilon \cos\delta + \sin\varepsilon \sin\delta \cos\phi$, und das giebt $dI = d\phi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos\delta + d\phi d\varepsilon \sin\varepsilon^2 \sin\delta \cos\phi$. Um hieraus I zu finden, muß man zuerst so integriren, daß ε und $d\varepsilon$ als beständige Grössen betrachtet werden, und ϕ allein veränderlich bleibt: das giebt die Erleuchtung welche K von dem unbestimmten Theil XxmM der unendlich kleinen Zone XxyY

ein

empfängt. Hiernächst integrirt man weiter so, daß allein ε als veränderlich betrachtet wird, und findet so die Erleuchtung, welche K von dem Ausschnitt XPM der Fläche des Segments PXMY empfängt.

Die erste Integration giebt $\int^{\varphi} dI = \varphi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos\delta + d\varepsilon \sin\varepsilon^2 \sin\delta \sin\varphi$, wo keine constans nöthig ist, weil dies Integral mit φ zugleich verschwinden muß. Ferner findet man $\int^{\varepsilon}\int^{\varphi} dI = \frac{1}{2}\varphi \sin\varepsilon^2 \cos\delta + \sin\delta \sin\varphi \int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 + C = I$. Um das Integral $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2$ zu finden, nehme man $\sin\varepsilon = x$, $\cos\varepsilon = y$ an, so ist $dx = d\varepsilon \cos\varepsilon$, $dy = - d\varepsilon \sin\varepsilon$, $d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = - xdy$, und $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = - \int xdy$. Aber $d \,.\, xy = xdy + ydx$, also $xdy = d \,.\, xy - ydx$, und $\int xdy = xy - \int ydx$; mithin $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \int ydx - xy$. Man stelle nun die Werthe von x und y wieder her, so wird $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \int d\varepsilon \cos\varepsilon^2 - \sin\varepsilon \cos\varepsilon$, und wenn in dieser Formul $1 - \sin\varepsilon^2$ statt $\cos\varepsilon^2$, $\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon$ statt $\sin\varepsilon \cos\varepsilon$ gesetzt wird, so erhält man $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \varepsilon - \int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon$, und daraus folgt $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon)$. Dieser Werth in obiger Gleichung gebraucht giebt $I = \frac{1}{2}\varphi \sin\varepsilon^2 \cos\delta + \frac{1}{2}\sin\delta \sin\varphi\,(\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon)$. Die constans fällt weg, weil dies Integral mit ε zugleich verschwinden muß. Für ein andres Segment, dessen Glanz sich zu dem hier angenommenen, wie S : 1 verhält, wird die gefundene Formul noch in dem Verhältniß 1 : S verändert, oder welches einerley ist, mit S multiplicirt.

Will man die Erleuchtung haben, welche das ganze Segment PDHE nach K schickt, so setzt man

$\varphi = 2\pi$, und $\varepsilon = \varrho = PD$, da dann $I = \pi \sin\varrho^2 \cos\delta$ gefunden wird.

60. §.

1) Wenn die Axe des auffallenden Lichtkegels die Ebene Kk senkrecht trift, so fällt P in Z, und es ist $ZKP = \delta = 0$, $\cos\delta = 1$, also wird nun $I = \pi \sin\varrho^2$, welches der Fall der senkrechten Erleuchtung im 44. §. war.

2) Wenn der Mittelpunct der Kugel, welche die Ebene Kk erleuchtet, mithin auch die Axe des auffallenden Strahlenkegels, im Horizont selbst liegt, so ist $\delta = 90°$, $\cos\delta = 0$, $\sin\delta = 1$: alsdann aber kann nur noch die Hälfte der Kugel ihr Licht auf Kk werfen, wie denn auch nun nur die Hälfte des Segments PDHE über dem Horizont liegt. Setzt man also um $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\varepsilon = \varrho$, mithin $\sin\varphi = 1$; so hat man die Erleuchtung, welche der auf einer Seite der Verticalfläche ZKC liegende Quadrant des Segments PDHE nach Kk schickt, $= \frac{1}{2}(\varrho - \frac{1}{2}\sin 2\varrho)$: die von beyden Quadranten, oder der völligen noch über dem Horizont befindlichen Halbkugel herrührende Erleuchtung aber $= \varrho - \frac{1}{2}\sin 2\varrho$. Man könnte sie die horizontale Erleuchtung nennen.

3) Der allgemeine Ausdruck für die Erleuchtung war $I = \pi \sin\varrho^2 \cos\delta$ (59. §.) und es ist $\pi \sin\varrho^2$ die Fläche desjenigen Kreises, der die leuchtende Kugel aus K gesehen zu begränzen scheint: mithin verhält sich die Erleuchtung wie das Product aus der Fläche dieser Kreisförmigen Gränze der leuchtenden Kugel in den Cosinus der Distanz ihres Mittelpuncts vom Scheitel, oder den Sinus der Höhe ihres

Mit-

Mittelpuncts über dem Horizont. Bey einer weit von K entfernten Kugel ist $\pi \sin \rho^2$ die Fläche der scheinbahren Scheibe, welche diese Kugel dem Auge in K darstellet. (30. §. Opt.)

4) Die senkrechte Erleuchtung war $= \pi \sin \rho^2$, und in der Höhe des Mittelpuncts der leuchtenden Kugel von 30° über dem Horizont, ist $\delta = 60°$, also $\cos \delta = \sin 30° = \frac{1}{2}$, mithin die Erleuchtung in der Höhe von 30° halb so groß als die senkrechte Erleuchtung.

5) Die senkrechte Erleuchtung verhält sich zur horizontalen, wie $\pi \sin \rho^2 : \rho - \frac{1}{2}\sin 2\rho$. Wenn demnach ρ nur klein und beynahe $\rho = \sin \rho$ ist, so ist jenes Verhältniß $= \pi \sin \rho : 1 - \cos \rho = \pi \sin \rho : \sin v. \rho$. Wird also für die Sonne $\rho = 16'$ angenommen, so hat man $\sin \rho = 0{,}0046542$, $\pi \sin \rho = 0{,}0146275$, $\cos \rho = 0{,}9999892$, $1 - \cos \rho = 0{,}0000108$, mithin verhält sich die verticale Erleuchtung der Sonne zur horizontalen, wie $146275 : 108 = 1354 : 1$.

61. §.

Es sey *LMON* ein Kreis, dessen Fläche von einer Kugel *BDGE* um den Mittelpunct *C* erleuchtet wird. Der Mittelpunct dieser leuchtenden Kugel liegt in der graden auf der Fläche des Kreises *LMN* in seinem Mittelpunct *A* senkrechten Linie *AC*: man suche die Menge Lichts, welche der Kreis auffängt. 5 Fig.

Aufl. Es sey die Entfernung der Mittelpuncte $AC = c$, der Halbmesser $AM = z$, also die Entfernung des Elements $Mmn\mu$ vom Mittelpunct der leuchtenden Kugel, nemlich $CM = \sqrt{(c^2 + z^2)}$, und sin AMC $= \frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}}$. Dieser Winkel ist für alle Elemente, die um einerley Abstand z vom Mittelpunct A entfernt sind, mithin zusammen genommen den Ring LMON $\lambda\mu\omega\nu$ ausmachen, einerley: er ist für sie der Einfallswinkel des auffallenden Strahlenkegels DME. Wenn also der scheinbare Halbmesser CMD $= \varrho$ gesetzt wird, so ist für das Element M$mn\mu$ die Erleuchtung $= \pi \sin\varrho^2 \sin$ AMC. (59. 60. §.) Weil ferner $\sin\varrho$ $= \frac{CD}{CM} = \frac{r}{\sqrt{(c^2+z^2)}}$, CD $= r$ gesetzt: so wird die eben erwehnte Erleuchtung $=$ $\frac{\pi c r^2}{(c^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Diese Erleuchtung ist für alle Elemente des Ringes LMON $\lambda\mu\omega\nu$ einerley, und die Fläche desselben ist $= 2\pi z dz$, mithin die Menge aller auf diesen Ring fallenden Lichtstrahlen $dM = \frac{2\pi^2\ c\ r^2\ zdz}{(c^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. (48. §.) Oben im 16 §. ist schon das Integral $\int \frac{2c\ zdz}{(c^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= 2\left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}}\right)$ gefunden, in der Voraussetzung daß es mit $z = 0$ zugleich verschwinden müsse: also hat man hier $M = 2\pi^2 r^2$ $\left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2+z^2)}}\right)$.

62. §.

1) Weil $\frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}} = \sin AMC = \cos$ ACM war, so ist auch $M = 2\pi^2 r^2 \sin v \,.\, ACM$, da dann ACM der scheinbare Halbmesser des erleuchteten Kreises ist aus dem Mittelpunct der leuchtenden Kugel gesehen.

2) Zwischen der Fläche des graden Kegels MCN ist ein Segment FBG der leuchtenden Kugel enthalten, dessen Fläche $= 2\pi r^2 \sin v \,.\, ACM$ (621 §. Geom.) Wenn also die Fläche dieses Segments $= k^2$ gesetzt wird, so hat man $M = \pi \,.\, k^2$.

3) Wäre der Halbmesser des erleuchteten Kreises unendlich groß, so hätte man $M = 2\pi^2 r^2$, und in dem Ausdruck $M = \pi \,.\, k^2$ würde nun k^2 die halbe leuchtende Kugelfläche bezeichnen.

4) Nimmt man den Halbmesser des erleuchteten Kreises $= a$, mithin $z = a$ an, so ist die auf den erleuchteten Kreis fallende Strahlenmenge $M = 2\pi^2 r^2 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right)$. Die Fläche des erleuchteten Kreises ist $= \pi a^2$, also die mittlere Erleuchtung, welche diese Kreisfläche empfängt,

$$= \frac{2\pi r^2}{a^2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right). \text{ (15. §.)}$$

63. §.

Die Menge Lichts, welche eine ins unendliche ausgebreitete Ebene von einer leuchtenden Kugel auffängt, ist so groß als sie in dem Fall seyn würde, wenn die Erleuchtung aller Elemente eines der halben leuchtenden Kugelfläche gleichen Kreises der absoluten Erleuchtung gleich wäre.

Beweis. Die ins unendliche ausgebreite Ebene fängt eine Menge Licht auf, die $= 2\pi^2 r^2$ ist, (62 §. n. 3.) Aber die absolute Erleuchtung ist $= \pi$, (52. §.) und ein Kreis so groß als die halbe leuchtende Kugelfläche wäre $= 2\pi r^2$. Wenn demnach die Erleuchtung aller Elemente desselben der absoluten Erleuchtung gleich wäre, so wäre die Menge des über demselben verbreiteten Lichts $= 2\pi^2 r^2$, mithin eben so groß, als die vorige Menge.

64. §.

Stellt man sich die leuchtende Kugel zwischen zwoen parallelen, und ins unendliche ausgebreiteten ebenen Flächen vor; so fangen beyde zusammen alles Licht auf, was die Kugel nach allen Seiten ausbreitet. Demnach ist diese gesammte Menge Lichts $= 4\pi^2 r^2$, oder eben diese Menge Lichts ist so groß, als diejenige seyn würde, welche über einem der ganzen Kugelfläche gleichen Kreise verbreitet wäre, wenn die Erleuchtung aller Elemente desselben der absoluten Erleuchtung gleich wäre.

Wenn man annimmt, daß die leuchtende Kugel mit einer concentrischen Kugelfläche umgeben sey, und der Halbmesser dieser Kugelfläche $= x$ gesetzt wird; so werden alle Elemente dieser Kugelfläche senkrecht, und gleich stark erleuchtet: für jedes Element wäre die Erleuchtung $= \dfrac{\pi r^2}{x^2}$. (58. §.) Demnach wäre die gesammte Menge Lichts, lichte, welche die Kugelfläche auffienge, $= \frac{\pi r^2}{x^2} \cdot 4\pi x^2 = 4\pi^2 r^2$, welches mit dem vorigen überein kommt.

65. §.

Wenn der Punct C, welcher bisher als der Mittelpunct einer leuchtenden Kugel $DBEG$ ist betrachtet worden, ein so stark glänzender Punct wäre, daß die von ihm auf eine unendlich kleine Ebene in der Entfernung r senkrecht fallende Erleuchtung eben so groß wäre, als die absolute Erleuchtung einer leuchtenden Kugel DBEG, wozu der Halbmesser $= r$ gehörte; so würde derselbe die Kreisfläche $LMON$ in allen Stücken eben so, wie die Kugel $DBEG$ erleuchten.

Beweis. Die senkrechte Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene in der Entfernung r von dem leuchtenden Punct C empfängt, ist vermöge der Voraussetzung $= \pi$. Demnach empfängt das Element $Mmn\mu$ die Erleuchtung $=$

$$\frac{\pi r^2 \sin AMC}{CM^2} \text{ (9 §.)} = \frac{\pi r^2 AC}{CM^3} = \frac{\pi r^2 c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wenn AC $= c$, AM $= z$ gesetzt wird; und eben so groß ist die Erleuchtung des Elements $Mmn\mu$, wenn es selbige von der Kugel DBEG empfängt, deren absolute Erleuchtung $= \pi$ ist. (61. §.) Diesemnach fällt auf das Element $Mmn\mu$, so wie auf den Ring LMON$\lambda\mu\omega\nu$, und auf

auf den ganzen Kreis LMON einerley Menge Lichts, es mag die Erleuchtung von dem Punct C, oder von der Kugel BDGE kommen.

Der V. Abschnitt.

Allgemeinere Theorie der Erleuchtung auch wenn die scheinbare Gränze der leuchtenden Fläche nicht zwischen einer graden Kegelfläche liegt.

66. §.

Wenn die scheinbare Gränze des leuchtenden Körpers gradlinicht ist, so ist das Licht, so derselbe jedem Element einer Ebene zusendet, in dem Raum einer Pyramide enthalten, und dasjenige Stück einer hohlen Kugelfläche, welches der Ebene eben soviel Licht zuschicken würde, ist zwischen dreyen oder mehrern Bogen gröster Kreise enthalten: mithin ein solches Stück der Kugelfläche, das sich in Kugeldreyecke eintheilen läßt, so wie man jede gradlinichte Figur in Dreyecke theilen kann. Um den Vortrag im folgenden abzukürzen, werde ich so reden, als wenn ich nur Erleuchtungen betrachtete, die von dergleichen hohlen Kugelflächen herrühren, da dann allemahl von selbst klar seyn wird, was die sichtbare Gränze andrer leuchtender Flächen für eine Gestalt haben muß, wenn ihre Erleuchtung bey einerley Glanz mit der Erleuchtung der betrachteten Kugelfläche einer-

einerley seyn soll. Auch werde ich voraussetzen, daß alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz haben, und daß dieser Glanz S = 1 sey.

67. §.

Die Erleuchtung zu finden, welche von einem rechtwinklichten Kugeldreyeck *ZRM* herrührt, dessen eine Perpendicularseite zugleich vertical steht, und mit der Hypothenuse im Scheitelpunct zusammen stößt: die unendlich kleine erleuchtete Ebene *Kk* horizontal angenommen. 11. F.

Aufl. Die unendlich kleine Ebene K*k* stelle man sich wiederum nach allen Seiten erweitert vor, so giebt sie den horizontalen grösten Kreis APB. Nun sey Z der Scheitelpunct ZRM das bey R rechtwinklichte Kugeldreyeck, die vertical stehende Perpendicular-Seite ZR, so ist auch die Hypothenuse ZM vertical, die andre Perpendiculär-Seite RM stoße mit dem Horizont in P zusammen, so ist P der zum Bogen ZR gehörige Pol: (496. §. Geom.) und wenn ZR, ZM in B und S den Horizont treffen, so ist BS das Maaß des Winkels RZM am Scheitelpunct. Es wachse nun ZR um das Differential R*r*, und durch *r* sey ein gröster Kreisbogen von neuen auf Z*r* senkrecht gesetzt, so geht derselbe ebenfals durch P, und PR ist in die Lage P*r* gerückt, so wie das Dreyeck ZRM und das Differential MR*rm* angewachsen ist, und die Hypothenuse ZM um das Differential M*m*. Wenn ferner Mμ und *mn* ein paar Bogen zweener zum Pol P gehöriger Parallelkreise sind, so ist das Element Mμ*mn* als ein Rechteck zu betrachten, dessen

Sei-

Seitenlinien $M\mu$ und Mn sind. Man setze also $ZR = u$, $RM = w$, so ist $Rr = du$, $Mn = dw$, $M\mu = Rr \,.\, \sin PM = du \cos w$, mithin das Element $M\mu mn = du\,dw \cos w$. Ferner sind u und w so zu betrachten, wie auf einer Ebene die Abscisse und Ordinate, in der Gleichung für eine krumme Linie: wenn nemlich der Winkel $RZM = \alpha$ gesetzt wird, so hat man $\sin . u = \cot\alpha \tan g . w$, (538. n. II. Geom.) und diese Gleichung ergiebt, wie w von u abhängt, wenn α einerley bleibt. Das Maaß des Winkels unter welchem die Strahlen-Pyramide $Mnm\mu K$ das Element Kk trift, ist der Bogen SM oder die Höhe des Elements $M\mu mn$ über dem Horizont, mithin ist die davon auf Kk fallende Erleuchtung $= du\,dw \cos w \sin SM$. Ferner hat man $\sin SM = \cos ZM = \cos . u \cos . w$ (538 §. n. III. Geom.); wenn also die gesuchte Erleuchtung $= I$ gesetzt wird, so ist $dI = du\,dw \cos w^2 \cos . u$.

Um nun die Integration zu bewerkstelligen, setze man $1 - \sin w^2$ statt $\cos w^2$, so hat man $dI = du \cos u \,(dw - dw \sin w^2)$. Wenn ferner zuerst allein w veränderlich angenommen, u aber als beständig betrachtet wird, so giebt das Integral $\overset{w}{\int} dI$ die Erleuchtung, welche das Element $RMmr$ nach Kk schickt: und weil $\int dw \sin w^2 = \frac{1}{2}(w - \frac{1}{2}\sin 2w)$ gefunden wird, so erhält man $\overset{w}{\int} dI = \frac{1}{2} du \cos u \,(w + \frac{1}{2}\sin 2w)$. Integrirt man diese Formul von neuen in der Voraussetzung, daß sich u, und mit u zugleich w ändere, so findet man die gesammte Erleuchtung, welche das Dreyeck ZRM nach Kk schickt. Bevor diese zweyte Integration vorgenommen werden kann, muß eine von den veränderlichen Grössen u oder w vermittelst der Gleichung $\sin u = \cot\alpha \tan w$ weggeschaft werden, und man nimmt leicht wahr, daß hier am leichtesten u weggeschaft werde, weil man aus der zulezt angeführten Gleichung $du \cos u = \cot\alpha \,.\, d\tan w$ erhält, und dies mit der Gleichung, welche vermittelst der ersten Integration gefunden ward, verglichen, giebt $\int^{w} dI = \frac{1}{2}\cot\alpha \;(w \,.\, d\tan w + \sin w \cos w \,.\, d\tan w)$. Es ist aber $d\tan w = \frac{dw}{\cos w^2}$ (457. §. Hydraul.) also $\sin w \cos w \,.\, d\tan w = dw \,.\, \tan w$, mithin wird $\int^{w} dI = \frac{1}{2}\cot\alpha\,(w \,.\, d\tan w + dw \,.\, \tan w)$, folglich $I = \frac{1}{2} w \cot\alpha \tan w$ gefunden: und weil $\cot\alpha \tan w = \sin \,.\, u$ war, so hat man auch $I = \frac{1}{2} w \,.\, \sin \,.\, u$.

Wenn der Bogen BR $= \eta$ gesezt wird, so ist $u + \eta = 90°$, mithin $I = \frac{1}{2} w \cos \eta$, und η ist das Maaß des Winkels BPR unter welchem die Seite RM $= w$ gegen den Horizont geneigt ist. Die beyden übrigen Seiten des sphärischen Dreyecks RZM sind auf dem Horizont senkrecht angenommen. Wenn also das Maaß der scheinbaren Grösse eines leuchtenden Körpers ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck dieser Art ist, wovon zwo Seiten, die Hypothenuse und eine Perpendiculärseite, auf dem Horizont senkrecht sind, die dritte aber, nemlich die zweyte Perpendiculärseite gegen den Horizont geneigt ist; so ist die Erleuchtung das halbe Product der gegen den Horizont geneigten Seite in den Cosinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont.

68. §.

68. §.

Weil w unbestimmt jeden Bogen wie RM bezeichnet, so ist die dem Dreyeck ZRN zugehörige Erleuchtung $= \frac{1}{2}$ RN . cosη, so wie die dem Dreyeck ZRM zugehörige $= \frac{1}{2}$ RM . cosη. Demnach ist ferner die dem Dreyeck MZN zugehörige Erleuchtung $= \frac{1}{2}$ cosη (RN — RM) $= \frac{1}{2}$ MN . cosη, und daraus erhellet, daß der im vor. §. zuletzt bemerkte Satz von jedem Dreyeck gelte, wenn zwey Schenkel desselben vertical stehen. Denn letztere können nur im Scheitel Z zusammen laufen, und durch Z kann allemahl ein dritter Bogen ZR auf MN senkrecht gezogen werden, da dann der eben angeführte Beweis seine Anwendung findet.

Wenn die Bogen ZM, ZN, bis an den Horizont in S und T verlängert werden, so ergiebt die Betrachtung der Figur in Rücksicht auf den eben bewiesenenen Satz: es sey die auf K fallende Erleuchtung

vom Dreyeck PZM $= \frac{1}{2}$ PM cosη
vom Dreyeck PZN $= \frac{1}{2}$ PN cosη,

also

vom Dreyeck PZS $= \frac{1}{2}$ PS
vom Dreyeck PZT $= \frac{1}{2}$ PT,

mithin

vom Dreyeck PSM $= \frac{1}{2}$ (PS — PM cosη)
vom Dreyeck PTN $= \frac{1}{2}$ (PT — PN cosη)

folglich auch

vom Dreyeck PBR $= \frac{1}{4}\pi$ (1 — cosη) $= \frac{1}{4}\pi$ sin$v$. η.
vom Dreyeck PBZ $= \frac{1}{4}\pi$,

Das letztere Dreyeck ist der vierte Theil von der Halbkugel, mithin wäre die Erleuchtung, welche die

die völlige Halbkugel nach Kk schickt, $= \pi$, und das ist, wie bekannt, die absolute Erleuchtung.

Noch findet man die auf Kk fallende Erleuchtung
vom Dreyeck $MZN = \frac{1}{2}\, MN \cos SPM$
vom Dreyeck $CZL = \frac{1}{2}\, CL \cos SGL$,
also
vom Viereck $LMNC = \frac{1}{2}(MN \cos SPM - CL \cos SGL)$
mithin
vom Viereck $STCL = \frac{1}{2}\,(ST - CL \cos SGL)$:
und eben so
vom Viereck $STMN = \frac{1}{2}\,(ST - MN \cos SPM)$.

69. §.

Die scheinbare Gränze eines leuchtenden Körpers, der auf die unendlich kleine Ebene Kk eine Strahlen-Pyramide wirft, ist ein sphärisches Dreyeck CDE von willkührlicher Gestalt und Lage: man soll die Erleuchtung finden, welche die Ebene Kk empfängt. 11. 12 F.

Aufl. Zur Erleichterung der Vorstellung betrachte man die Ebene Kk als horizontal liegend, und nehme wiederum an, daß diese Ebene nach allen Seiten erweitert den horizontalen Kugelschnitt $AHGB$ gebe. Das zu diesem Horizont gehörige Zenith sey Z, also KZ die Scheitellinie. Wenn man durch diese Scheitellinie und jeden Winkelpunct des Dreyecks CDE eine Ebene legt; so ergeben sich drey gröste Kreisbogen ZC, ZD, ZE, zwischen dem Zenith und jedem Winkelpunct des Dreyecks, die mit den dreyen Seitenlinien des letztern drey andre Dreyecke einschliessen, da dann jedes dieser neuen Dreyecke zwo verticale Seiten hat.

Uebrigens wird das Zenith entweder innerhalb der Gränzen des Kugeldreyecks, oder im Umfange desselben, oder ausserhalb seiner Gränzen liegen.

11 F. 1) Im ersten Fall, den die 11 Fig. vorstellt, ist CDE die Summe der Dreyecke ZCD, ZCE, ZDE, und die von CDE kommende Erleuchtung ist die Summe der Erleuchtungen, welche jene drey im Scheitel zusammen laufende Dreyecke der Ebene K*k* mittheilen. Es sind aber nach dem 41. §. diese Erleuchtungen

vom Dreyeck ZCD $= \frac{1}{2}$ CD cos CFG,
vom Dreyeck ZCE $= \frac{1}{2}$ CE cos CGF,
vom Dreyeck ZDE $= \frac{1}{2}$ DE cos DHF,
also die gesuchte Erleuchtung
$= \frac{1}{2}$ (CD cos CFG + CE cos CGF + DE cos DHF.)

11 F. 2) Liegt das Zenith in einer Seitenlinie des Dreyecks, wie wenn es COE wäre, (11. Fig.) wo Z in der Seitenlinie OE liegt; so wäre dasselbe vermittelst des Bogens ZC schon in zwey andre getheilt, und die gesuchte Erleuchtung wäre $= \frac{1}{2}$ (CE cos CGF + CO cos CFG)

12 F. 3) Liegt aber das Zenith ausserhalb der Gränzen des Dreyecks CDE, wie es die 12 Fig. vorstellt; so ist dies Dreyeck nicht mehr die Summe der dreyen im Scheitel zusammen laufenden Dreyecke, sondern nach Verschiedenheit der Lage der Seitenlinien entweder die Summe zwoer um das dritte vermindert, oder auch wohl der Ueberschuß eines dieser Dreyecke über die Summe der übrigen beyden. In der 12 Fig. ist CDE = ZCD + ZCE − ZED: wenn aber CE in CE′ fiele, so wäre CDE′ = ZCD

$= ZCD - (ZCE' + ZE'D)$. Mithin ist die Erleuchtung

des $\triangle$. $CDE = \frac{1}{2}$ (CD cos CFG' + CE cos CGF
— DE cos DHG.)

des $\triangle$. $CDE' = \frac{1}{2}$ (CD cos CFG — CE' cos CG'F
— DE' cos DHG.)

70. §.

Die scheinbare Gränze des leuchtenden 13 F.
Körpers ist von sovielen Bogen gröster Kreise, wie man will eingeschlossen, oder ein sphärisches Polygon, wie *CDEFG*: man soll die Grösse der Erleuchtung finden, welche die Ebene *Kk* empfängt.

Aufl. Wenn man durch jeden Winkelpunct, wie beym Dreyeck (69. §.) einen Verticalkreis legt, so erhält man soviele im Scheitel zusammen laufende Dreyecke, als das sphärische Polygon Seitenlinien hat, und man kann, die von jedem derselben abhangende Erleuchtung dem 68 §. gemäß finden. Wenn der Scheitelpunct Z innerhalb der Gränzen des Polygons liegt, so ist letzteres die Summe der in Z zusammen laufenden Dreyecke, und die von dem Polygon kommende Erleuchtung die Summe der Erlenchtungen, welche die Dreyecke nach K*k* schicken. Läge Z im Umfange des Polygons, so behielte dies alles noch seine Richtigkeit; nur würde man ein Dreyeck weniger erhalten, wenn eine Seitenlinie des Polygons durch Z liefe, und zwey Dreyecke weniger, wenn ein Winkelpunct des Polygons mit Z zusammen fiele.

Wenn dagegen Z ausserhalb der Gränzen des Polygons liegt, so ist die Fläche des letztern nicht mehr die Summe der in Z zusammen laufenden Dreyecke, sondern der Ueberschuß der Summe einiger dieser Dreyecke, oder auch wohl nur eines derselben, über die Summe der übrigen: mithin ist alsdenn auch die Erleuchtung welche das Polygon nach Kk schickt, der Ueberschuß der Summe der Erleuchtungen einiger dieser Dreyecke, oder eines derselben, über die Summe der Erleuchtungen, welche von allen übrigen der Ebene Kk zugeschickt wird. Ein Beyspiel hievon giebt die 13. Figur: daselbst ist das Polygon $CDEFG = ZCD + ZCG + ZGF - (ZEF + ZED)$, und die Erleuchtung des Polygons wird gefunden, wenn man die Summe der Erleuchtungen der Dreyecke ZEF und ZED von der Summe der Erleuchtungen der Dreyecke ZCD, ZCG, ZGF abziehet.

71. §.

14 F. Die scheinbare Gestalt LMN des leuchtenden Körpers sey nun welche sie wolle, so kann ihre Gränze allemahl als eine auf der Oberfläche der Kugel verzeichnete Linie betrachtet werden. Innerhalb dieser Gränze sey C ein bekannter Punct, M ein Punct im Umfang derselben, CM ein größter Kreisbogen, und ZCV ein Verticalkreis durch C. Hat man nun eine Gleichung zwischen dem Winkel $ZCM = \varphi$ und dem Bogen $CM = \psi$, so drückt selbige die Natur der Linie aus, welche die scheinbare Gränze des leuchtenden Körpers abgiebt. Der Winkel $ZCM = \varphi$ wachse um das Differential $MCm = d\varphi$, so wächst $CM = \psi$, um das Differential $d\psi$. Durch M und m stelle man sich nemlich ein paar Bogen $M\mu$, mn zum Pol C gehöriger

höriger Parallelkreise vor, so ist $\mu m = d\psi$, so wie $M\mu = d\varphi \sin\psi$, mithin das Element $M\mu mn = d\varphi d\psi \sin\psi$. Noch sey ZMV ein Verticalkreis durch M, so hat man $ZM = \zeta$ aus dem Winkel $ZCM = \varphi$ und den anliegenden Seiten $CM = \psi$ und $CZ = \delta$ gesetzt. Es ist nemlich $\cos\zeta = \cos\delta \cos\psi + \cos\varphi \sin\delta \sin\psi = \sin FM$, und FKM ist der Einfallswinkel für die Strahlenpyramide $M\mu mnK$, folglich die Erleuchtung, welche das Element $M\mu mn$ nach K schickt $= d\varphi\, d\psi\, (\sin\psi \cos\psi \cos\delta + \sin\delta \cos\varphi \sin\psi^2) = dI$.

Wenn dieser Ausdruck so integrirt wird, daß man allein ψ veränderlich annimmt, so findet man $\int d\psi \sin\psi \cos\psi = \frac{1}{2} \sin\psi^2$, und $\int d\psi \sin\psi^2 = \frac{1}{2}$
ψ
$(\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi)$, (59. §.) mithin $\int dI = \frac{1}{2} d\varphi\, (\cos\delta \sin\psi^2 + \sin\delta \cos\varphi\, (\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi))$. Vermittelst der zwischen φ und ψ als bekannt angenommenen Gleichung muß nun ferner ψ und $d\psi$ oder statt dessen φ und $d\varphi$ aus der Gleichung weggeschaft, und hiernächst von neuen integrirt werden, so erhält man die Erleuchtung $= I$, welche das Stück der Kugelfläche DCM der Ebene Kk zuschickt.

Wenn die Figur LMN ein Kreis ist, so ist ψ unveränderlich, wenn sich gleich φ ändert, also findet man in diesem besondern Fall $I = \frac{1}{2} \varphi \cos\delta \sin\psi^2 + \frac{1}{2} \sin\delta \sin\varphi\, (\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi)$; welches die im 59. §. schon gefundene Auflösung ist.

Der VI. Abschnitt.

Anwendung dieser Theorie auf einige merkwürdige besondre Fälle.

72. §.

15 F. Ueber der horizontalen Ebene $ABCD$ stehet ein leuchtendes Rechteck $ABEF$ senkrecht, und zwar so, daß eine Seitenlinie AB des letztern im Horizont $ABCD$ liegt, oder wenigstens damit parallel ist; im Horizont ist die Stelle eines Elements $Mmn\mu$ durch die Entfernungen AP und PM gegeben; man sucht die Grösse der Erleuchtung dieses Elements.

Aufl. Alle Strahlen, welche das Rechteck ABEF auf M wirft, sind in dem Raum einer Pyramide MABEF enthalten, wovon M die Spitze und ABEF die Grundfläche wäre. Die Seitenfläche MFE schneide ABCD in KL, so ist $KL \mathbin{\#} FE$, weil beyde horizontal sind, mithin auch $KL = AB$, ferner sey MQ auf FE mithin auch auf KL senkrecht, so wie MP auf AB und KL senkrecht ist; so ist zugleich KL auf der Ebene PMQ senkrecht, letztere ist die Ebene des Neigungswinkels der Ebene FME gegen den Horizont, und PMQ dieser Neigungswinkel. Um den Mittelpunct M stelle man sich eine mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Ku-

gel-

gelfläche vor, so geben die Ebenen AMF, BME ein paar Verticalkreise, die im Zenith des Puncts M zusammen stossen. Wenn nun die Höhe des leuchtenden Rechtecks ABEF unendlich groß wäre, oder die verticalen Seitenlinien AF, BE, nach Y und Z aufwärts ins unendliche fortliefen; so wäre zwischen den Gränzen des Pyramidenförmigen Raums ABZY ein Stück der um M beschriebenen Kugelfläche enthalten, das die Gestalt eines solchen sphärischen Dreyecks hätte, wie BZS, SZT in der 11 Fig. sind; statt ABEF aber hätte man auf der Kugelfläche ein sphärisches Viereck, wie BRMS, SMNT, oder auch BSLE, STCL, in der 11 Fig. sind. Diesemnach kann man sich AF, BE als verticale gröste Kreisbogen, AB als einen Bogen des Horizonts und EF als einen grösten Kreisbogen vorstellen, dessen Neigung gegen den Horizont = RMQ ist: mithin wird die Erleuchtung, welche ABEF nach $Mmn\mu$ schickt = $\frac{1}{2}$ (AMB − FME cos PMQ), (68 §.) die Erleuchtung aber, welche EFGH nach $Mmn\mu$ schickt, wäre = $\frac{1}{2}$ (FME cos PMQ − GMH cos PMR).

Wenn nun die Höhen AF = a, AG = c, nebst der Breite AB = b des leuchtenden Rechtecks gegeben sind, wie auch AP = x, PM = y; so sind zugleich die Winkel AMB, FME, GMH, PMQ, PMR, gegeben. Es ist nemlich AMB = PMA + PMB, und tang PMA = $\frac{x}{y}$, tang PMB = $\frac{b-x}{y}$, also tang AMB = $\frac{by}{y^2 + x^2 - bx}$. (455. §. Geom.) Ferner ist tang QMF =

$= \frac{x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, tang QME $= \frac{b-x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, und FME $=$ QMF $+$ QME, also tang FME $=$ $\frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx}$, und eben so, tang GMH $= \frac{b\sqrt{(c^2+y^2)}}{c^2+y^2+x^2-bx}$. Ueberdem hat man

tang PMQ $= \frac{a}{y}$, tang PMR $= \frac{c}{y}$,

also cos PMQ $= \frac{y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, und cos PMR $=$

$\frac{y}{\sqrt{(c^2+y^2)}}$. Braucht man diese Werthe in den gefundenen Formuln, so giebt sich die Erleuchtung, welche ABEF nach $Mmn\mu$ schickt $= \frac{1}{2}$

$$\left(\text{Arc. tang}\,\frac{by}{y^2+x^2-bx} - \frac{y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}\,.\,\text{Arc. tang.}\,\frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx}\right),$$

diejenige aber, welche EFGH nach $Mmn\mu$ schickt,

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2)}}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx} - \frac{y}{\sqrt{(c^2+y^2)}}\,\text{Arc. tg.}\,\frac{b\sqrt{(c^2+y^2)}}{c^2+y^2+x^2-bx}\right).$$

Könnte man voraussetzen, daß das scheinbare Himmels-Gewölbe durchaus einerley Glanz hätte; so würde die Aufgabe dienen, die Erleuchtung zu finden, welche auf eine gegebene Stelle des horizontalen Bodens fällt, wenn das Tageslicht durch eine

eine rechteckigte Thür- oder Fenster-Oefnung in ein Zimmer hinein scheint.

Nimmt man PR = c unendlich groß an, so findet sich die Erleuchtung, welche die von EF nach Y und Z sich ins unendliche fort erstreckende Ebene EFYZ nach $Mmn\mu$ schickt, $= \frac{\frac{1}{2}y}{\sqrt{(a^2+y^2)}} \cdot \text{Arc.tg.} \frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx}$, oder welches einerley ist, eben diese Erleuchtung $= \frac{1}{2}$ FME . cos. PMQ.

73. §.

Die gesammte Lichtmenge zu finden, welche die leuchtende Fläche $ABEF$ auf $AKLB$ wirft, wenn eben die Stücke, welche im vor. §. gegeben waren, auch hier als gegeben angenommen werden. 15 F.

Aufl. Wenn man die Fläche des Elements $Mmn\mu = dxdy$ in die Erleuchtung multiplicirt, welche dasselbe von ABEF empfängt, so hat man die auf dies Element fallende Lichtmenge; würde dieses Product hiernächst so integrirt, daß man zuerst y allein, hiernächst aber auch x veränderlich annähme, so würde die gesuchte Lichtmenge gefunden werden. Die erwehnte Erleuchtung ist im vor. §. zwar gefunden; allein wenn man die dortige Formul in das Element $dydx$ multiplicirt, so erhält man eine sehr verwickelte Differential-Formul, die sich nicht wohl ohne grosse Umwege integriren läßt. Diesen Schwürigkeiten kann man ausweichen, wenn man folgendes in Erwägung ziehet.

Die Erleuchtung, welche das Element $dydx$ von der Ebene EFYZ empfängt, die sich von EF aus nach Y und Z ins unendliche fort erstreckt, war $= \frac{1}{2}$ FME cos PMQ, also ist die von der erwehnten Ebene auf $Mmn\mu$ fallende Strahlenmenge $= \frac{1}{2}\, dydx$. FME . cos PMQ. Die Winkel FME PMQ hängen ausser x, y, b, nur von a ab, und nach Integration der eben angeführten Differential-Formul wird die Strahlenmenge, welche EFYZ auf ABCD wirft, eine Function von a, welche wenn $a = 0$ gesetzt wird, die Strahlenmenge geben muß, welche ABCD von BAYZ empfängt. Jene Strahlenmenge von dieser subtrahirt muß die Strahlenmenge geben, welche AFEB auf ABCD wirft. Diesemnach kommt die Auflösung der Aufgabe darauf an, ob man die Formul $\frac{1}{2}\, dydx$. FME . cos PMQ gehörig integriren kann. Man setze dies Differential $= d$M, so ist auch $d\text{M} = \frac{1}{2}\, dydx$. QMF . cos PMQ $+ \frac{1}{2}\, dydx$. QME . cos PMQ, weil FME = QMF + QME ist. Ferner ist

$$\cos \text{PMQ} = \frac{y}{\sqrt{(a^2 + y^2)}},$$

wenn also QMF $= \varphi$, QME $= \psi$ gesetzt wird, so erhält man

$$d\text{M} = \frac{\frac{1}{2} y dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}} \cdot \varphi\, dx + \frac{\frac{1}{2} y dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)}} \cdot \psi\, dx.$$

Noch hat man

$$\text{tg}\varphi = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + y^2)}},$$

$$\text{tang}\psi = \frac{b - x}{\sqrt{(a^2 + y^2)}},$$

oder

$$\cot\varphi = \frac{\sqrt{(a^2 + y^2)}}{x}, \quad \cot\psi = \frac{\sqrt{(a^2 + y^2)}}{b - x},$$

mithin $x^2 \cot\varphi^2 = a^2 + y^2$, und $(b-x)^2 \cot\psi^2 = a^2 + y^2$. Man nehme allein y als veränderlich an, und differentiire, so findet man $x^2 \cot\varphi \,.\, d\cot\varphi = ydy$, und $(b-x)^2 \cot\psi \,.\, d\cot\psi = ydy$; oder wenn hier wieder $\frac{\surd\,(a^2+y^2)}{x}$ statt $\cot\varphi$, und $\frac{\surd\,(a^2+y^2)}{b-x}$ statt $\cot\psi$ gesetzt wird, so ist

$$d\cot\varphi \,.\, x \,.\, \surd\,(a^2+y^2) = ydy$$

und $d\cot\psi \,.\, (b-x) \,.\, \surd\,(a^2+y^2) = ydy$, also $dM = \frac{1}{2}\varphi\, d\cot\varphi \,.\, xdx + \frac{1}{2}\psi \,.\, d\cot\psi \,.\, (b-x)\,dx$, und das giebt

$$\overset{y}{\int} dM = \tfrac{1}{2} xdx \int \varphi\, d\cot\varphi + \tfrac{1}{2}(b-x)\,dx \int \psi\, d\cot\psi + C.$$

Weiter findet man $\int\varphi \,.\, d\cot\varphi = \varphi\cot\varphi - \int d\varphi \cot\varphi$, und $d\varphi\cot\varphi =$

$$\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\,.\,\sin\varphi}{\sin\varphi} = d\,.\,l\sin\varphi,$$

(315 §. Mech.) also $\int\varphi \,.\, d\cot\varphi = \varphi\cot\varphi - l\sin\varphi$; mithin auch $\int\psi d\cot\psi = \psi\cot\psi - l\sin\psi$. Diese Werthe also geben $\overset{y}{\int} dM = \frac{1}{2} xdx\,(\varphi\cot\varphi - l\sin\varphi) + \frac{1}{2}(b-x)\,dx\,(\psi\cot\psi - l\sin\psi) + C$, und vermittelst dieser Formul findet man die Strahlenmenge, welche auf das Element $PM\mu p$ fällt. Wenn $y = 0$ ist, so muß dies Integral verschwinden, zugleich verwandelt sich der Winkel QMF in QPF, und QME in QPE. Man setze also $QPF = \eta$, $QPE = \vartheta$, so muß $\overset{y}{\int} dM = 0$ seyn, wenn $\varphi = \eta$, $\psi = \vartheta$ ist, mithin wird $C = \frac{1}{2} xdx\,(l\sin\eta - \eta\cot\eta)$

+

$+ \frac{1}{2} (b - x)\, dx\, (l \sin\vartheta - \vartheta \cot\vartheta)$, und

$$\int^{y} dM = \tfrac{1}{2}\, x dx\, (\varphi \cot\varphi - \log.\sin\varphi + l \sin\eta - \eta \cot\eta)$$
$$+ \tfrac{1}{2} (b - x)\, dx\, (\psi \cot\psi - l \sin\psi + l \sin\vartheta - \vartheta \cot\vartheta).$$

Diese Formul muß noch mahl integrirt, und zugleich x, mithin ausser φ und ψ auch η und ϑ veränderlich genommen werden. Hätte die erleuchtete Fläche eine solche Gestalt, daß y von x abhienge, so müste man x und dx durch y und dy, oder umgekehrt y durch x ausdrucken. Hier aber soll ABCD ein Rechteck seyn, dessen Höhe AD, die ich $= c$ nehmen will, und dessen Grundlinie AB $= b$ ist. Diesemnach bleibt PN = AD einerley, wenn sich auch x ändert, und wenn in der Formul, die für $\int^{y} dM$ gefunden ist, $y = c$ gesetzt wird, so hat man die Strahlenmenge, welche PNνp auffängt. Man kann auch y in der Rechnung behalten, und als eine beständige Linie betrachten, so giebt die zweyte Integration die Strahlenmenge, welche das Rechteck AKLB auffängt.

Oben war nun $x^2 = (a^2 + y^2) \tang\varphi^2$, so wie auch $x^2 = a^2 \tang\eta^2$, mithin ist $x dx = (a^2 + y^2) \operatorname{tg}\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi = a^2 \operatorname{tg}\eta\, d\operatorname{tg}\eta$. Ferner war $(b - x)^2 = (a^2 + y^2) \tang\psi^2$, so wie auch $(b-x)^2 = a^2 \operatorname{tg}\vartheta^2$, mithin ist $(b - x)\, dx = -(a^2 + y^2) \operatorname{tg}\psi\, d\operatorname{tg}\psi = -a^2 \operatorname{tg}\vartheta\, d\operatorname{tg}\vartheta$. Diese Werthe geben

$$\int^{y} dM = \tfrac{1}{2} (a^2 + y^2)\, (\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi - \tang\varphi\, l \sin\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi$$
$$- \psi\, d\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}\psi\, l \sin\psi\, d\operatorname{tg}\psi)$$
$$- \tfrac{1}{2} a^2\, (\eta\, d\operatorname{tg}\eta - \operatorname{tg}\eta\, l \sin\eta\, d\operatorname{tg}\eta$$
$$- \vartheta\, d\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta\, l \sin\vartheta\, d\operatorname{tg}\vartheta).$$

Uebrigens findet man $\int \varphi\, d\operatorname{tg}\varphi = \varphi \tang\varphi - \int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi$,

und

und $\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = - \frac{d\,.\cos\varphi}{\cos\varphi} =$
$- d\,.\,l\cos\varphi$, also $\int\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi = \varphi\operatorname{tg}\varphi + l\cos\varphi$.
Ferner wird $\int\operatorname{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi -$
$\int\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, d\,.\,l\sin\varphi$ gefunden, und $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, d\,l\sin\varphi = \frac{1}{2}$
$\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\, \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -$
$\frac{1}{2}\, d\,.\,l\cos\varphi$, mithin ist $\int\operatorname{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi =$
$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi + \frac{1}{2}\, l\cos\varphi$, und dieser Ausdruck von dem vorigen abgezogen giebt $\int\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi - \int\operatorname{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\operatorname{tang}\varphi = \varphi\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\, l\cos\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi$. Diesemnach giebt die zweyte Integration

$$M = \tfrac{1}{2}(a^2+y^2).\left\{\begin{matrix} \varphi\operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{2}\, l\cos\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi \\ -\psi\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{2}\, l\cos\psi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi^2\, l\sin\psi \end{matrix}\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2.\left\{\begin{matrix} \eta\operatorname{tang}\eta + \frac{1}{2}\, l\cos\eta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\eta^2\, l\sin\eta \\ -\vartheta\operatorname{tang}\vartheta - \frac{1}{2}\, l\cos\vartheta + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2\, l\sin\vartheta \end{matrix}\right\}$$
$$+ \text{Const.}$$

Mit x verschwindet zugleich φ und η, so wie M, es wird aber $\psi = FKE$, und $\vartheta = FAE$. Man setze also $FKE = \alpha$, $FAE = \beta$, so wird Const. =

$$\tfrac{1}{2}(a^2+y^2)\,(\alpha\operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}\, l\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha^2\, l\sin\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2\,(\beta\operatorname{tg}\beta + \tfrac{1}{2}\, l\cos\beta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\beta^2\, l\sin\beta),$$

und man erhält

$$M = \tfrac{1}{2}(a^2+y^2).\left\{\begin{matrix} \varphi\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\, l\cos\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi \\ +\alpha\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\, l\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha^2\, l\sin\alpha \\ -\psi\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{2}\, l\cos\psi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi^2\, l\sin\psi \end{matrix}\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2.\left\{\begin{matrix} \eta\operatorname{tg}\eta + \frac{1}{2}\, l\cos\eta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\eta^2\, l\sin\eta \\ +\beta\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{2}\, l\cos\beta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta^2\, l\sin\beta \\ -\vartheta\operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{2}\, l\cos\vartheta + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2\, l\sin\vartheta \end{matrix}\right\}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck giebt die Menge Lichts, welche auf das Rechteck APMK fällt; um

sie

sie für das ganze Rechteck ABLK zu haben, muß man $x = AB = b$ setzen. Alsdann ist $\varphi = FLE = FKE = \alpha$, $\psi = 0$, $\eta = EBF = FAE = \beta$, $\vartheta = 0$; demnach erhält man für das Rechteck AKLB die Strahlenmenge M =

$$(a^2 + y^2)(\alpha tg\alpha + \tfrac{1}{2} l\cos\alpha - \tfrac{1}{2} tg\alpha^2 \, l\sin\alpha)$$
$$- a^2 (\beta tg\beta + \tfrac{1}{2} l\cos\beta - \tfrac{1}{2} tg\beta^2 \, l\sin\beta).$$

Diese Strahlenmenge wirft die von EF nach Y und Z ins unendliche fortlaufende Fläche EFYZ auf AKLB, und es ist dabey zu bemerken, daß die Winkel $\alpha = FKE$ und $\beta = FAE$ von $a = AF$ abhängen. Man hat nemlich $\tan g\alpha = \frac{b}{\surd(a^2 + y^2)}$, und $\tan g\beta = \frac{b}{a}$, und wenn $a = 0$ genommen wird, so ist $\alpha = AKB$, $\beta = 90°$. Weil nun allemahl $a tg\beta = b$ bleibt, so ist auch in dem Fall $a = 0$, zugleich $a^2 tg\beta = \frac{b^2}{\infty} = 0$, ferner wäre zwar $l\cos\beta = l.0 = -\infty$, allein es ist $a^2 l\cos\beta = 0$, so wie $l\sin\beta = l1 = 0$ wird. Man setze nun $AKB = \gamma$, so findet sich die gesammte Strahlenmenge, welche AYZB nach AKLB wirft, $= y^2 (\gamma tg\gamma + \frac{1}{2} l\cos\gamma - \frac{1}{2} tg\gamma^2 \, l\sin\gamma)$ und man hat $tg\gamma = \frac{b}{y}$, $\cos\gamma = \frac{y}{\surd(y^2 + b^2)}$, $\sin\gamma = \frac{b}{\surd(y^2 + b^2)}$.

Man setze diese zuletzt gefundene Strahlenmenge = M′ so hat man diejenige Strahlenmenge, welche AFEB nach AKLB wirft, =

M – M

$$M'-M = y^2\,(\gamma \operatorname{tg}\gamma + \tfrac{1}{2}\, l \cos\gamma - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma^2\, l \sin\gamma)$$
$$+\, a^2\,(\beta \operatorname{tg}\beta + \tfrac{1}{2}\, l \cos\beta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\beta^2\, l \sin\beta)$$
$$-\,(a^2+y^2)\,(\alpha \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}\, l \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha^2\, l \sin\alpha).$$

Für die ganze Fläche ABCD wird alsdenn $y =$ AD genommen.

74. §.

Weil $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, $\operatorname{tang}\beta = \dfrac{b}{a}$, und $\operatorname{tang}\gamma = \dfrac{b}{y}$, so ändern sich nur α und γ mit y. Wird y unendlich groß genommen, so werden α und $\gamma = 0$. Wird also die Strahlenmenge $=$ L gesetzt, welche auf die nach C und D ins unendliche fortlaufende Ebene ABCD fallen würde, so hat man $L = a^2\,(\beta \operatorname{tg}\beta + \frac{1}{2}\, l\cos\beta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta^2\, l \sin\beta)$. Stellt man sich durch EF eben so eine Ebene EFOS mit ABCD parallel vor; so fällt auf selbige eben so viel Licht, mithin auf beyde zusammen eine Menge Licht $= 2L$.

Es sey FO mit AD parallel, und man stelle sich die Ebene DAFO ebenfals nach D und O ins unendliche fort erweitert vor; so ist BAE für diese Ebene, was $\beta =$ FAE für die Ebene ABCD war, und es ist $\operatorname{tang} BAE = \dfrac{a}{b} = \cot\beta$. Wird also die Strahlenmenge, welche AFOD auffienge, $= \lambda$ gesetzt, so ist $\lambda = b^2\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)\cot\beta + \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{1}{2}\cot\beta^2\, l\cos\beta)$; und wenn EBCS eben so eine Ebene durch BE mit der vorigen parallel ist, so fällt auf beyde zusammen die Lichtmenge $= 2\lambda$.

Alle

Alle vier Ebenen durch die Seitenlinien des Rechtecks ABEF fangen alles Licht auf, welches von diesem Rechteck nach allen Seiten ausgehet, und die gesammte Menge desselben ist =

$$2L+2\lambda=2a^2\left(\beta\,\mathrm{tg}\beta+\tfrac{1}{2}\,l\cos\beta-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\beta^2\,l\sin\beta\right)$$
$$+2b^2\left(\left(\tfrac{1}{2}\pi-\beta\right)\cot\beta+\tfrac{1}{2}\,l\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta\right).$$

Es war aber $\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{a}$, also $a=\frac{b}{\mathrm{tg}\beta}$ $=b\cot\beta$, und dieser Werth statt a gesetzt giebt

$$2L+2\lambda=2b^2\left(\beta\cot\beta+\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta-\tfrac{1}{2}\,l\sin\beta\right)$$
$$+2b^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\cot\beta-\beta\cot\beta+\tfrac{1}{2}\,l\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta\right),$$

oder $2L+2\lambda=\pi b^2\cot\beta=\pi ab$.

Diesemnach ist die gesammte Menge Licht, welche das Rechteck ABEF nach allen Seiten um sich her verbreitet, so groß als diejenige, welche ein eben so grosses Rechteck auffienge, wenn die Erleuchtung eines jeden Elements desselben der absoluten Erleuchtung gleich wäre.

75. §.

16 F. **Ein leuchtender Kreis $ADBE$ wirft sein Licht auf die mit ihm parallele Ebene RS: man sucht, wie groß die Erleuchtung eines Elements Mm dieser Ebene sey, wenn dessen Stelle in dieser Ebene gegeben ist.**

Aufl. Es sey CK auf RS senkrecht, so fällt auf K ein grader Strahlenkegel, dessen Axe CK ist, und die Erleuchtung des Elements Kk ist die im 50. §. n. 1. so genannte senkrechte Erleuchtung. Diesemnach ist die Erleuchtung des Elements Kk $=\pi\sin\alpha^2$, wenn der Glanz der leuchtenden Fläche = 1 und der scheinbare Halbmesser CKA = CKB

CKB = α gesetzt wird. Ferner sey Mm ein anderes Element, das von K um den Abstand KM = b entfernt ist, die Höhe KC sey = a, so ist der auf M fallende Strahlenkegel schief, und seine Axe CM ist gegen die Grundfläche ADBE, mithin auch gegen die ihr parallele Ebene RS unter dem Winkel KMC geneigt, dessen Tangente = $\frac{a}{b}$ ist. Die Neigungs-Ebene CKM der Axe CM schneide die Ebene des leuchtenden Kreises in CA, durch M sey MF mit KC parallel, und schneide CA in F, so ist auch MF auf beyde Ebenen senkrecht, und CF = KM = b, ferner nehme man in N ein Element der Kreisfläche an, dessen Lage durch den Winkel ACN = ζ, und den Abstand CN = x, gegeben ist, und setze FN = z, CFN = ζ, so ist $z = \sqrt{(b^2 - 2bx\cos\zeta + x^2)}$ und $\sin\zeta = \frac{x \sin\zeta}{z}$

$= \frac{x \sin\zeta}{\sqrt{(b^2 - 2bx\cos\zeta + x^2)}}$, da dann x nicht grösser als r seyn kann, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Eben die Stelle des Elements N könnte auch durch den Winkel CFN = ζ und den Abstand CN = x vom Mittelpunct gegeben seyn, da dann die Gleichung $x^2 = b^2 - 2bz \cos\zeta + z^2$ den Abstand FN = z bestimmt. Diese giebt $z = b\cos\zeta \pm \sqrt{(x^2 - b^2 \sin\zeta^2)}$, und es muß $\sin\zeta$ nicht grösser, als $\frac{x}{b}$ seyn, dafern z möglich bleiben soll. Es kann aber x nie grösser

als r seyn, mithin $\sin\zeta$ nie grösser als $\frac{r}{b}$.
Die Ebene FMN schneide RS in MG, so ist FNM der Ausflußwinkel, und GMN der Einfallswinkel für die Strahlen, welche das in N befindliche Element nach M schickt, und beyde Winkel sind gleich groß. Wird nun FNM = GMN = φ gesetzt, so ist $\tang\varphi = \frac{a}{z}$, $\cot\varphi = \frac{z}{a}$ $\sin\varphi =$

$\frac{a}{\sqrt{(a^2+z^2)}}$, und $MN = \sqrt{(a^2+z^2)} = z\sec\varphi$ $= a\,\mathrm{cosec}\,\varphi$. Der Flächen-Inhalt des Elements in N sey $= \omega^2$, so ist die Erleuchtung, welche dies Element nach Mm schickt $= \frac{\omega^2 \,.\, \sin\varphi^2}{MN^2} =$

$\frac{\omega^2 \,.\, \sin\varphi^2}{z^2 \sec\varphi^2} = \frac{\omega^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z^2}$. Für alle Elemente von gleicher Grösse, die um einerley Abstand z von F entfernt sind, ist diese Erleuchtung einerley: man beschreibe also mit dem Halbmesser FN $= z$ einen Kreisbogen PNQ, und mit dem Halbmesser F$n = z + dz$, einen andern Bogen pnq, so ist zwischen beyden ein Stück eines ringförmigen Elements PQqp enthalten, wovon alle Strahlen nach M unter einerley Winkel ausgehen, und einfallen, auch ist MN für dies ganze Element PQqp einerley. Es wachse ζ um das Element NF$\nu = d\zeta$, so ist der unendlich kleine Bogen N$\nu = zd\zeta$, und N$n = dz$, also das Element N$nm\nu = zdzd\zeta = \omega^2$, und die Erleuchtung, welche

welche dies Element nach Mm schickt $= \frac{dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z} \cdot d\zeta$. Diese Formul so integrirt, daß ζ allein als veränderlich angenommen wird, giebt die Erleuchtung, welche das Element HNnh nach Mm schickt, $= \frac{\zeta dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z}$, und wenn man $\zeta =$ CFP setzt, so hat man die dem Element HhpP zugehörige Erleuchtung, da dann diejenige, welche dem ganzen Element PQqp zugehört, doppelt so groß ist. Man setze also nun CFP $= \eta$, FCP $= \vartheta$, CP $=$ CA $= r$, so empfängt Mm von dem Element PQqp die Erleuchtung $= \frac{2\eta\, dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z}$. Es ist aber $z = a \cot\varphi$, also $dz = -\frac{a d\varphi}{\sin\varphi^2}$, $\frac{dz}{z} = -\frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}$; wird also die erwehnte Erleuchtung $= dI$ gesetzt, so erhält man $dI = -2\eta\, d\varphi \sin\varphi \cos\varphi$, oder $d \cdot I = 2\eta \cos\varphi \cdot d \cos\varphi$.

Wenn man diese Differential-Formul integrirt, so findet man das Integral $I = \eta \cdot \cos\varphi^2 - \int d\eta \cos\varphi^2 + C$, und das wäre die Erleuchtung, welche das Stück APHQ des leuchtenden Kreises auf Mm wirft: man muß aber noch das Integral $\int d\eta \cos\varphi^2$ suchen, und in solcher Absicht muß man η durch φ oder z ausdrücken, da dann im letzten Fall auch φ durch z ausgedrückt werden kann. Hinzu dient die Gleichung $r^2 = b^2 - 2bz\cos\eta + z^2$, oder $2bz\cos\eta = b^2 - r^2 + z^2$. Man setze

Kürze halber $b^2 - r^2 = c^2$, so giebt die Differentiation $bdz \cos\eta - bzd\eta \sin\eta = zdz$, jene Gleichung selbst aber giebt $\cos\eta = \frac{c^2 + z^2}{2bz}$ und $\sin\eta = \frac{\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}{2bz}$; diese Werthe setze man in die Differentialgleichung, so findet man $\frac{(c^2 + z^2)}{2bz} dz - \frac{1}{2} d\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = zdz$, oder $(c^2 + z^2)\, dz - zd\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = 2z^2\, dz$, und $zd\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = (c^2 - z^2)\, dz$, also $d\eta = \frac{(c^2 - z^2)\, dz}{z\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}$. Weiter ist $\cos\varphi^2 = \frac{z^2}{a^2 + z^2}$, folglich erhält man $d\eta \cos\varphi^2 = \frac{(c^2 - z^2)\, zdz}{(a^2 + z^2)\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}$. Man nehme nunmehro $c^2 + z^2 = 2ay + 2bb$ an, so ist $z^2 = 2ay + 2bb - c^2$, oder $z^2 = 2ay + b^2 + r^2$. Das giebt $zdz = ady$,

$$4b^2 z^2 = 8\, ab^2 y + 4b^4 + 4b^2 r^2$$
$$(c^2 + z^2)^2 = 4a^2 y^2 + 8\, ab^2 y + 4b^4,$$

mithin $4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2 = 4(b^2 r^2 - a^2 y^2)$, ferner wird $c^2 - z^2 = b^2 - r^2 - z^2 = b^2 - r^2 - 2ay - b^2 - r^2$, oder $c^2 - z^2 = -2(r^2 + ay)$. Man setze diese Werthe in die letzte Differentialgleichung, so hat man $d\eta \cos\varphi^2 = - \frac{(r^2 + ay)\, ady}{(a^2 + b^2 + r^2 + 2ay)\sqrt{(b^2 r^2 - a^2 y^2)}} =$

2 (r^2

$$\frac{2(r^2+ay)}{a^2+c^2+2r^2+2ay} \times \frac{-\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(b^2r^2-a^2y^2)}}.$$

Wenn man den Zähler des ersten Factors durch seinen Nenner dividirt, so wird derselbe $= 1 - \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+r^2+2ay}$ gefunden, also

$$d\eta \cos\varphi^2 = \frac{-\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(b^2r^2-a^2y^2)}} + \frac{\frac{1}{2}(a^2+c^2)ady}{(a^2+b^2+r^2+2ay)\sqrt{(b^2r^2-a^2y^2)}}.$$

Man nehme ferner an

$$a^2+c^2 = 2mbr, \text{ also } m = \frac{a^2+c^2}{2br},$$

$$a^2+b^2+r^2 = 2nbr, \text{ also } n = \frac{a^2+b^2+r^2}{2br},$$

$$ay = br \, . \, s, \text{ also } s = \frac{y}{br} = \frac{z^2-b^2-r^2}{2br},$$

und substituire diese Werthe, so findet man $d\eta$

$$\cos\varphi^2 = \frac{-\frac{1}{2}ds}{\sqrt{(1-ss)}} + \frac{\frac{1}{2}m\,ds}{(n+s)\sqrt{(1-ss)}}.$$

Nimmt man nun den Winkel $FCP = FCQ = \vartheta$ an, so hat man $z^2 = b^2 - 2br\cos\vartheta + r^2$, also

$$\cos\vartheta = \frac{b^2+r^2-z^2}{2br} = -s, \text{ und } s = -\cos\vartheta$$

oder $s = \cos(180° - \vartheta)$. Es sey demnach $\varepsilon = 180° - \vartheta$, so ist $s = \cos\varepsilon$, und $\varepsilon = A\cos s$. Weil ferner $\frac{-ds}{\sqrt{(1-ss)}} = d\,.\,A\cos s = d\varepsilon$, so erhält man $d\eta \cos\varphi^2 = \frac{1}{2} d\varepsilon - \frac{\frac{1}{2} m d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon}$, und dieser Werth in der für I gefundenen Gleichung gebraucht giebt $I = \eta \cdot \cos\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} m \int \frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} + C$.

Um endlich noch das Integral $\int \frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon}$ zu finden, setze man tang $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon}$ (459 §. Geom.) $= t$, so ist $\sin\varepsilon = t + t\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2)}$, also $t^2 (1 - \sin\varepsilon^2) = (\sin\varepsilon - t)^2 = \sin\varepsilon^2 - 2t\sin\varepsilon + t^2$, und $2t\sin\varepsilon = \sin\varepsilon^2 (1 + t^2)$, oder $\sin\varepsilon = \frac{2t}{1 + t^2}$: mithin $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Weil nun $d\sin\varepsilon = d\varepsilon \cos\varepsilon$, so ist $d\varepsilon = \frac{d\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$, und man findet $d\sin\varepsilon = \frac{2(1 + t^2)\,dt - 4t^2\,dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{2(1 - t^2)\,dt}{(1 + t^2)^2}$, also $d\varepsilon = \frac{2dt}{1 + t^2}$. Diese Werthe geben $\frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} = \frac{2dt}{1 + t^2} : \left(n + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$, oder $\frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} = \frac{2dt}{n + 1 + (n - 1)t^2} = \frac{2}{n + 1} \cdot \frac{dt}{1 + (n - 1)t^2 : (n + 1)}$, und wenn

man

man $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n+1}} = x$ setzt, so hat man $\frac{dt\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}} = dx$, oder $dt = \frac{dx\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{(n-1)}}$, mithin $\frac{d\varepsilon}{n+\cos\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n-1)}} \cdot \frac{dx}{1+xx}$, und man findet $\int \frac{d\varepsilon}{n+\cos\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n-1)}}$. A. tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}}$, mithin $I = \eta \cdot \cos\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{m}{\sqrt{(n^2-1)}}$ A. tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}} + C$.

Dies Integral muß verschwinden, wenn $z = FA = b - r$ ist, alsdenn ist zugleich $\vartheta = 0$, $\varepsilon = 180^{\circ} = \pi$, $\eta = 0$, $\cos\varphi^2 = \frac{z^2}{\sqrt{(a^2+z^2)}} = \frac{(b-r)^2}{a^2+(b-r)^2}$, $t = \tang \frac{1}{2}\pi = \infty$, also A. tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\pi$, und man findet $C = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{m}{\sqrt{(n^2-1)}}\right)$. Um nun die Erleuchtung zu haben, welche Mm von dem ganzen Kreise empfängt, muß $z = FB = b + r$ genommen werden, da dann zugleich $\eta = 0$, $\vartheta = 180^{\circ} = \pi$, also $\varepsilon = 0$, $t = \tang \frac{1}{2}\varepsilon = 0$ wird, und man findet für den ganzen Kreis $I = C$ =

$= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{m}{\sqrt{(n^2-1)}}\right)$. Es war aber $m = \frac{a^2+c^2}{2br} = \frac{a^2+b^2-r^2}{2br}$, $n = \frac{a^2+b^2+r^2}{2br}$, also $\sqrt{(n^2-1)} = \frac{\sqrt{((a^2+b^2+r^2)^2 - 4b^2 r^2)}}{2br}$: weil ferner $(a^2+b^2+r^2)^2 - 4b^2r^2 = (a^2+b^2)^2 + 2a^2r^2 - 2b^2r^2 + r^4 = (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)r^2 + r^4 + 4a^2r^2$, so ist auch $\sqrt{(n^2-1)} = \frac{\sqrt{((a^2+b^2-r^2) + 4a^2r^2)}}{2br}$, und man erhält

$$I = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a^2+b^2-r^2}{\sqrt{((a^2+b^2-r^2)^2 + 4a^2r^2)}}\right).$$

76. §.

1) Wenn FE den leuchtenden Kreis in E berührt, und man den Halbmesser CE ziehet, so ist CFE der gröste Werth des Winkels η. Es sey derselbe $= \mu$ und FME $= \lambda$, so ist $FE^2 = b^2 - r^2 = a^2 \text{ tg. } \lambda^2$ $ME^2 = a^2 + b^2 - r^2 = a^2 \sec \lambda^2$, $CE = r = a \tang \lambda \tang \mu$. Das giebt

$$\frac{(a^2+b^2-r^2)^2}{(a^2+b^2-r^2)^2 + 4a^2r^2} = \frac{a^4 \sec \lambda^4}{a^4 \sec \lambda^4 + 4a^4 \text{ tg. } \lambda^2 \text{ tg. } \mu^2} = \frac{1}{1 + 4 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 \text{ tg. } \mu^2} = \frac{1}{1 + \sin 2\lambda^2 \text{ tg. } \mu^2},$$

und

und es wird $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin 2\lambda^2 \operatorname{tg.} \mu^2)}}\right)$. Man ziehe EL so, daß FLE = 2FME = 2λ wird, so ist FE = EL . $\sin 2\lambda$. Weil ferner die Ebene FME auf der Kreisfläche senkrecht, und FE beyder Durchschnittslinie ist, so ist CE auf der Ebene FME, (318. §. Geom.) mithin auf EL senkrecht, und man hat EC = FE $\operatorname{tg.} \mu$ = EL . $\sin 2\lambda$. $\operatorname{tg.} \mu$ = EL . tg. ELC, folglich $\sin 2\lambda \operatorname{tg.} \mu$ = tg. ELC, und $\sqrt{(1 + \sin 2\lambda^2 . \operatorname{tg.} \mu^2)}$ = sec . ELC. Diesemnach ist auch $I = \frac{1}{2}\pi$ (1 — cos ELC) = $\frac{1}{2}\pi$ sinv. ELC, oder $I = \pi . \sin \frac{1}{2}$ ELC². (434. §. Geom.)

2) Setzt man $b = 0$, so hat man $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2)}{\sqrt{((a^2 - r^2)^2 + 4a^2 r^2}}\right) = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}\right)$, oder $I = \pi . \frac{r^2}{a^2 + r^2}$ = π sin CKA², und das ist die senkrechte Erleuchtung, welche Kk empfängt, wie schon im Anfang der Auflösung des vor. §. bemerkt ist.

3) Wenn eine veränderliche Grösse y um ihr Differential dy wächst, so ist $d . \sqrt{y} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$, also $\sqrt{(y + dy)} = \sqrt{y} + \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Eben so ist allemahl $\sqrt{(h + e)} = \sqrt{h} + \frac{e}{2\sqrt{h}}$, wenn e in Vergleichung mit h unend-

lich klein ist. Nimmt man nun den Halbmesser r des leuchtenden Kreises unendlich klein an; so ist $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2 r^2}}\right)$, und $\sqrt{((a^2 b^2)^2 + 4a^2 r^2)} = a^2 + b^2 + \frac{2 a^2 r^2}{a^2 + b^2}$, mithin $I = \frac{\pi a^2 r^2}{(a^2 + b^2)^2}$. Es ist aber um πr^2 der Inhalt der Kreisfläche, $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ der Sinus sowohl des Ausfluß- als auch des Einfallswinkels FCM = CMK, und $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = CM, mithin $I = \frac{\pi r^2 \,.\, \sin FCM \,.\, \sin CMK}{CM^2}$, welches mit dem 36. und 38. §. übereinstimmet.

4) Alle Elemente der Ebene RS, die von K um einerley Abstand KM = b entfernt sind, empfangen einerley Erleuchtung, weil a, b, r, mithin auch $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - r^2}{\sqrt{((a^2 + b^2 - r^2)^2 + 4a^2 r^2)}}\right)$, für alle einerley ist. Dies ist auch für sich schon daher klar, weil der auffallende Strahlenkegel MADBE für alle solche Elemente einerley Gestalt und Grösse hat.

77. §.

17 F. Der leuchtende Kreis *ADBE* wirft sein Licht auf einen andern Kreis *FGHI*, und beyde Kreise sind nicht allein parallel, sondern zugleich auf der graden Linie *CK* durch beyder Mittelpuncte senkrecht: man sucht die

die Menge Lichts, welche der Kreis *FGHI* auffängt.

Aufl. Mit dem unbestimmten Halbmesser KM $= x$ sey aus K der Ebene FGHI ein Kreis beschrieben, und mit dem Halbmesser $Km = x + dx$ ein andrer concentrischer Kreis; so empfängt das ringförmige Element zwischen beyden Kreisen, dessen Inhalt $= 2\pi x dx$, durchaus einerley Erleuchtung. (76 §. n. 4.) Um diese Erleuchtung zu finden, erwäge man, daß im 75 §. das b hiesse, was hier x ist. Mithin ist die Erleuchtung des Ringes I

$$= \tfrac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2 + x^2}{\sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2}}\right),$$

wenn KC $= a$, und der Halbmesser des leuchtenden Kreises $= r$ gesetzt wird; und die auf den Ring fallende Strahlenmenge $dM = \pi^2 \left(xdx - \frac{(a^2 - r^2 + x^2)\, xdx}{\sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2}}\right)$. Man setze $4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2 = y$, so ist $4(a^2 - r^2 + x^2)\, xdx = dy$, und $dM = \pi^2 (xdx - \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} dy)$; mithin giebt die Integration $M = \pi^2 (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + C$, oder

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 (x^2 - \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2)} + E),$$

wo E statt $\frac{1}{2}$ C geschrieben ist. Mit x muß M zugleich verschwinden, also wird $E = \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2)^2)} = a^2 + r^2$, und man findet

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 + r^2 + x^2)^2)}).$$

Es ist aber die Grösse unter dem Wurzelzeichen

$$= 4a^2 r^2 + a^4 - 2a^2 r^2 + r^4 + 2(a^2 - r^2) x^2 + x^4$$
$$= a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 + 2(a^2 + r^2) x^2 + x^4 - 4r^2 x^2$$

$= (a^2 + r^2 + x^2)^2 - 4r^2 x^2$;
also auch $M = \frac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{((a^2 + r^2 + x^2)^2 - 4r^2 x^2)})$.

Die Formul giebt die Erleuchtung desjenigen Kreises, wozu der unbestimmte Halbmesser KM $= x$ gehört: wenn also der gegebene Kreis den Halbmesser KF $= \varrho$ hat, so setzt man nach der Integration $x = \varrho$. Es sey FABH eine Ebene durch KC, so ist AFB ein Schnitt durch die Axe CF eines derjenigen Strahlenkegel, die auf den äussern Umfang des erleuchteten Kreises fallen, und zugleich ist dies die Neigungsebene der Axe CF gegen die leuchtende Kreisfläche ADBE. Ueberdem ist $AF^2 = a^2 + (\varrho - r)^2$, $BF^2 = a^2 + (\varrho + r)^2$, also

$$AF^2 = a^2 + r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho,$$
$$BF^2 = a^2 + r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho,$$
$$\tfrac{1}{2}(AF^2 + BF^2) = a^2 + r^2 + \varrho^2,$$
$$AF^2 . BF^2 = (a^2 + r^2 + \varrho^2)^2 - 4r^2 \varrho^2$$

Es ist aber für den Kreis FGHI die Strahlenmenge

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + \varrho^2 - \sqrt{((a^2 + r^2 + \varrho^2)^2 - 4r^2 \varrho^2)}),$$

also auch $M = \pi^2 (\frac{1}{4}(AF^2 + BF^2) - \frac{1}{2} AF . BF)$ $= \frac{1}{4}\pi^2 (BF^2 - 2\, BF . AF + AF^2$, oder $M = \frac{1}{4}\pi^2 (BF - AF)^2$. Man nehme FL $=$ AF, so ist BL $=$ BF $-$ AF, und $M = \frac{1}{4}\pi^2 . BL^2$: das heist, auf FGHI fällt eine eben so grosse Strahlenmenge, als auf einen Kreis fiele, dem der Durchmesser BL gehörte, wenn seine Erleuchtung in allen Elementen der absoluten Erleuchtung gleich wäre.

Nimmt man ϱ unendlich groß an, so ist $a^2 + r^2 + \varrho^2 = \varrho^2$, weil a und r in Vergleichung mit ϱ verschwinden, und man hat $M = \frac{1}{2}\pi^2 (\varrho^2 - \sqrt{(\varrho^4 - 4r^2 \varrho^2)}) = \frac{1}{2}\pi^2 (\varrho^2 - \varrho\sqrt{(\varrho^2 - 4r^2)})$.

Weil

Weil nun $4r^2$ in Vergleichung mit ϱ^2 unendlich klein ist, so hat man $\sqrt{(\varrho^2 - 4r^2)} = \varrho - \frac{2r^2}{\varrho}$, mithin wird $M = \pi^2 \cdot r^2$. Das will sagen: die gesammte Strahlenmenge, welche der leuchtende Kreis nach allen Seiten verbreitet, ist so groß, als die Lichtmenge auf einer dem leuchtenden Kreise gleichen Ebene seyn würde, wenn die Erleuchtung aller ihrer Elemente der absoluten Erleuchtung gleich wäre. Was die Formul in diesem Fall giebt, zeiget auch die Betrachtung der Figur. Wenn nemlich KF unendlich groß wird, so erhellet, daß BF — AF oder BL = AB = $2r$ werde, mithin $M = \frac{1}{4}\pi^2 \cdot 4r^2 = \pi^2 r^2$, wie vorhin.

78. §.

1) Die Lichtmenge, welche der leuchtende Kreis ADBE auf FGHI wirft, ist eben so groß, als diejenige, welche der Kreis FGHI, wenn er leuchtend wäre, auf ADBE werfen würde. (43. §.) Vermöge der gefundenen Regel würde FGHI auf ADBE die Strahlenmenge $\frac{1}{4}\pi^2$ (BF — BH) ^{2} werfen, und weil BH = AF, so ist diese Strahlenmenge auch = $\frac{1}{4}\pi^2$ (BF — AF) ^{2} eben so groß als die vorige, welches mit dem 43 §. übereinstimmet.

2) Weil AB und FH parallel sind, so ist ABH + BHF = 180°, mithin auch ABH + AFH = 180° = BAF + BHF. Folglich liegen die vier Puncte A, B, H, F, im Umfang eines Kreises. (124 §. Geom.) Ein solches Viereck im Kreise aber, wie ABHF, (18 Fig.) hat allemahl die Eigenschaft, daß das Rechteck beyder Diagonallinien 18 F.

AH

AH . BF der Summe der Rechtecke jeder zwoer einander gegen über stehender Seitenlinien AF . BH + AB . FH gleich ist. Man mache nemlich den Winkel FAO = BAH, so ist auch AFO = AHB (123. §. Geom.) mithin das Dr. AFO ∽ Dr. AHB, und man hat AF : FO = AH : BH, mithin AF . BH = FO . AH. Ferner ist auch der Winkel BAO = FAH und ABO = AHF, folglich das Dr. AOB ∽ AFH. Daraus folgt AB : BO = AH : FH, und AB . FH. = BO . AH. Diese Gleichung zu jener addirt giebt AF . BH + AB . FH
17 F. = (FO + BO) AH = BF . AH. In der 17 Fig. ist nun AF = BH und BF = AH, also $AF^2 + AB \cdot FH = BF^2$, also $BF^2 - AF^2 = AB \cdot FH$, und $BF - AF = \frac{AB \cdot FH}{BF + AF} = BL$. Diesemnach wird $M = \frac{1}{4}\pi^2 \cdot \frac{AB^2 \cdot FH^2}{(BF + AF)^2}$ (77. §.) Halbirt man BL in N, so ist $FN = \frac{1}{2}(BF + AF)$, also $(BF + AF)^2 = 4 \cdot FN^2$, und $M = \frac{\pi^2 \cdot \frac{1}{4} AB^2 \cdot \frac{1}{4} FH^2}{FN^2}$ oder $M = \frac{\pi^2 \cdot CA^2 \cdot KF^2}{FN^2}$.

3) Die mittlere Klarheit des Kreises FGHI sey Y, so findet man $Y = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi \cdot FH^2} = \frac{\pi \cdot BL^2}{FH^2}$, also $Y : \pi = BL^2 : FH^2$, und dies ist das Verhältniß der mittlern Erleuchtung des Kreises FGHI zur absoluten Erleuchtung. Braucht man

man den Werth $M = \frac{\pi^2 . CA^2 . KF^2}{FN^2}$, (n. 2.) so ist $Y = \frac{M}{\pi . KF^2} = \frac{\pi . CA^2}{FN^2}$, und $Y : \pi = CA^2 : FN^2$.

4) Mit dem Halbmesser FN sey aus A ein Bogen beschrieben, der die verlängerte Linie CK in O schneidet, so ist $AO = FN$, mithin $Y = \frac{\pi . CA^2}{AO^2}$; aber $\frac{CA}{AO} = \sin . AOC$, also $Y = \pi . \sin AOC^2$. Eben so groß wäre die Klarheit einer unendlich kleinen in O befindlichen mit ADBE parallelen Ebene: diese würde daselbst senkrecht erleuchtet, und AOC wäre der scheinbare Halbmesser des leuchtenden Kreises aus O gesehen. (50. §.)

Der VII. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Zurückwerfung des Lichts, mit einer kurzen Anwendung auf ebene Spiegelflächen.

79. §.

Bey allen bisherigen Untersuchungen über die Klarheit erleuchteter Flächen an einer gegebenen Stelle, auch über die gesammte Lichtmenge, welche

welche die erleuchtete Fläche auffängt, ist die Beschaffenheit der Masse derjenigen Körper, auf deren Oberfläche das Licht fällt, noch gar nicht in Betracktung gezogen worden. Man weis aber schon aus dem 3 §. der Optick, daß einige Massen in der Natur wenigstens einem Theil des auffallenden Lichts den Durchgang verstatten, so wie es gegentheils andre Arten körperlicher Massen giebt, durch welche das Licht nicht hindurch gehet. Jene heissen in so weit **durchsichtig**, in wie weit wenigstens ein Theil des auffallenden Lichts hindurch gehet: diese heissen **undurchsichtig**. Es giebt vollkommen undurchsichtige Massen, die gar kein Licht durchlassen: man kennet aber gar keine **vollkommen durchsichtige** Körper in der Natur, durch welche alles auffallende Licht hindurch gienge. Alle bekannte Körper, wenn sie nicht für sich leuchtend sind, werfen wenigstens einen Theil des auffallenden Lichts zurück, und eben dies Licht, welches sie nach allen Seiten verbreiten, macht es, daß wir sie überall sehen können. Dies wäre also schon ein Fall von der Art, wobey das Licht von seinem gradlinichten Wege (6 §. Opt.) abgelenkt wird, und wenn die Masse, welche das Licht auffängt, durchsichtig ist, so ändert jeder durchgehende Strahl ebenfals seine vorige Richtung. Dies leztere erfolgt allemahl, wenn der Strahl aus einer durchsichtigen Materie in die andre hinüber geht, wie wenn das Licht aus der freyen Luft ins Wasser fällt. Weil übrigens der Weg des Lichts in der neuen durchsichtigen Masse, so lange sie einerley gleichförmige Dichtigkeit behält, wieder gradlinicht ist; (6 §. Opt.) so erfolgt die Aenderung der Richtung nur in der gemeinschaftlichen Gränze beyder durchsichtigen Massen, in der Oberfläche des Wassers, des Glases, und der durchgehende Strahl macht mit dem einfallenden einen gradlinichten Winkel, dessen Spitzen in der gemeinschaftlichen Gränze der beyden ungleich dichten durchsichtigen Massen liegt. Beyde, der einfallende und hindurchgehende Strahl machen zusammen eine gebrochene Linie aus, und eben deswegen heist dieser Erfolg die **Brechung** des Lichts. Weil der zurückgeworfene Strahl so lange wieder in grader Linie fortgehet, als er in einerley durchsichtigen Masse bleibt, so macht der zurückgeworfene Strahl ebenfals mit dem einfallenden einen gradlinichten Winkel, dessen Spitze in der zurückwerfenden Fläche liegt.

80. §.

Es ist eine bekannte Erfahrung, daß man in einem gemeinen Spiegel Sachen siehet, als wenn sie hinter ihm stünden, die doch vor ihm, ja oft seitwärts, auch wohl hinter dem Zuschauer stehen. Unsre gemeinen ebenen Spiegel sind zwar aus Glaß gemacht, auch ist die hintere Fläche der Glaßtafel mit der so genannten Folie belegt, wodurch sie undurchsichtig wird: allein auch Metalle, harte Steine, hartes Holz, dienen als Spiegel, wenn aus solchen Materien Tafeln verfertiget werden, die sorgfältig polirt und glatt gemacht sind, daß man darauf keine merkliche Rauhigkeiten wahrnehmen kann. Reines und klares Glas, wenn es gleich durch Belegung der einen Seite mit Folie nicht undurchsichtig gemacht ist, thut noch die

Wirkung eines Spiegels, obgleich die Bilder alsdenn nicht so lebhaft sind: auch thut klares stillstehendes Wasser eben die Würkung, ob es gleich durchsichtig ist.

Aus diesen Erfahrungen wird man ohne Bedenken folgende Schlüsse ziehen. Es müssen viele von den Lichtstrahlen, welche eine abgebildete Sache auf den Spiegel wirft, ins Auge des Zuschauers kommen, und zwar in eben der Ordnung, wie sie von der Sache selbst gekommen wären, um das Auge in beyden Fällen auf einerley Art zu rühren, weil es sonst nicht in beyden Fällen einerley Empfindung hätte.

Uebrigens ist es eben nicht nothwendig, daß die Spiegelfläche eben sey: auch krumme Flächen thun die Würkung der Spiegel, wenn sie glatt genug polirt sind, nur sind die Bilder alsdenn den abgebildeten Sachen entweder nicht so vollkommen ähnlich, oder sind ihnen auch in Ansehung der Grösse nicht gleich, wie die Bilder in ebenen Spiegeln.

81. §.

Um diese und andre Erscheinnngen bey Spiegeln zu erklären, nimmt man folgenden Grundsatz an:

Der zurückgeworfene Strahl liegt in der Ebene desjenigen Winkels, unter welchem der einfallende Strahl in der Stelle, wo er auffält, gegen die Spiegelfläche geneigt ist; und beyde Strahlen, sowohl der einfallende, als auch der zurückgeworfene sind gegen die Spiegelfläche in

der

der Stelle wo der Strahl auffällt, unter einerley Winkel geneigt.

Allemahl kann man sich durch den Punct, wo der Strahl auffällt, eine grade Linie auf der Spiegelfläche senkrecht vorstellen, die hier das **Einfalls-Loth** (cathetus incidentiae) genannt wird; da dann in dem Fall, wenn die Spiegelfläche krumm ist, dies Einfalls-Loth auf derjenigen Ebene senkrecht seyn muß, welche die Spiegelfläche in dem Punct, wo der Strahl auffält, berührt. Die Ebene durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl ist die Neigungsebene des letztern, in derselben liegt auch der zurückgeworfene Strahl, und sie kann hier die **Zurückwerfungs-Ebene** heissen: die Winkel, welche beyde Strahlen, mit dem Einfallsloth machen, ergänzen die Neigungswinkel der Strahlen gegen die Spiegelfläche zu 90°, und sind beyde gleich groß, weil vermöge des angenommenen Grundsatzes die Neigungswinkel selbst gleich groß sind.

Dieser angenommene Grundsatz kann hier als eine Hypothese betrachtet werden, deren Wahrheit durch Uebereinstimmung der daraus geschlossenen Folgen mit dem, was die Erfahrung lehrt, bestättiget werden muß, sonst kann man sich auch vorläufig durch einen sehr leichten Versuch davon überzeugen. In ein verfinstertes Zimmer läßt man durch eine kleine Oefnung einen Sonnenstrahl fallen, und fängt ihn mit einem wagrecht liegenden ebenen Spiegel auf. Erregt man alsdenn nur ein wenig Staub, den das einfallende und zurück geworfene Sonnenlicht erleuchtet, so stellen sich die Wege der einfallenden und zurück geworfenen

Lichts den Augen sichtbar dar, und man siehet leicht, wie man sich nun durch mehr als ein Hülfsmittel davon versichern könne, daß nicht allein beyde, der einfallende und zurückgeworfene Strahl in einerley Neigungs-Ebene liegen, sondern auch beyde Neigungswinkel gleich groß sind, welches man bey jeden Versuch, und bey jedem Einfallswinkel so befinden wird.

82. §.

19 F. Wenn der strahlende Punct *L* sein Licht auf die ebene Spiegelfläche *XY* wirft, und *LR* auf *XY* senkrecht ist, so haben alle zurück geworfene Strahlen *CD*, *EF*, eine solche Lage gegen einander, daß sie rückwärts verlängert einander insgesammt in einerley Punct *M* schneiden, der in dem Neigungsloth *LR* so weit hinter der Spiegelfläche, als *L* vor derselben liegt.

Beweis. Es sey LC ein einfallender Strahl, so ist LCR die Neigungs-Ebene dieses Strahls gegen die Spiegelfläche, und in derselben Ebene liegt der zurück geworfene Strahl CD so, daß GCD = RCL ist, (81 §.) mithin auch RCL = RCH, wenn man CD rückwärts nach H verlängert. Weil nun RCL = RCH ein spitzer Winkel ist, so müssen CH und LR einander schneiden. Der Durchschnittspunct sey M so sind in den Dreyecken RCL und RCM die Winkel an der gemeinschaftlichen Grundlinie CR gleich, mithin ist RM = RL. Ist ferner LE ein andrer einfallender Strahl, so ist wiederum LER seine Neigungs-Ebene gegen die Spiegelfläche, und in derselben Ebene liegt der

zurück-

zurückgeworfene Strahl EF, so daß REL = IEF = REK ist: mithin muß auch EF rückwärts nach K verlängert das Einfalls-Loth LR in M schneiden.

Man sieht wohl, daß es gleichviel sey, ob beyde einfallende Strahlen LC, LE, in einerley Ebene mit LR liegen, oder nicht, LR ist das Einfalls-loth für alle Strahlen, die von L ausgehen, und die Spiegelfläche treffen können; und wenn gleich LA, LC, LE nicht in einerley Ebene liegen, so schneiden doch ihre Neigungsebenen einander in LR, und alle Strahlen, die von der Spiegelfläche zurück geworfen werden liegen so, als kämen sie von dem Punct M her.

83. §.

Ein Auge, das in der Gegend D oder F den Spiegel betrachtet, fängt einen Theil der zurückgeworfenen Strahlen auf: und weil diese Strahlen in eben der Lage ins Auge kommen, wie geschehen würde, wenn der strahlende Punct L in M befindlich wäre; so hat das Auge eben die Empfindung die es hätte, wenn L würklich in M vorhanden wäre und von M aus die Lichtstrahlen um sich her verbreitete. Deswegen scheint L im M zu stehen, und M ist **das Bild** von L.

Kann man voraussetzen, daß alles auf den Spiegel fallende Licht zurück geworfen wird; so wird das Bild M jede Ebene, die das zurückgeworfene Licht auffängt, vollkommen eben so erleuchten, wie der Punct L selbst diese Ebene bey einerley Lage wie vorhin gegen den Punct M, und in einerley Entfernung, erleuchten würde. Es sey LACE eine auf den Spiegel fallende Strahlenpyramide, und man stelle sich vor, diese würde mit einer Ebene bdf, nachdem der Spiegel weggenommen worden aufgefangen. Hätte man statt dessen $AB = Ab$, $CD = Cd$, $EF = Ef$ genommen, und durch B,D,F eine Ebene gelegt, so finge diese von dem zurückgeworfenen Licht soviel auf, als in dem Raum der Pyramide MBDF enthalten ist, und diese ist der Pyramide $Lbdf$ gleich und ähnlich. Auf ähnlich liegende Elemente beyder Ebenen würde einerley Lichtmenge unter einerley Neigungswinkel fallen, also die Erleuchtung einerley seyn. Beschriebe man um L und M ein paar Kugelflächen mit gleichen Halbmessern, so würde L die zu diesem Mittelpunct gehörige Kugelfläche eben so erleuchten, als M die zu diesem Mittelpunct gehörige erleuchten würde: auch wenn L ein Element einer Fläche wäre, wovon das Licht nach dem Gesetz des 34 §. ausgienge.

84. §.

Wenn OL ein sichtbarer Gegenstand ist, von welcher Gestalt und Grösse man will, so wirft jeder den Spiegel zugekehrte Punct O desselben einen Theil aller von ihm ausgehenden Strahlen auf die Spiegelfläche, und diese werden so zurückgeworfen als kämen sie von einem Punct P hinter der Spiegelfläche, der in dem Neigungs-Loth OS, das diesem Punct zugehört, so weit hinter der Spiegelfläche liegt, als O vor derselben. Demnach hat jeder Punct des Gegenstandes, der sein Licht auf den Spiegel werfen kann, sein Bild hinter der Spiegelfläche in der von ihm darauf senkrecht fallenden graden Linie, so daß Bild und abgebildeter

Punct

Punct gleich weit von der Spiegelfläche entfernt sind. Die Bilder aller Puncte des Gegenstandes liegen hinter der Spiegelfläche vollkommen in eben der Ordnung, wie die abgebildeten Puncte in dem Gegenstande selbst liegen: sie machen also, zusammen genommen ein Bild des ganzen Gegenstandes aus, das demselben gleich und ähnlich ist.

In der Voraussetzung, daß alles auf den Spiegel fallende Licht zurück geworfen werde: wird jede Fläche, welche das vom Spiegel zurück geworfene Licht auffängt völlig eben so erleuchtet, wie der abgebildete Gegenstand selbst diese Fläche bey einerley Lage, wie vorhin gegen das Bild im Spiegel, und in einerley Entfernung, erleuchten würde.

Demnach kann die Berechnung der Erleuchtung völlig nach den bisher vorgetragenen Regeln des III. IV. V. und VI. Abschnitts angestellet werden, nicht anders, als wenn das Bild im Spiegel der leuchtende Gegenstand selbst wäre. Wofern nicht alles Licht zurückgeworfen wird, so kommt es noch darauf an: ob die zurück geworfene Lichtmenge bey jedem Einfallswinkel einerley Verhältniß gegen die einfallende Lichtmenge habe? kann dies vorausgesetzt werden, so muß die Erleuchtung, welche man nach den eben angeführten Regeln findet, in eben dem Verhältniß vermindert werden, wäre dies Verhältniß nicht für jeden Einfallswinkel einerley, so liesse sich zwar noch die Berechnung der Erleuchtung welche das zurückgeworfene Licht verursacht auf die Gründe des III und der folgenden Abschnitte zurück führen: vorher aber müste das Gesetz bekannt seyn, nach welchem sich das Verhältniß der zurückgeworfenen zur einfallenden Lichtmenge bey

Aenderung des Einfallswinkels ändert. Weitere Untersuchungen hierüber werden unten vorkommen, indessen sind unter den krummen Spiegeln die sphärischen vornemlich merkwürdig, und einige angenehme photometrische Untersuchungen, darauf ich mich im folgenden noch werde einlassen müssen, erfordern eine vorläufige Betrachtung darüber, nach welchen Gesetzen das Licht von sphärischen Spiegeln zurückstrahlet.

Diese kurze Betrachtung der Erscheinung, welche ein ebener Spiegel dem Auge darstellt, und der Erleuchtung, welche das zurück geworfene Licht verursachet, mag zur Probe dienen, wie sich aus dem angenommenen Grundsatz des 81 §. die Würkungen der Spiegelflächen erklären lassen. Von andern merkwürdigen Eigenschaften ebener Spiegel, wie auch von krummen Spiegelflächen wird zwar die Catoptrick Unterricht geben: ist eine glatte Oberfläche nicht vollkommen undurchsichtig, wie z. E. die Fläche eines stillstehenden Wassers, einer Glaßtafel, die keinen undurchsichtigen Grund hat, so wird nicht alles Licht, sondern nur ein Theil desselben zurück geworfen, ein Theil geht in die durchsichtige Masse hinein, nachdem vorher jeder eindringende Strahl in der Oberfläche der durchsichtigen Masse eine von der vorigen verschiedene Richtung angenommen, oder daselbst eine **Brechung** gelitten hat.

Der

Der VIII. Abschnitt.

Die Zurückwerfung des Lichts von sphärischen Spiegeln.

85. §.

Es sey AP ein Durchmesser der krummen Linie 20 F.
KMANL, der die ihm zugeordneten Sehnen MN, wie der Haupt-Durchmesser eines Kegelschnitts, senkrecht halbirt: man stelle sich vor die Ebene PAK werde um die Axe AP gedrehet; so beschreibt der Bogen AK eine krumme Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß alle auf der Axe AP senkrechte Schnitte Kreise sind, alle Schnitte aber mit Ebenen, welche durch die Axe AP gelegt werden, mit der Linie KMANL einerley Natur haben. Nun sey entweder die innere hohle, oder auch die äussere erhabene Seite dieser Fläche polirt, damit selbige das darauf fallende Licht nach dem Gesetz des 81 §. zurückwerfe, so bekömmt diese Spiegelfläche den Nahmen von derjenigen krummen Linie KMANL, welche jeder Schnitt der Spiegelfläche durch die Axe AP giebt. Diese Linie AP selbst heist die Axe des Spiegels, und der Punct H sein Scheitel.

Ist KMANL ein Kreisbogen, so entsteht durch die Umdrehung um die Axe AP ein Kugelabschnitt, und der Spiegel heist ein sphärischer Spiegel. Ist eben die krumme Linie sonst ein Kegelschnitt, und AP seine Hauptaxe, so heißt der Spiegel elliptisch, parabolisch, oder hyperbolisch, nachdem die erwehnte Linie eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel ist. Allgemeine Untersuchungen darüber, nach welchen Gesetzen dergleichen Spiegel das Licht zurück werfen, gehören für die Catoptrick: hier aber müssen vorläufig einige Eigenschaften des sphärischen Spiegels erklärt werden.

86. §.

Wenn aus einem Punct *P* der Axe *AP* des krummen Spiegels ein Lichtstrahl *PM* auf den Punct *M* der Spiegelfläche fällt, so liegt der zurückgeworfene Strahl *Mp* in der Ebene *APM*, und er schneidet die Axe *AP* irgendwo in *p*.

Beweis. Die Ebene APM schneide den Spiegel in der krummen Linie KMANL, MT sey eine Tangente derselben und MC in eben dieser Ebene auf der Tangente senkrecht. Noch stelle man sich durch M eine grade Linie RS auf der Ebene APM senkrecht vor, so wird diese den Kreis, dessen Durchmesser MN ist berühren, so wie MT den Bogen AMK berührt, und die Ebene TMS ist eine Berührungs-Ebene des Spiegels in dem Punct M. Denn durch Umdrehung um die Axe AP beschreibt MT eine Kegelfläche, welche die Ebene TMS in der graden Linie MT berührt, die Spiegelfläche aber im Umfang des Kreises, wozu der Durchmesser MN gehört. Dieser Kreis aber und die grade Linie MT haben nur den Punct M gemein: also berührt die Ebene TMS die Spiegelfläche in M, und MC ist auf dieser Berührungsrungsebene in M senkrecht. Demnach ist APM die Ebene der Zurückstrahlung, und der zurückgeworfene Strahl muß die Axe des Spiegels irgendwo in p schneiden.

87. §.

Die Figur stelle einen Schnitt durch die Axe eines Kugelspiegels vor: man soll die Stelle p finden, worin der aus P einfallende Strahl PM nach seiner Zurückwerfung die Axe des Spiegels schneidet. 20 F.

Aufl. Dieser Voraussetzung gemäß ist MAN ein Kreisbogen, und die Normallinie MC ist ein dazu gehöriger Halbmesser, mithin zugleich ein Halbmesser der Kugel, und C ihr Mittelpunct. Nun sey dieser Halbmesser $AC = MC = r$, und der Winkel $ACM = \gamma$, der Abstand $AP = \delta$, die gesuchte Linie $Ap = x$; so ist $MQ = r \sin\gamma$, $CQ = r \cos\gamma$, und man hat $Cp = r - x$, $CP = \delta - r$. Ferner ist im Dreyeck CpM des Winkels

CMp Tangente $= \dfrac{Cp \,.\, \sin\gamma}{r - Cp \,.\, \cos\gamma}$, und im Dreyeck

CPM ist tg. $CMP = \dfrac{CP \sin\gamma}{r + CP \,.\, \cos\gamma}$. Nach dem

Gesetz der Zurückstrahlung aber müssen beyde Winkel, also auch ihre Tangenten gleich groß seyn,

und man erhält $\dfrac{Cp}{r - Cp \cos\gamma} = \dfrac{CP}{r + CP \cos\gamma}$.

Aus dieser Gleichung kann Cp gefunden werden, mithin auch $x = r - Cp$. Die Rechnung giebt $r \,.\, Cp. + Cp \,.\, CP \,.\, \cos\gamma = r \,.\, CP - Cp \,.\, CP \,.\, \cos\gamma$,

also

also $Cp = \frac{CP \,.\, r}{r + 2CP \,.\, \cos\gamma} = \frac{\delta - r}{\frac{1}{2}r + (\delta - r)\cos\gamma}$

$. \frac{1}{2}r$, oder $Cp = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r - (\delta - r)\,\sin v\gamma} \,.\, \frac{1}{2}r.$

Man setze $\frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = n$, so ist $Cp =$

$\frac{n}{1 - n\,\sin v\gamma} \,.\, \frac{1}{2}r$, und man findet $x =$

$\left(1 - \frac{\frac{1}{2}n}{1 - n\,\sin v\gamma}\right) . \, r.$ Weil ferner

$\frac{1}{1 - n\,\sin v\gamma} = 1 + \frac{n\,\sin v\gamma}{1 - n\,\sin v\gamma}$, so ist auch

$x = \left(1 - \frac{1}{2}n - \frac{\frac{1}{2}n^2\,\sin v\gamma}{1 - n\,\sin v\gamma}\right) . \, r$, und wenn

man $1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} = m$ setzt, so hat man x

$= \left(1 + m - \frac{n^2\,\sin v\gamma}{1 - n\,\sin v\gamma}\right) . \, \frac{1}{2}r.$

88. §.

Weil $\sin v\gamma$ mit dem Winkel γ zugleich verschwindet, so hat man $x = \frac{1}{2}r\,(1 + m)$, wenn $\gamma = 0$ wird. Es ist aber auch sehr nahe $x = \frac{1}{2}r\,(1 + m)$, so lange γ ein sehr kleiner Winkel bleibt: demnach werden alle Strahlen, die wie Pm, $P\mu$, sehr nahe bey der Axe einfallen, auch sehr nahe in einerley Punct π der Axe nach der Zurückwerfung vereiniget, und machen daselbst ein Bild von P, dessen Entfernung $A\pi$ vom Scheitel A des Spie-

gels

gels $= \frac{1}{2}r\,(1+m) = \frac{1}{2}r \left(1 + \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}\right)$ ist, oder $A\pi = \frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r} \cdot \frac{1}{2}r$. Ein Auge in der Gegend O empfängt die zurückgeworfene Strahlen so, als kämen sie von dem Punct π her, und wird davon eben so gerührt, als wenn der Punct P selbst in π befindlich wäre.

Weil die Zahl $\frac{\sin v\,.\,\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ mit γ wächst, so werden nicht alle aus P auf den Spiegel fallende Strahlen in einerley Punct der Axe AP vereiniget. So lange $\delta > r$ ist, so lange sind m und n positive eigentliche Brüche, und weil $x = Ap = \frac{1}{2}r \left(1 + m - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right)$ war, so ist $Ap < A\pi$.

Wäre MAN ein Elliptischer Bogen, also auch der Spiegel selbst ein Elliptischer und P ein Brennpunct der Ellipse, so würde der Punct p der Axe, durch welchen der zurückgeworfene Strahl geht, der andre Brennpunct seyn, und dies bey jeder Grösse des Winkels APM. Dies folgt aus derjenigen Eigenschaft der Ellipse, welche im 302 §. der Perspectiv sowohl für die Ellipse, als auch alle Kegelschnitte überhaupt ist bewiesen worden. Alle Strahlen, die aus P auffielen, würden also nach der Zurückwerfung durch p laufen, so wie umgekehrt, wenn p ein strahlender Punct wäre, alle aus p auffallende Strahlen nach der Zurückwerfung durch P laufen würden. Jeder Brennpunct wäre also ein Bild eines strahlenden Puncts, der

seine

seine Stelle im andern Brennpunct hätte, und dies Bild wäre vollkommener und deutlicher, als das Bild p des Puncts P beym Kugelspiegel ist. Weil übrigens doch die sehr nahe bey der Axe auffallenden Strahlen ein ziemlich deutliches Bild in π machen, so betrachtet man π als das eigentliche Bild des Punets P, und nennt πp die von der Kugelgestalt herrührende **Abweichung** des zurückgeworfenen Strahls Pp; mithin ist diese Abweichung

$$\pi p = \frac{n^2 \sin v \,.\, \gamma}{1 - n \sin v \,.\, \gamma} \,.\, \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{2} nr \,.\, (n \sin v\gamma + n^2 \sin v\gamma^2 + n^3 \sin v\gamma^3 + \ldots).$$

89. §.

Der ganze Spiegel KMANL ist allemahl ein Kugelabschnitt, und man kann den Durchmesser KL seiner Grundfläche messen, der auch die Breite, oder der **Durchmesser der Oefnung** des Spiegels heist. Wenn überdem der Halbmesser derjenigen Kugel bekannt ist, wovon der Spiegel ein Abschnitt ist; so hat man $\frac{\frac{1}{2}KL}{r}$ sin ACK, und

$$\cos ACK = \frac{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} KL^2)}}{r}.$$ Wird demnach in der Gleichung $\pi p = \frac{n^2 \sin v \,.\, \gamma}{1 - n \sin v \,.\, \gamma} \,.\, \frac{1}{2} r$ der Winkel γ = ACK genommen, so läßt sich die Abweichung der äussersten auf den Spiegel fallenden Strahlen für eine gegebene Entfernung δ finden.

21 F. Es sey also πp die Abweichung der äussersten Strahlen, so erhellet, daß alle Strahlen, die von

von Puncten des Bogens AK zurückgeworfen werden, durch Puncte der Axe laufen, die zwischen π und p liegen. Durch π sey πq auf der Axe senkrecht gesetzt, und diese senkrechte Linie schneide den äussersten zurückgeworfenen Strahl Kp in q; so erhellet, daß alle aus Puncten des Bogens AK zurückgeworfene Strahlen durch Puncte der Linie πq laufen. Diese Linie πq heist die **Seitenabweichung** des Spiegels, so wie πp seine **Längenabweichung**. Alle von P auf den Spiegel fallende Strahlen gehen nach ihrer Zurückwerfung durch einen auf AP senkrechten Kreis, dessen Mittelpunct π und Halbmesser πq ist, und man findet $\pi q = \pi p \,.\, \text{tang}\,.\, Cpq$. Wenn nun durch γ der Winkel ACK verstanden wird, so hat man im Dreyeck pCK für den Winkel CpK die Gleichung $\text{tang}\, CpK = \frac{r \sin\gamma}{Cp - r\cos\gamma}$, also $\text{tg}.\, Cpq = \frac{r\sin\gamma}{r\cos\gamma - Cp}$. Es sey $\text{sinv}.\gamma = v$, so ist $Cp = \frac{n}{1 - nv} \,.\, \frac{1}{2}r$. (87 §.) Das giebt $\text{tg}.\, Cpq = \frac{(1 - nv)\sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}$, und man hat $\pi p = \frac{n^2 v}{1 - nv} \,.\, \frac{1}{2}r$, (88 §.) also auch $\pi q = \frac{n^2 v \sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n} \,.\, \frac{1}{2}r$. Setzt man nun $\pi p = p$, $\pi q = q$, so ist $\frac{1}{2}n^2 vr = (1 - nv)\,p$, und $q = \frac{(1 - nv)\,p \sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}$.

Weil

Weil sin$v \cdot \gamma$, $= v$ angenommen ist, so verhält sich anfangs $\frac{v}{1 - nv}$ beynahe wie sin$v \cdot \gamma$, so lange γ klein ist, und weil sin$\gamma = \surd\ (2 -$ sin$v\gamma)$ sin$v . \gamma$, so verhält sich bey eben der Voraussetzung beynahe sinγ wie $\surd$ sin$v \cdot \gamma$, also $v =$ sin$v \cdot \gamma$ wie sinγ^2, und v sinγ ist die halbe Breite des Spiegels. Weil sich nun die Längen-Abweichung anfangs wie v, d. i. wie sin$v \cdot \gamma$ also wie sinγ^2 verhält; so ist sie dem Quadrat der halben oder ganzen Breite des Spiegels proportional. Ferner verhält sich die Seitenabweichung beynahe wie v sinγ, also wie sinγ^3 so lange γ klein ist, mithin wie der Würfel der halben oder ganzen Breite des Spiegels.

90. §.

21 F. Es sey qr der ganze Durchmesser des Seitenabweichungskreises, so erhellet, daß alle Strahlen, die auf dem Bogen AL fallen, nach ihrer Zurückwerfung durch πr gehen. Der äusserste von den Strahlen, welche der Bogen AK zurück wirst, sey Kq, der die Axe in p schneidet, so erhellet, daß alle Strahlen, welche der Bogen AL zurück wirft, durch pq gehen, und diese Linie irgendwo schneiden müssen. Einer von den zunächst bey A zurück geworfenen sey $m\pi$, so schneidet er pq in einem Punct, der noch sehr nahe bey p liegt. Ein weiter nach L hin von M zurückgeworfener Strahl sey Mk, der die Axe in k, den Halbmesser des Seitenabweichungs-Kreises πr in ω, pq aber in s schneidet, so liegt s nicht mehr so nahe bey p, als der Durchschnittspunct des Strahls $m\pi$ mit pq.

Je

Je weiter M nach L rückt, desto weiter rückt anfangs s von p weg, aber nur bis auf eine gewisse Gränze. Wenn nemlich M dem Punct L näher rückt, so rückt zugleich k weiter gegen p, und ω gegen r, bis zuletzt k in p und ω in r, so wie M mit L zusammen fällt; demnach muß zugleich s wieder in p fallen und ps verschwinden.

Auf der Axe AP sey st senkrecht, so ist st der Halbmesser eines auf AP senkrechten Kreises, der durch Umdrehung der Figur um die Axe AP beschrieben wird. Alle Strahlen, die der Bogen AM zurück wirft, gehen durch ts, und alle Strahlen, die der Theil des Spiegels zurück wirft, welchen AM durch Umdrehung um die Axe AP beschreibt, gehen durch desjenigen Kreises Fläche, dem der Halbmesser ts zugehört. Man nehme an, daß AM derjenige Bogen sey, dem der gröste Werth von ps zugehört, auch sey AN = AM, so wie AK = AL genommen ist; so wird ts verlängert durch den Punct u gehen, worin Lr und Kq einander schneiden, weil die Dreyecke kpu und kps, so wie ptu und pts auf einander passen müssen; ferner wird $tu = ts$ und us der Durchmesser des Kreises, wozu der Halbmesser ts gehörte. Alle Strahlen, die ML zurück wirft, laufen durch Puncte der Axe, zwischen k und p, mithin auch durch su: durch eben diese Linie su laufen demnach alle Strahlen, die der Bogen AL zurück wirft. Wie nun eben das von allen Strahlen wahr ist, die der Bogen AK zurück wirft; so erhellet, daß alle Strahlen, die der Spiegel zurück schickt, durch die Fläche des Kreises gehen, wozu der Durchmesser su gehört.

Alle auf der Axe AP senkrechte Schnitte desjenigen körperlichen Raums, worin das vom Spiegel zurück geworfene Licht ausgebreitet ist, sind Kreise und unter allen diesen Kreisen ist derjenige, dessen Durchmesser su vorstellet, der kleinste, deswegen kann derselbe der kleinste **Sammlungskreis** des Spiegels heissen.

91. §.

Den Durchmesser des kleinsten Sammlungskreises, für den sphärischen Hohlspiegel und seine Entfernung von der Mitte des Spiegels zu finden.

Aufl. Wenn durch γ in den allgemeinen Formuln des 89 §. der Winkel ACM = ACN verstanden wird, so ist πk die Längenabweichung, und $\pi\omega$ die Seitenabweichung für die Strahlen, welche der Spiegel aus M und N zurück wirft, und man hat $\frac{\pi\omega}{\pi k} = \frac{ts}{tk} = \frac{(1 - nv)\sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}$, (89 §.) also $tk = \frac{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}{(1 - nv)\sin\gamma} \cdot ts$.

Für die äussersten Strahlen, die auf den Spiegel fallen können, sey der Winkel ACK = ACL = α, so hat man $\frac{\pi q}{\pi p} = \frac{ts}{tp} =$

$\frac{(1 - n\sin v\alpha)\sin\alpha}{(1 - n\sin v\alpha)\cos\alpha - \frac{1}{2}n}$, also $tp =$

$\frac{(1 - n\sin v\alpha)\cos\alpha - \frac{1}{2}n}{(1 - n\sin v\alpha)\sin\alpha} \cdot ts$, wofür ich kürzer $tp = \mu \cdot ts$ setzen will, so ist $\mu =$

cosα

$\frac{\cos\alpha - \frac{1}{2}n : (1 - n \sin v\alpha)}{\sin\alpha}$. Ferner hat man $Ct = Cp - pt = Ck + tk$, und $Ck = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r$, $Cp = \frac{n}{1 - n \sin v\alpha} \cdot \frac{1}{2}r = D$, also

$D - \mu \cdot ts = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r + \frac{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}{(1 - nv)\sin\gamma} \cdot ts$. Aus dieser Gleichung wird ts mittelst folgender Rechnung gefunden. Man setze $ts = z$, so ist auch $D - \mu \cdot z = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r + z \cot\gamma - \frac{\frac{1}{2}n\, z}{(1 - nv)\sin\gamma}$,

und wenn $\frac{\frac{1}{2}n}{1 - nv} = \lambda$ gesetzt wird, so erhält man $D - \mu \cdot z = \lambda \cdot r + z \cot\gamma - \lambda \cdot z \operatorname{cosec}\gamma$: das giebt $z = \frac{D - \lambda \cdot r}{\mu + \cot\gamma - \lambda \operatorname{cosec}\gamma}$, oder $z = \frac{(D - \lambda r)\sin\gamma}{\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \lambda}$.

Diese Formul verschwindet nicht allein wenn $\gamma = 0$, sondern auch wenn $\gamma = \alpha$ ist, wie erfordert wird, und die fernere Auflösung der Aufgabe kommt darauf an, denjenigen Winkel γ zu finden, der z am grösten giebt, da dann dieser gröste Werth von z der gesuchte ist. Weil man aber voraussehen kann, daß die fernere Rechnung etwas verwickelte Formuln giebt, und bey den gebräuchlichsten Hohlspiegeln, der Bogen AK nur wenige

Grade beträgt; so dient folgende Verkürzung dazu, die gesuchte Auflösung wenigstens beynahe zu finden. Die höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ und $\sin v\gamma$ lasse man weg, so ist $D = (n + n^2 \sin v\alpha) \cdot \frac{1}{2}r$, und $\lambda = \frac{1}{2}(n + n^2 \sin v\gamma)$, also $D - \lambda r = \frac{1}{2}n^2 (\sin v\alpha - \sin v\gamma)\, r$. Ferner ist beynahe $\sin v\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha^2$, $\sin v \cdot \gamma = \frac{1}{2}\sin\gamma^2$, also auch $D - \lambda \cdot r = \frac{1}{4}n^2 (\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2) \cdot r$. Eben so findet man

$$\mu = \frac{\cos\alpha - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 \sin v \cdot \alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n - (1 + \frac{1}{2}n^2)\sin v \cdot \alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha^2}{\sin\alpha},$$ und $\cos\gamma - \lambda =$

$1 - \sin v \cdot \gamma - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 \sin v \cdot \gamma = 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\gamma^2$, also $\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \lambda =$

$$\frac{(1 - \frac{1}{2}n)(\sin\gamma + \sin\alpha) - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha \sin\gamma (\sin\gamma + \sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Diese Werthe geben $z = \dfrac{(D - \lambda \cdot r)\sin\gamma}{\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \gamma}$

beynahe $= \dfrac{\frac{1}{4}n^2 r (\sin\alpha - \sin\gamma)\sin\alpha \sin\gamma}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha \sin\gamma}$, und

der Factor $\dfrac{\frac{1}{4}n^2 \sin\alpha}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha \sin\gamma}$

bleibt sehr nahe $= \dfrac{\frac{1}{4}n^2 \sin\alpha}{1 - \frac{1}{2}n}$, wenn gleich γ von 0 bis α wächst; deswegen kann man ohne erheblichen Fehler annehmen, es werde z am grösten, wenn $(\sin\alpha - \sin\gamma)\sin\gamma$ am grösten wird.

Dies

Dies erfolgt in dem Fall $\sin\gamma = \frac{1}{2}\sin\alpha$, folglich ist der gesuchte Werth $z = \frac{1}{16}$.

$$\frac{n^2 r \sin\alpha^3}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha^2},$$ oder auch noch so nahe, als hier nöthig ist, $z = \frac{1}{16} \cdot \frac{n^2 r}{1 - \frac{1}{2}n} \cdot \sin\alpha^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{n^2 r}{2 - n} \cdot \sin\alpha^3$.

Wenn man im 89. §. den Winkel $\gamma = \alpha$ setzt, so hat man daselbst $\pi q = \frac{n^2 v \sin\alpha}{(1 - nv)\cos\alpha - \frac{1}{2}n}$ $\cdot \frac{1}{2}r$, und $v = \sin v \cdot \alpha$ beynahe $= \frac{1}{2}\sin\alpha^2$, also $(1 - nv)\cos\alpha = (1 - \frac{1}{2}n \sin\alpha^2)\ 1 - \frac{1}{2}\sin\alpha^2 = 1 - \frac{1}{2}(1 + n)\sin\alpha^2$; folglich $\pi q =$

$$\frac{\frac{1}{2}n^2 \sin\alpha^3}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + n)\sin\alpha^2} \cdot \frac{1}{2}r,$$ oder auch noch nahe genug $\pi q = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 r}{2 - n} \cdot \sin\alpha^3$. Wenn demnach der Bogen AK, welcher die halbe Breite des Spiegels bestimmt, wenige Grade fasset, so ist ziemlich nahe z oder $ts = \frac{1}{4}\pi q$; also ist der kleinste Sammlungskreis 16 mahl kleiner, als der Abweichungskreis der äussersten Strahlen, welche zunächst beym Rande vom Spiegel zurück geworfen werden.

Weil μ beynahe $= \frac{1 - \frac{1}{2}n}{\sin\alpha}$ war, so ist $tp = \mu \cdot z = \frac{1}{16} \cdot n^2 r \sin\alpha^2$, und weil hier $\gamma = \alpha$ gesetzt, die höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ wegfallen, so ist aus dem 88 §. $\pi p = \frac{1}{2}n^2 r \sin v\alpha =$

 $\frac{1}{4}n^2$

$\frac{1}{4} n^2 r \sin\alpha^2$, mithin $pt = \frac{1}{4} \pi p$, wie auch schon daraus folgt, weil $ts = \frac{1}{4}\pi q$ war. Diesemnach ist $\pi t = \frac{3}{4} \pi p$, und der kleinste Sammlungskreis liegt dem Spiegel um $\frac{3}{4}$ der Abweichung näher, als das Bild, welches die zunächst bey der Axe einfallenden Strahlen machen.

92. §.

Je weiter der strahlende Punct P vom Spiegel wegrückt, je grösser also δ ist, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = n$ der Einheit, und in dem Fall, wenn δ in Vergleichung mit r unendlich groß wird, erhält man $n = 1$. In der allgemeinen Formul $x = \left(1 + m - \frac{n^2 \sin v \,.\, \gamma}{1 - n \sin v \,.\, \gamma}\right) . \frac{1}{2}r$ (87 §.) wird also $m = 1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$ kleiner, wenn δ wächst, so wie zugleich $n = 1 - \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$ grösser wird. Demnach wird x kleiner, und die Abweichung wächst, so daß in dem Fall $\delta = \infty$, der Abstand $x = \frac{1}{2}r \left(1 - \frac{\sin v \,.\, \gamma}{\cos \gamma}\right)$ gefunden wird. Dieser Voraussetzung gemäß sind alle auf dem Spiegel fallende Strahlen mit der Axe des Spiegels parallel, und das Bild, welches die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen, nach ihrer Zurückwerfung machen, ist um den Abstand $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel entfernt, die Abwei-

weichung der übrigen aber $= \frac{\sin v \cdot \gamma}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{2}r$.
Wenn demnach γ für alle auffallende Strahlen nur ein kleiner Winkel bleibt, so ist diese Abweichung für die mit der Axe parallel einfallenden Strahlen $= \frac{1}{2}r \sin v \cdot \gamma = \frac{1}{2}AD$.

93. §.

Um die bisher betrachteten Linien desto besser zu unterscheiden, setze man $AF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} r = f$, so ist F das Bild, welches die zunächst bey der Axe mit ihr parallel einfallenden Strahlen Qm machen, und dieser Punct F heist des Spiegels Brennpunct. Ist die Axe des Spiegels gegen die Sonne gerichtet, so fallen die Strahlen der Sonne, welche von dem Punct ihrer Oberfläche kommen, welchen die Axe trift, mit der Axe parallel ein, die nächsten bey der Axe vereinigen sich nach der Zurückwerfung in F, und verursachen daselbst eine Hitze, die brennbare Sachen entzünden kann: daher ist der Nahme Brennpunct entstanden. Ferner sey $ACK = \alpha$, und $Ff = \frac{\sin v \cdot \alpha}{\cos \alpha}$ 22 F.

$\cdot \frac{1}{2}r = \frac{\sin v \cdot \alpha}{\cos \alpha} \cdot f = \varphi$, so ist φ die Abweichung der äussersten parallel-Strahlen, die auf den Spiegel fallen können, und $Af = f - \varphi$.

Wenn dagegen aus dem Punct P auf eben den Spiegel Strahlen fallen, wovon die nächsten bey der Axe ihren Vereinigungspunct in π haben, die äussersten aber nach der Zurückwerfung durch p laufen; so setze man $A\pi = g$, $\pi p = \psi$, so ist

 $g =$

$g = \frac{1}{2}r\,(1+m) = \frac{\delta f}{\delta - f}$, $\psi = \frac{n^2\ \sin v \alpha}{1 - n\ \sin v\ .\ \gamma}$ $.\ f$, und $Ap = g - \psi$, da dann in den meisten Fällen $\varphi = f\ .\ \sin v\ .\ \alpha$, und $\psi = n^2\ .\ f\ .\ \sin v\ .\ \alpha = \left(\frac{\delta - 2f}{\delta - f}\right)^2\ .\ f\ .\ \sin v\ .\ \alpha$ angenommen werden kann.

Der Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises für Strahlen, die mit der Axe parallel einfallen, ist $= \frac{1}{4} f\ .\ \sin \alpha^3$, und sein Abstand von der Mitte des Spiegels $= f - \frac{3}{4}\varphi$. Ferner war $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$, also $2 - n = \frac{\delta}{\delta - f}$, und $\frac{n^2}{2 - n} = \frac{(\delta - 2f)^2}{\delta\,(\delta - f)}$; demnach ist für Strahlen, die aus P auf den Spiegel fallen, der Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises $= \frac{1}{4}\ .\ \frac{(\delta - 2f)^2}{\delta\,(\delta - f)}\ .\ f\ .\ \sin \alpha^3$, und sein Abstand von der Mitte des Spiegels $= g - \frac{3}{4}\psi$.

94. §.

Bey allen diesen Schlüssen ist vorausgesetzt worden, daß $\delta > r$ sey: nähert sich nun P dem Spiegel so weit, daß $\delta = r$ wird, oder $\delta = 2f$, so wird auch $g = 2f = r$, und $\psi = 0$, auch verschwindet der Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises: das heist alle Strahlen, die aus dem Mittelpunct der Kugel auf ihre innere hohle Fläche fallen, laufen auch nach der Zurückwerfung insgesamt durch den Mittelpunct. Es fallen nemlich sich alle solche Strahlen senkrecht auf die Kugelfläche, und werden daher in sich selbst senkrecht zurück geworfen. Der Kugelspiegel hat hierin die Natur eines elliptischen Spiegels, dessen beyde Brennpuncte im Mittelpunct zusammen fallen, so wie auch der Kreis eine Ellipse ist, wovon beyde Brenupuncte in einen, nemlich dem Mittelpunct, des Kreises, zusammen fallen.

Wird $\delta < 2f$, oder $\delta < r$, so wächst $A\pi = g = \frac{\delta f}{\delta - f}$ sehr schnell, und $\pi p = \psi = \left(\frac{\delta - 2f}{\delta - f}\right)^2 . f. \sin v\alpha$ wächst ebenfals. Weil dieser Ausdruck positiv bleibt, so ist noch $Ap = g - \psi < A\pi$, und der Vereinigungspunct der äussersten Strahlen liegt wiederum näher beym Spiegel, als der Vereinigungspunct derjenigen, die zunächst bey der Axe einfallen. Uebrigens wächst auch aufs neue der Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises, wenn δ unter $2f$ abnimmt: in eben diesem Fall müssen die Formuln, welche im 91 §. mit Weglassung der höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ und $\sin v\gamma$ gefunden sind, mit Vorsicht gebraucht werden, weil $n = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ nun negativ ist, und schnell wächst, wenn δ unter $2f$ abnimmt. Im Nenner der für z gefundenen Formul wird der weggelassene Theil $\frac{1}{2}(1 + n \frac{1}{2} n^2) \sin\alpha \sin\gamma$ immer beträchtlicher in Vergleichung mit $1 - \frac{1}{2}n$, folglich die dortige Rechnung desto fehlerhafter je mehr sich δ der Linie $f = \frac{1}{2}r$ nähert. 23 F.

95. §.

24 F. Wird $\delta = f = \frac{1}{2}r$, das heist, wenn der strahlende Punct P im Brennpunct stehet, so wird g unendlich groß, so wie auch ψ. Dies ist nemlich der Fall der parallel einfallenden Strahlen umgekehrt. Wie aber nicht alle parallel einfallende Strahlen in den Brennpunct zurückgeworfen werden, so wirft auch der Spiegel nicht alle aus dem Brennpunct auffallende Strahlen mit der Axe parallel zurück. Für den Winkel ACK $= \alpha$ ist Ap = $\left(2 - n - \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) . f$ (87 §.) = $\frac{2 - n - 2n \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha} . f$, und setzt man $n = \infty$, so wird dies Ap = $\frac{1 + 2 \sin v\alpha}{\sin v\alpha} . f = 2f + \frac{f}{\sin v\alpha}$. Hieraus wird begreiflich, warum die Abweichung unendlich groß wird: wenn aber gleich die Formuln im 91 §. zugleich den Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises, so wie seinen Abstand vom Spiegel unendlich groß zu geben scheinen; so muß man doch vermöge der schon vorgetragenen, die im 91 §. vorgekommenen Formuln betreffenden, Erinnerungen erwegen, daß selbige nun völlig unbrauchbar werden. Diesemnach muß die Auflösung der Aufgabe des 91. §. für den Fall $\delta = f$ besonders gesucht werden.

96. §.

Der strahlende Punct befindet sich im Brennpunct des sphärischen Hohlspiegels,

man sucht den Halbmesser des kleinsten Abweichungskreises, und seinen Abstand von der Mitte des Spiegels.

Aufl. In den allgemeinen Formuln des 91 §. setze man $n = \infty$, so erhält man $D = - \frac{f}{\sin v \cdot \alpha}$, $\lambda r = - \frac{f}{\sin v \cdot \gamma}$, also $D - \lambda r = \frac{f}{\sin v \gamma} - \frac{f}{\sin v \alpha} = \tfrac{1}{2} f. \left(\frac{1}{\sin\gamma^2} - \frac{1}{\sin\alpha^2} \right)$, weil die Voraussetzung bleibt, daß der Winkel α nur klein sey: also ist auch $D - \lambda r = \frac{\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2}{\sin\alpha^2 \sin\gamma^2} \cdot 2f$, und $(D - \lambda r) \sin\gamma = \frac{\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2}{\sin\alpha^2 \sin\gamma} \cdot 2f$. Ferner ist $\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{2 \sin\alpha \sin v \cdot \alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha^3} = \frac{1 + \cos\alpha \sin\alpha^2}{\sin\alpha^3}$, und $\cos\gamma - \lambda = \cos\gamma + \frac{1}{2 \sin v \gamma} = \frac{1 + \cos\gamma \cdot \sin\gamma^2}{\sin\gamma^2}$; also

$$\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \lambda = \frac{\sin\gamma + \cos\alpha \sin\alpha^2 \sin\gamma}{\sin\alpha^3} + \frac{1 + \cos\gamma \sin\gamma^2}{\sin\gamma^2} =$$

$$\frac{\sin\gamma^3 + \cos\alpha \sin\alpha^2 \sin\gamma^3 + \sin\alpha^3 + \cos\gamma \sin\gamma^2 \sin\alpha^3}{\sin\alpha^3 \sin\gamma^2}.$$

Diese Werthe geben $z =$

$$\frac{2f(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha^3(1+\cos\gamma\sin\gamma^2)+\sin\gamma^3(1+\cos\alpha\sin\alpha^2)}.$$

Der Nenner ist auch $= (1 + \cos\alpha\sin\alpha^2)$ $\left(\frac{1+\cos\gamma\sin\gamma^2}{1+\cos\alpha\sin\alpha^2}\,.\,\sin\alpha^3 + \sin\gamma^3\right)$, und der Bruch $\frac{1+\cos\gamma\sin\gamma^2}{1+\cos\alpha\sin\alpha^2}$ bleibt sehr nahe $= 1$, wenn gleich γ, von o bis x wächst, ferner ist auch $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\sin\alpha^2}$ sehr nahe $= \sin\alpha$; deswegen kann $z = \frac{2f(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha^3 + \sin\gamma^3}$ angenommen werden, und man findet den Winkel γ welchem der gröste Werth z zugehört, aus der Gleichung $\frac{dz}{d\gamma} = o$. Die Differentialrechnung giebt $(\sin\alpha^3 + \sin\gamma^3)(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)\cos\gamma - 2\sin\gamma^2\cos\gamma) - 3(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)\sin\gamma^3\cos\gamma = o$, oder $(\sin\alpha^3 + \sin\gamma^3)(\sin\alpha^2 - 3\sin\gamma^2) - 3(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)\sin\gamma^3 = o$, und nach gehöriger Multiplication $\sin\alpha^5 - 3\sin\alpha^3\sin\gamma^2 - 2\sin\alpha^2\sin\gamma^3 = o$. Das giebt ferner $\frac{\sin\alpha^3}{\sin\gamma^3} - 3\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} - 2 = o$, und man siehet leicht, daß dieser Gleichung die Wurzel $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 2$ ein Genüge leiste. Setzt man nun $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \mu$ und dividirt

vidirt die Gleichung $\mu^3 - 3\mu - 2 = 0$ durch $\mu - 2$, so findet man die reine quadratische Gleichung $\mu^2 + 2\mu + 1 = 0$, und die Wurzeln sind beyde $= -1$. Beyde geben $z = 0$, also ein minimum, aber $\mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 2$ das gesuchte maximum; also hat man wie im 91 §. für den grösten Werth z ebenfals $\sin\gamma = \frac{1}{2}\sin\alpha$, es wird aber dieser gröste Werth $z = \frac{4}{3} f . \sin\alpha$, oder $z = \frac{2}{3} r \sin\alpha$: mithin beträgt des kleinsten Sammlungskreises Halbmesser $\frac{2}{3}$ von der halben Breite, und sein Durchmesser $\frac{2}{3}$ der ganzen Breite des Spiegels.

Oben war $\mu = \frac{1 + \cos\alpha \sin\alpha^2}{\sin\alpha^3}$, und es ist $tp = \mu . ts = \mu . z$, (91 §.) also in dem jetzigen besondern Fall $tp = \frac{4}{3} . \frac{1 + \cos\alpha \sin\alpha^2}{\sin\alpha^2} . f = \frac{4}{3} (\cos\alpha + \operatorname{cosec}\alpha^2) f$. Ferner ist $Ap = 2f + \frac{f}{\sin v\alpha}$, also der Abstand des kleinsten Sammlungskreises von der Mitte des Spiegels $At = Ap + pt = 2f \left(1 + \frac{1}{2 \sin v\alpha} + \frac{2}{3} . \frac{1 + \cos\alpha \sin\alpha^2}{\sin\alpha^2}\right)$. Weil $\sin\alpha^2$ beynahe $= 2 \sin v\alpha$, und $1 + \cos\alpha \sin\alpha^2$ beynahe $= 1$, so hat man auch ziemlich nahe $At = 2f(1 + \frac{5}{3} \operatorname{cosec}\alpha^2.)$

Es sey $\alpha = 5°$, so ist $\operatorname{cosec}\alpha = 11,4737$, $\operatorname{cosec}\alpha^2 = 131,6458$, und $At = 220,41 . 2f = 440,82 . f$; also ist der gröste Sammlungskreis

$440\frac{4}{5}$

$440\frac{4}{5}$ mahl weiter als der Brennpunct vom Spiegel entfernt, oder $220\frac{2}{5}$ mahl weiter als der Mittelpunct der Kugel, wovon der Spiegel ein Abschnitt ist.

97. §.

Wenn der strahlende Punct P der Mitte des Spiegels noch näher liegt, als der Brennpunct, also $\delta < f$ ist, so wird $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$ negativ, das
25 F. heißt: Strahlen, die aus P zunächst bey der Axe auf den Spiegel fallen, haben nach der Zurückwerfung eine solche Lage, worin sie die Axe des Spiegels nicht auf eben der Seite schneiden können, wo der Brennpunct liegt, aber rückwärts verlängert schneiden sie die gleichfals verlängerte Axe des Spiegels in einem Punct π, der hinter dem Spiegel liegt, in der Entfernung $A\pi = \frac{\delta f}{f - \delta}$.

Ferner ist die Zahl $n = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{r - \delta}{\frac{1}{2}r - \delta}$ oder $n = \frac{2f - \delta}{f - \delta} = 2 + \frac{\delta}{f = \delta}$ nun größer als 2, sie nähert sich der Zahl 2 wenn δ noch weiter abnimmt. Die Zahl $m = 1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r - \delta} = \frac{-f}{f - \delta}$ ist nun negativ und größer als 1, also $1 + m = 2 - n = -\frac{\delta}{f - \delta}$ eine negative

gative Zahl, und $Ap = \left(1 + m - \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) . f = - \left(\frac{\delta}{f - \delta} + \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) . f$ negativ. Wie nun $A\pi = (1 + m) f$ auch negativ ist, so liegen π und p beyde hinter dem Spiegel, und es ist $Ap > A\pi$.

Hiemit hat es aber nur so lange seine Richtigkeit, als $\sin v . \alpha < \frac{1}{n}$ oder $\sin v . \alpha < \frac{\frac{1}{2}r - \delta}{r - \delta}$ bleibt. Die Abweichung $\pi p = \psi = \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}$ wächst mit $\sin\alpha$, und wird unendlich groß in dem Fall $\sin v\alpha = \frac{1}{n}$. Wird $\sin v\alpha > \frac{1}{n}$, so verwandelt sich die Lage der Linie $\pi p = \psi$ in die entgegen gesetzte, und man hat nun $Ap = - \frac{\delta f}{f - \delta} + \frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} . f$. So lange alsdenn $\sin v\alpha$ die Zahl $\frac{1}{n}$ nur wenig übertrift, bleibt die Abweichung sehr groß; und so lange alsdenn $\frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} . f > \frac{\delta f}{f - \delta}$, oder $\pi p > A\pi$ ist, so lange ist Ap wieder positiv und die auffallenden Strahlen schneiden nach der Zurückwerfung die Axe in einem Punct, der vor dem Spiegel liegt.

Weil

Weil nun $\sin v\alpha$ nicht grösser als 2 werden kann, wenn auch α bis zu 180° wächst, so kann

$\frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} = n + \frac{n}{n \sin v\alpha - 1}$ nicht kleiner

als n also auch nicht kleiner als $\frac{\delta}{\delta - f}$ oder $n - 2$

werden. Demnach gilt das eben gesagte für alle Strahlen, die noch auf den Spiegel fallen können, wenn $\sin\alpha$ anfängt, die Zahl $\frac{1}{n}$ zu übertreffen.

98. §.

Was nun insbesondre die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen Am, An, betrift, so machen selbige zwar nach der Zurückwerfung kein **physisches Bild**, wie in allen den Fällen, so lange $\delta > f$ bleibt; weil jedoch in dem Fall $\delta < f$ ein Auge in O von dem zurückgeworfenen Licht eben so gerührt wird, als käme es von π her; so wird selbiges eben die Empfindung haben, welche es hätte, wenn der Spiegel nicht da wäre, und P selbst in π befindlich wäre. Deswegen ist nun π ein **geometrisches Bild** von P, wie beym ebenen Spiegel 83 §; jedoch stellt der ebene Spiegel ein vollkomneres Bild dar, als der sphärische, weil **alle** vom ebenen Spiegel zurückgeworfenen Strahlen so liegen, als kämen sie vom Bilde hinter dem Spiegel her, welches beym sphärischen Spiegel nur von denjenigen gilt, die von Stellen zunächst bey der Axe zurück geworfen werden. So wie übrigens in dem bisher betrachteten

Fäl-

Fällen, so lange $\delta > f$ ist, auch π ein Vereinigungspunct war, in welchem die Strahlen nach der Zurückwerfung würklich zusammen laufen; so ist hingegen in dem Fall $\delta < f$ der Punct π für die zurückgeworfenen Strahlen ein Zerstreuungspunct, weil selbige nicht zusammen laufen, sondern auseinander fahren in eben der Lage, als wenn sie einander in π geschnitten hätten.

99. §.

Noch ist der Fall merkwürdig, wenn mehrere Lichtstrahlen VM, Wm, auf den sphärischen Hohlspiegel in einer solchen Lage fallen, daß selbige, wenn sie der Spiegel nicht auffienge, die Axe desselben in einerley Punct P hinter dem Spiegel schneiden würden. Nun liegt der Punct P nicht auf eben der Seite, wo des Kugelspiegels Mittelpunct liegt, und die Linien AP $= \delta$, AC $= r$ haben eine entgegen gesetzte Lage, so daß man vor δ das entgegengesetzte Zeichen setzen, oder δ in den Formuln als negativ betrachten muß. Das giebt 26 F.

$n = \dfrac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, und $m = - \dfrac{\frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}$. Demnach ist A$\pi = g = (1 + m) f = \dfrac{\delta f}{\delta + f}$, und A$p$ = $x = \left(\dfrac{\delta}{\delta + f} - \dfrac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . f$. Das Bild π liegt nun näher beym Spiegel, als der Brennpunct, und rückt dem Spiegel desto näher, je kleiner AP $= \delta$ wird, auch verschwindet Aπ nicht, bevor δ verschwindet.

 100. §.

100. §.

In allen bisher betrachteten Fällen, wächst die Abweichung $\pi p = \frac{n^2 \sin\gamma}{1 - n \sin\gamma} \cdot f$, wenn γ wächst. Wird diese Abweichung $= A\pi$, so verschwindet Ap, oder p fällt in A, und dies erfolgt, wenn $1 + m$, oder $2 - n = \frac{n^2 \sin v \cdot \gamma}{1 - n \sin v \cdot \gamma}$ ist. Diese Gleichung giebt $2 - n - 2n \sin v \cdot \gamma = 0$, also $\sin v \cdot \gamma \frac{2 - n}{2n}$; und weil $2 - n = \frac{\delta}{\delta - f}$

$n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ ist, so geht der zurückgeworfene Strahl durch A in dem Fall $\sin v\gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta - 2f}$.

Fallen die Strahlen also mit der Axe parallel ein, so geht der zurückgeworfene Strahl durch A, wenn $\sin v \cdot \gamma = \frac{1}{2}$, mithin $\gamma = 60°$ ist. In dem Fall aber, wenn die Strahlen so einfallen, daß sie gegen einen Punct der Axe hinter dem Spiegel zusammen laufen, geht der zurückgeworfene Strahl durch A, wenn $\sin v \cdot \gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta + 2f}$ ist.

101. §.

27 F. Ein Strahl PM fällt auf den Spiegel in M, und es ist $ACM = \alpha$ gegeben; ein andrer Strahl PN in derselben Ebene APM fällt auf N sehr nahe bey M, so daß der Bogen MN von seiner Sehne nicht merklich verschieden ist; man sucht den Punct Q, worin der

der aus N zurückgeworfene Strahl Nq den aus M zurück geworfenen Mp schneidet.

Aufl. Die Lage des aus M zurück geworfenen Strahls ist durch AP und den Winkel ACM $= \alpha$ gegeben: denn es ist CMp = CMP, also sin. CM$p = \frac{CP \sin\alpha}{PM}$, oder sin CM$p$ =

$$\frac{CP \sin\alpha}{\sqrt{(r^2 + 2r\, CP \cos\alpha + CP^2)}}$$ und es ist nur noch erforderlich, daß man MQ suche. Man setze CMp = CMP $= \beta$, CPM $= \pi$, so ist $\alpha = \pi + \beta$, ApM $= \pi + 2\beta$, Aq N $= \pi + 2\beta + d\pi + 2d\beta$, also MQN $= pQq =$ AqN – ApM $= d\pi + 2d\beta$. Ferner sey aus Q mit dem Halbmesser QN der Bogen NL, und aus P mit dem Halbmesser PN der Bogen NK beschrieben; so sind NLM und NKM als gradlinichte Dreyecke zu betrachten, die bey K und L einen rechten Winkel haben, mithin ist NK = MN $\cos\beta$, = NL. Es ist aber QN oder QM, (weil beyde nur um ein Differential verschieden sind,) $= \frac{NL}{MQN}$ und eben so PM =

$$\frac{NK}{MPN}, \text{ also } \frac{QM}{PM} = \frac{MPN}{MQN} = \frac{d\pi}{d\pi + 2d\beta},$$

oder $\frac{QM}{PM} = \frac{1}{1 + 2d\beta \,.\, d\pi}$. Im Dreyeck PCM aber ist $\frac{\sin\pi}{r} = \frac{\sin\beta}{\delta - r}$, also $\frac{d\pi \cos\pi}{r}$

$$= \frac{d\beta \cos\beta}{d - r}, \text{ oder } \frac{d\beta}{d\pi} = \frac{(\delta - r)\cos\pi}{r \cos\beta},$$

 und

und $1 + \frac{2d\beta}{d\pi} = \frac{r \cos\beta + 2\ (\delta - r)\ \cos\pi}{r \cos\beta}$:

mithin erhält man $QM = \frac{PM\ .\ r \cos\beta}{r \cos\beta + 2\,(\delta - r) \cos\pi}$.

Aus C lasse man CD, CE, auf den einfallenden Strahl PM, und seinen zurück geworfenen Mp senkrecht fallen, so ist $MD = ME = r \cos\beta$, $PD = (\delta - r) \cos\pi$, also $r \cos\beta + (\delta - r) \cos\pi = MD + DP = PM$, und $r \cos\beta + 2\ (\delta - r) \cos\pi = PM + PD = 2PM - MD$; das giebt $QM = \frac{PM\ .\ MD}{2PM - MD}$. Wenn demnach $QM = 2\ PM = p$, $MD = ME = q$ gesetzt wird, so ist $z = \frac{p\ .\ q}{2p - q} = \frac{p}{p - \frac{1}{2}q}\ .\ \frac{1}{2}q$, und diese Formul ist der im 88 §. gefundenen $A\pi = \frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r}\ .\ \frac{1}{2}r$ ganz ähnlich; jene verwandelt sich in diese, wenn $ACM = \alpha$ verschwindet, weil alsdenn $p = PA = \delta$, und $q = CA = r$ wird.

Die Linien p und q sind vermittelst des Winkels $ACM = \alpha$ gegeben, wenn auch der Halbmesser $CM = CA = r$, und die Entfernung $PA = \delta$ gegeben sind. Es ist nemlich $p = \surd\ ((\delta - r)^2 + 2\ (\delta - r)\ r \cos\alpha + r^2)$; ferner ist $q = r\ .\cos$ CMP, also $q = \frac{r\ (r + (\delta - r) \cos\alpha)}{\surd\ (r^2 + 2r\,(\delta - r) \cos\alpha + (\delta - r)^2)}$, und man findet $p\ .\ q = r\ (r + (\delta - r) \cos\alpha)$, $2p - q = \frac{2\ (\delta - r)^2 + 3\ (\delta - r) \cos\alpha + r^2}{\surd\ (r^2 + 2r\,(\delta - r) \cos\alpha + \delta - r)^2)}$;

das

das giebt $z =$

$$\frac{r(r+(\delta-r)\cos\alpha)\surd(r^2+2r(\delta-r)\cos\alpha+(\delta-r)^2)}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2}.$$

Ist P so weit entfernt, daß man δ in Vergleichung mit r unendlich groß annehmen kann, so ist auch p unendlich groß, und man erhält $z = MQ = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}r\cos\alpha$.

Wenn der einfallende Strahl die Peripherie des Kreises, wozu der Bogen AM gehört, in F schneidet, und der zurückgeworfene Strahl MQ schneidet eben diese Peripherie in G, so ist $MF = MG = 2MD = 2ME = 2q$, also $q \frac{1}{4} MF$, und $MQ = \frac{PM}{PM - \frac{1}{4}MF} \cdot \frac{1}{4}MF$ für Strahlen, die mit der Axe parallel einfallen, ist $MQ = \frac{1}{4}MF = \frac{1}{4}MG$.

102. §.

Der zurückgeworfene Strahl MQ schneidet die Axe AP in p, und man findet $Mp = \surd(Cp^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha + r^2)$. Im 87 §. war $Cp = \frac{r(\delta-r)}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$, also ist $r^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha$

$$= \frac{r^2(r+2(\delta-r)\cos\alpha) - 2r^2(\delta-r)\cos\alpha}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$$

$= \frac{r^3}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$, und $Cp^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha$

$$+ r^2 = \frac{r^2(\delta-r)^2 + r^3(r+2(\delta-r)\cos\alpha)}{(r+2(\delta-r)\cos\alpha)^2},$$

mithin $Mp = \frac{r\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\cos\alpha+(\delta-r)^2)}}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$.

In dem Fall, wenn δ in Vergleichung mit r unendlich groß ist, hat man $Mp = \frac{\frac{1}{2}r}{\cos\alpha}$, folglich in eben diesem Fall MQ . MP $= \frac{1}{4}r^2$, oder die Hälfte des Halbmessers ist zwischen den beyden Linien MQ und MP die mittlere Proportionallinie.

Der Punct Q ist ein Bild des Puncts P, welches die Strahlen machen, die der sehr kleine Bogen MN zurück wirft. Wenn dagegen RMm einen zur Axe AC gehörigen Parallelkreis vorstellet; so wirft der Spiegel alle auf diesen Parallelkreis fallenden Strahlen nach p zurück. Durch AC lege man noch eine Ebene CAm, welche die vorige CAM unter einem sehr kleinen Winkel schneidet, auch sey Nn ein kleiner Bogen eines Parallelkreises durch N, so erhellet, daß die Strahlen, welche das Element MmnN der Spiegelfläche zurück wirft, ein zwiefaches Bild machen, und zwar das eine in Q, weil ein Theil der auffallenden Strahlen wegen der Krümmung des Elements MmnN, in so weit sie mit der Krümmung des Bogens MN übereinkommt, nach der Zurückwerfung sich in Q vereiniget. Das andre Bild liegt in p, weil der übrige Theil der auffallenden Strahlen wegen der Krümmung des Elements MmnN, in so weit sie mit der Krümmung des Bogens Mm übereinkommt, nach der Zurückwerfung seinen Vereinigungspunct in p hat.

28 F.

103. §.

103. §.

Die Gesetze zu finden, nach welchen ein erhabener Kugel-Spiegel das Licht zurück wirft.

Aufl. Die im 87. §. gefundenen Formuln sind ganz allgemein, und werden leicht auf den erhabenen sphärischen Spiegel KAL vermittelst folgender Schlüsse angewandt. Man nehme an, der Halbmesser r wachse ohne Aufhören, und werde zuletzt unendlich groß; so verwandelt sich im 87 §. die 29 F.

Formul $Ap = \left(\frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r} - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . \frac{1}{2}r$ in folgende $Ap = - \delta$, weil nun beständig $r \sin v\gamma = 0$ bleibt. Das heist, alle auffallende Strahlen haben nach der Zurückwerfung eine solche Lage, als kämen sie von einem Punct der Axe hinter dem Spiegel her, der davon eben soweit als P vor dem Spiegel entfernt ist. Wie nun vermöge der Voraussetzung $r = \infty$ der Spiegel sich in einen ebenen Spiegel verwandelt, so geben die Formuln eben das, was im §. vom ebenen Spiegel schon bewiesen ist. Nach dem Gesetz der Stetigkeit kann nun r negativ werden, daß heist, der Kugel Mittelpunct kann auf der andern Seite von A liegen, und so verwandelt sich der Spiegel in einen erhabenen, der die erhabene Seite gegen P kehrt. Diese Voraussetzung giebt $n = \frac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, und $m = - \frac{\frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, also $x = Ap = - \left(\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . \frac{1}{2}r$. Wie nun diesen Schlüssen gemäß in der Rechnung δ positiv bleibt, so giebt die Formul x negativ, so lange $\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} >$. $\frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ bleibt, das heist nun wiederum Ap und AP sind einander entgegen gesetzt, p liegt hinter dem Spiegel, die Strahlen fahren nach der Zurückwerfung aus einander, als kämen sie von p hinter dem Spiegel her.

104. §.

29 F. Ist γ sehr klein, so hat man für den erhabenen Spiegel $x = -\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} \cdot \frac{1}{2}r$. Wird also $A\pi = \frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta + \frac{1}{2}r}$ genommen, so liegen die Strahlen nach der Zurückwerfung so, als kämen sie aus π her, und π ist zwar ein Bild von P aber kein physisches, sondern ein geometrisches Bild. Indessen hätte doch ein Auge in O eben die Empfindung die es haben würde, wenn der Spiegel nicht da, und P in π befindlich wäre. Der Punct π ist hier kein Sammlungs- sondern ein Zerstreuungspunct, wie beym ebenen Spiegel und beym sphärischen Hohlspiegel in dem Fall, welcher im 98 §. ist betrachtet worden. Wenn nun $A\pi = g$ gesetzt wird, so hat man $g = -\frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, und in dem Fall $\delta = \infty$, wird dieser Abstand $= -\frac{1}{2}r$, wie beym Hohlspiegel nur mit entgegen gesetzter Lage. Wird $AF = \frac{1}{2}AC$ genommen, so liegen

liegen Strahlen, die mit der Axe parallel auf den Spiegel fallen, nach der Zurückwerfung so, als kämen sie von F her. Der Punct F heist des erhabenen Spiegels **geometrischer Brennpunct**, weil er kein Sammlungs- sondern ein Zerstreuungspunct ist, also kann auch AF die Brennweite heissen, die in der Rechnung negativ wird.

Man setze nun wiederum $\frac{1}{2}r = f$, so ist f die Brennweite, des Bildes π Abstand $g = \frac{-\delta f}{\delta + f}$, und man verwandelt diejenigen Formuln für den hohlen Kugelspiegel, welche statt des Halbmessers r die Brennweite $f = \frac{1}{2}r$ enthalten, in Formuln für den erhabenen Kugelspiegel, wenn man f negativ annimmt. Für jeden andern Winkel γ ist

$$x = Ap = -\frac{\delta f}{\delta + f} + \frac{n^2 \operatorname{sinv}\gamma}{1 - n \operatorname{sinv}\gamma} \cdot f, \text{ und}$$

$\frac{n^2 \sin\gamma}{1 - n \sin\gamma}$ ist die Abweichung wegen der Kugelgestalt, die Zahl $n = \frac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r} = \frac{\delta + 2f}{\delta + f}$ angenommen. Beym hohlen Kugelspiegel war $g = \frac{f}{\delta - f}$ grösser als f, hier ist $g = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ $\lessdot -f$, also liegt das Bild π dem Spiegel näher als der Brennpunct; vom hohlen Spiegel ist es weiter als der Brennpunct entfernt. Uebrigens liegt auch hier p näher beym Spiegel als π, und p rückt dem Spiegel desto näher, je grösser γ wird.

Wenn $\operatorname{sinv} . \gamma = \frac{2 - n}{2n} = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta + 2f}$ ist, (100 §.) so verschwindet Ap, und die Abweichung wird dem Abstand des Bildes gleich, dies erfolgt also für Strahlen, die mit der Axe parallel auffallen, wiederum alsdenn, wenn $\sin v\gamma = \frac{1}{2}$ und $\gamma = 60°$ ist. Wird $\sin v\gamma$ noch grösser, so liegt p mit P auf einer Seite des Spiegels. Ob aber gleich Ap nun positiv wird, so kann doch p kein Sammlungspunct werden, sondern bleibt ein Zerstreuungspunct, weil die Strahlen noch immer nach der Zurückwerfung auseinander fahren, eben so, als kämen sie von p her.

Wenn δ abnimmt, so nimmt auch $g = A\pi = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ ab, und in dem Fall $\delta = f$ hat man $g = -\frac{1}{2}f$. Ein Punct also, der um die Brennweite vom Spiegel entfernt ist, hat sein Bild um die halbe Brennweite hinter dem erhabenen Spiegel. Uebrigens verschwindet g mit δ zugleich.

105. §.

Fallen die Strahlen VM, Wm, so auf den erhabenen Spiegel, daß sie, wenn der Spiegel nicht da wäre, hinter demselben in einem Punct P zusammen laufen würden; so muß man in den Formuln, so wie sie nun schon für den erhabenen Spiegel geändert sind, auch nach δ negativ setzen. Das giebt für die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen $A\pi = g = \frac{\delta f}{f - \delta} = -\frac{\delta f}{\delta - f}$.

So lange $\delta < f$ ist, so lange ist dieser Ausdruck
30 F. positiv, das Bild π liegt vor dem Spiegel und ist ein würkliches physisches Bild, ein Sammlungs-

punct

punct für die zunächst bey der Axe auffallenden, und von daher zurück geworfenen Strahlen. Wie nun ferner $Ap = \frac{\delta f}{f - \delta} + \frac{n^2 \sin v . \gamma}{1 - n \sin v . \gamma} . f$, und $n = \frac{2f - \delta}{f - \delta} = 2 + \frac{\delta}{f - \delta}$ ist, so ist $Ap > A\pi$, also ist p weiter vom Spiegel entfernt als das Bild π. Indessen bestehet diese letzte Folge nur so lange, als $\sin v \gamma < \frac{1}{n}$ ist. Mit γ wächst nemlich die Abweichung πp bey einerley δ, und wenn δ von f nur wenig verschieden, also n eine grosse Zahl ist, so wird γ noch nicht sehr groß seyn, wenn schon $\sin v . \gamma = \frac{1}{n}$ wird. Alsdenn ist die Abweichung unendlich groß, und der von M zurück geworfene Strahl mit der Axe parallel. Wird $\sin v . \gamma > \frac{1}{n}$, so wird die Abweichung πp negativ, und Anfangs sehr groß, so daß p weit hinter dem Spiegel fällt, demselben aber näher rückt, wenn γ noch weiter wächst.

Mit δ wächst $A\pi = \frac{\delta f}{f - \delta}$, und wenn $\delta = f$ wird, das heist, wenn die einfallenden Strahlen so liegen, daß selbige im Brennpunct des Spiegels zusammen laufen würden; so ist $A\pi$ unendlich groß, oder die zunächst bey der Axe einfallenden Strahlen werden mit der Axe parallel zurück geworfen. Auch ist n, mithin die Abweichung

$\frac{n^2 \sin\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ unendlich groß. Weil jedoch $Ap = - \left(2 - n - \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) f$ ist, oder $Ap = - \left(2f - \frac{nf}{1 - n \sin v\alpha}\right)$, so wird in dem zuletzt betrachteten Fall $\delta = f$, und $n = \infty$, dies $Ap = - \left(2f + \frac{f}{\sin v\alpha}\right)$.

106. §.

31 F. Wird $\delta > f$, so ist $A\pi = - \frac{\delta f}{\delta - f}$ wieder negativ, und π ist ein geometrisches Bild hinter dem Spiegel für die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen. Auch ist $Ap = - \frac{\delta f}{\delta - f} + \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$. So lange übrigens $\delta < 2f$ ist, so lange ist $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ negativ, und allemahl $Ap < A\pi$. In dem Fall $\delta = 2f$ ist $n = 0$, und $Ap = A\pi = - 2f$. Die Strahlen fallen vermöge dieser Voraussetzung alle so auf, daß sie gegen den Mittelpunct des Kugelspiegels zulaufen: mithin fallen sie alle senkrecht auf die Kugelfläche, und werden in sich selbst in grade entgegen gesetzter Richtung zurück geworfen.

Wird endlich $\delta > 2f$, so ist $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$

= 1

$= 1 - \frac{f}{\delta - f}$ allemahl ein positiver eigentlicher Bruch, und $\frac{1}{n} > 1$. Weil nun der Bogen AM nie grösser als 90° werden kann, so bleibt $sinv\gamma$ allemahl kleiner als 1 und mithin $sinv.\gamma < \frac{1}{n}$. Demnach liegt die Abweichung πp allemahl von π gegen A zu, sie wächst mit γ, und wird $= A\pi$, wenn $sinv\gamma = \frac{2-n}{2n}$, $=$ also hier $sinv.\gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta - 2f}$ ist. Wird γ noch grösser, so liegt p vor dem Spiegel auf der Seite, wo die Strahlen herkommen.

107. §.

Nunmehro sey PM ein Strahl, der auf eine Stelle M des Spiegels fällt, die durch den Winkel ACM $= \alpha$ gegeben ist, und PN ein andrer Strahl in derselben Ebene APM, der sehr nahe bey M auf N fällt: wenn alsdenn die zurückgeworfenen Strahlen rückwärts verlängert einander in Q schneiden, so hat man MQ vermittelst der im 101 §. schon gegebenen Auflösung, wenn man r negativ annimmt. Verlängert man PM bis zum zweyten Durchschnittspunct B mit dem Bogen AM, so hat MB eine Lage, die derjenigen entgegen gesetzt ist, welche diese Sehne im 101 §. hatte, wie denn solches auch die Formul MB $= 2r$ cos PMC anzeigt, wenn r negativ ist. Diesemnach ist MQ 32 F.

$= -$

$$= - \frac{PM}{PM + \frac{1}{4}MB} \cdot \tfrac{1}{4}MB,$$ und das Zeichen — zeigt an, daß hier der Punct Q hinter dem Spiegel liege, kein Sammlungspunct, sondern ein Zerstreuungspunct sey. Will man PM und MB durch δ, r, und α ausdrücken, so hat man $MQ = -$

$$\frac{r((\delta+r)\cos\alpha - r)\sqrt{(r^2 - 2r(\delta+r)\cos\alpha + (\delta+r)^2)}}{2(\delta+r)^2 - 3r(\delta+r)\cos\alpha + r^2}.$$

Noch sey durch die Axe AP eine andre Ebene PAm gelegt, welche die vorige unter einem sehr kleinen Winkel schneidet, und Mm ein sehr kleiner Bogen eines Parallelkreises durch m, so werden die von allen Puncten des Bogens Mm zurückgeworfenen Strahlen einander in dem Punct p der Axe schneiden, worin MQ verlängert diese Axe trift, demnach hat es mit dem Licht, welches das Element des Spiegels MmnN zurück wirft, eine ähnliche Bewandniß, wie mit demjenigen, was ein solches Element des Hohlspiegels zurück schickt. (102 §.) zum Theil liegen die zurückgehenden Strahlen so, als kämen sie aus dem Zerstreuungspunct Q her, zum Theil aber so, als wenn sie von dem Zerstreuungspunct p ausgiengen, und es ist

$$Mp = - \frac{r\sqrt{(r^2 - 2r(\delta+r)\cos\alpha + (\delta+r)^2)}}{2(\delta+r)\cos\alpha - r}.$$

(102. §.)

108. §.

33 F. Es sey wiederum AC die Axe eines sphärischen Hohlspiegels BAD, und der Bogen AB = AD welcher

cher die halbe Breite des Spiegels bestimmt, in Vergleichung mit seinem Halbmesser so klein, daß ACB nur wenige Grade beträgt. Der Punct P in der Axe sey wenigstens weiter als um den Halbmesser des Kugelspiegels vom Scheitel A entfernt, damit das Bild π dieses Puncts P vor dem Spiegel befindlich sey, so ist $A\pi = \frac{\delta f}{\delta - f}$, $AP = \delta$ gesetzt. Mit dem Halbmesser AP sey der Kreisbogen PQ beschrieben; so fällt von jedem Punct Q dieses Bogens ein Strahlenkegel auf den Spiegel, und einer von den auffallenden Strahlen QE geht durch des Spiegels Mittelpunct C. Demnach hat jeder Punct Q sein Bild in k und es ist auch $Ek = \frac{\delta f}{\delta - f} = A\pi$, also $Ck = C\pi$. So liegt zwischen π und k eine Reihe von Bildern der Puncte zwischen P und Q, diese Bilder liegen ebenfals in einem Kreisbogen, wozu der Halbmesser $C\pi = Ck$ gehört, und der Bogen πk ist das Bild des Bogens PQ.

Wenn der Winkel PCQ nur klein ist, so ist der Bogen PQ von seiner Tangente durch P nicht sehr verschieden, und er kann als eine grade auf AP senkrechte Linie angesehen werden, wovon alsdenn πk das Bild und ebenfals eine durch π auf AP senkrechte grade Linie ist. Dies Bild hat in Ansehung der Axe AP eine Lage, die der Lage der abgebildeten Linie entgegen gesetzt ist.

Wenn überhaupt PQ ein Gegenstand ist, dessen Abmessungen in Vergleichung mit der Entfernung CP nur klein sind; so sind auch alle von C nach den

den Puncten Q dieses Gegenstandes gezogene grade Linien beynahe gleich groß, und das von jedem der Puncte Q auf den Spiegel fallende Licht vereiniget sich nach der Zurückwerfung in einem Bilde k des Puncts Q, das in der verlängerten QC liegt, beynahe eben so weit von C entfernt, als π davon entfernt ist, und man hat $C\pi = Ck = r - g =$
$$r - \frac{\delta f}{\delta - f} \text{ (93. §.) } = 2f - \frac{\delta f}{\delta - f} =$$
$$\frac{(\delta - 2f)f}{\delta - f}.$$ Alle diese Bilder zusammen machen alsdenn ein Bild des Gegenstandes, oder vielmehr ein Bild der dem Spiegel zugekehrten Fläche desselben aus. Die Puncte r, π, k liegen in einer zum Halbmesser $C\pi$ gehörigen Kugelfläche, wenn R, P, Q in einer Kugelfläche liegen, die zum Halbmesser CP gehört, und diese Kugelflächen kommen den ebenen Flächen sehr nahe, welche sie in P und π berühren, wenn $PCQ = \pi Ck$ ein kleiner Winkel ist, so wie die Bogen PQ, πk, alsdenn ihren Tangenten sehr nahe kommen.

Ist die Axe AP des Spiegels gegen die Mitte P (oder sonst einen merkwürdigen Punct) des Gegenstandes gerichtet, so sind PQ, PR, Halbmesser des Objects, wenn dasselbe kreisförmig ist, und πk, πr, damit zusammen gehörige Halbmesser des Bildes, welches alsdenn ebenfals kreisförmig, so wie überhaupt allemahl dem Gegenstande ähnlich ist. Wenn nemlich das Object nicht kreisförmig ist, so sind die Halbmesser PQ veränderlich, und ändern sich mit der Lage der Ebene CPQ, wenn man sich vorstellet, daß selbige um die Axe

AP

AP gedrehet wird. Bey jeder Lage dieser Ebene aber ist allemahl $PQ : \pi k = CP : C\pi$ in einerley Verhältniß.

109. §.

Der Winkel $PCQ = \pi Ck$ ist sowohl des Gegenstandes, als auch des Bildes scheinbarer Halbmesser in der Ebene APQ genommen, wenn das Auge in C seine Stelle hat. Setzt man diesen scheinbaren Halbmesser $PCQ = \varrho$, so ist $\pi k = C\pi \,.\, \mathrm{tg}\varrho$, so wie $PQ = CP \,.\, \mathrm{tg}\varrho$, also auch $\pi k = \frac{C\pi}{CP} \,.\, PQ$, und $CP = \delta - 2f$, mithin $\pi k = \frac{f}{\delta - f} \,.\, PQ$. Wenn aber, wie im 93. §. $A\pi = g$ gesetzt wird, so ist $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$, also $\frac{f}{\delta - f} = \frac{g}{\delta}$, und man erhält $\pi k = \frac{g}{\delta} \,.\, PQ$, also $AP : A\pi = PQ : \pi k$. Aus eben dem Grunde ist $AP : A\pi = PR : \pi r$, also auch $PQ + PR : \pi k + \pi r = AP : A\pi$. Das heist: jeder Halbmesser oder Durchmesser des Objects verhält sich zu dem damit zusammen gehörigen Halbmesser oder Durchmesser des Bildes, wie die Entfernung des Objects zur Entfernung des Bildes von der Mitte des Spiegels.

Zwischen den Gränzen des pyramiden- oder kegelförmigen Raums QCR sey mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben, so ist das Kugelstück das Maaß der ganzen scheinbaren Ausdehnung, sowohl des Objects PR, als auch des dazu gehörigen Bildes πk, und wenn man den durch P auf der Axe CP senkrechten Schnitt des Objects $= E^2$, die Fläche des Bildes $= \varepsilon^2$ setzt, so ist das erwehnte Maaß $= \frac{E^2}{CP^2} = \frac{E^2}{C\pi^2}$, also die Fläche des Bildes $\varepsilon^2 = \frac{C\pi^2}{CP^2} \cdot E^2 = \frac{f^2}{(\delta - f)^2} \cdot E^2$; also auch $\varepsilon^2 = \frac{g^2}{\delta^2} \cdot E^2$.

110. §.

Ist RPQ das Gesicht eines Menschen, der gegen den Spiegel siehet, in P sein Auge; so kömmt von jedem Punct r, π, k des Bildes ein Strahlenkegel in sein Auge, und dasselbe wird davon eben so gerührt, wie geschehen würde, wenn die abgebildeten Puncte in den Stellen ihrer Bilder selbst befindlich wären. Der Mensch siehet also das Bild seines Gesichts vor dem Spiegel aber verkehrt. So lange AP in Vergleichung mit der Brennweite etwas groß ist, so lange ist das Bild kleiner als das Gesicht der betrachtenden Person, weil jeder Halbmesser desselben, wie πk in dem Verhältniß $CP : C\pi = \delta - f : f = \delta : g$ kleiner als der damit zusammen gehörige Halbmesser PQ ist. Wenn aber Gegenstand und Spiegel einander näher gebracht werden, so wird das Bild grösser, weil $\pi k = \frac{f}{\delta - f} \cdot PQ$ grösser wird. Weil nun zugleich $C\pi = \frac{(\delta - 2f)f}{\delta - f} = f - \frac{f_2}{\delta - f}$ abnimmt,

abnimmt, und $A\pi = \frac{\delta f}{\delta - f} = f + \frac{f^2}{\delta - f}$ zunimmt, so rücken Bild und Gegenstand einander entgegen. Wird $\delta = 2f$, so fallen Bild und Sache bey C zusammen, also kann die betrachtende Person ihr Bild nicht mehr sehen. So lange ferner δ zwischen den Gränzen $2f$ und f bleibt, sieht man sich nicht weder vor noch hinter dem Spiegel, weil das Bild weiter vom Spiegel als der Gegenstand selbst entfernt seyn würde, wenn letzterer die Strahlen nicht auffienge, und bis an die Stelle zu kommen hinderte, wo sie zusammen stoßen müsten. Aber wenn auch dies nicht wäre, so hätte doch der Beobachter seinem Bilde den Rücken zugekehrt, und könnte es um deswillen nicht sehen.

111. §.

In dem Fall $\delta < f$ wird $C\pi > CA$ und $A\pi$ negativ: von den Strahlen, die jeder Punct Q des Gegenstandes auf den Spiegel wirft, geht einer rückwärts verlängert durch C, der den Spiegel in E trift, und alle diese von Q auffallenden Strahlen liegen nach der Zurückwerfung so, als kämen sie von k her, $Ek = \frac{EQ \cdot f}{EQ - f}$ genommen. Wäre also PQ ein mit dem Halbmesser CP beschriebener Bogen, so würden auch alle Puncte k in einem Kreisbogen liegen, wozu der Halbmesser $C\pi$ gehörte. Aber auch in andern Fällen, wenn AP und EQ nicht sehr ungleich sind, kommt in πk ein Bild des Gegenstandes PQ zum Vorschein, welches nun nicht mehr verkehrt, sondern aufrecht ste- 34 F.

 het,

het, überdem auch grösser als der Gegenstand selbst ist. Es wird nemlich $\pi k = \frac{f}{\delta - f}$. PQ $= - \frac{f}{f - \delta}$. PQ negativ und grösser als PQ. Eine Person also in PQ, die gegen den Spiegel siehet, wird sich selbst hinter dem Spiegel aufgerichtet, und vergrössert sehen.

112. §.

35 F. Auch auf den erhabenen sphärischen Spiegel werden diese Schlüsse leicht angewandt. Ist PQ in dem hier gebräuchlichen und schon erklärten Verstande, der Halbmesser eines Gegenstandes, der sein Licht auf den Spiegel wirft, so verwandelt sich der von jedem Punct Q auffallende Strahlenkegel in einen entgegen gesetzten, der seine Spitze k hinter dem Spiegel in der graden Linie QC hat, und es ist $Ek = - \frac{EQ . f}{EQ + f}$. Sind EQ und AP für alle Puncte Q beynahe gleich, so sind auch Ek und $A\pi$ beynahe gleich groß, πk ist ein Bild von PQ, und des Bildes Halbmesser $\pi k = - \frac{f}{\delta + f}$. PQ. Das Bild ist aufgerichtet und kleiner, als der Gegenstand, es mag $AP = \delta$ wachsen oder abnehmen wie man will, doch wird das Bild grösser, und rückt dem Spiegel näher, wenn δ kleiner wird, und in dem Fall $\delta = f$, ist $\pi k = - \frac{1}{2}$ PQ, und $A\pi = - \frac{1}{2} f$. Siehet man also grade gegen einen erhabenen Spiegel, so siehet man zugleich hinter

hinter dem Spiegel ein verkleinertes Bild von sich selbst, das desto grösser wird, je näher man den Spiegel dem Auge bringt.

113. §.

Im ebenen Spiegel siehet man nicht allein sein eigenes Bild, wenn man denselben grade vor sich hat, sondern auch das Bild jedes andern strahlenden Puncts L, wenn das Auge seitwärts der durch 19 F. L auf den Spiegel lothrecht herab gelassenen graden Linie LR in der Gegend BDF befindlich ist. Das Bild L des Puncts M hat übrigens einerley Stelle bey einerley Lage des Spiegels, das Auge mag seine Stelle haben, wo es wolle; nur muß es seine Stelle in demjenigen Raum haben, worin sich das zurückgeworfene Licht ausbreitet, damit es einen Theil der zurückgeschickten Strahlen auffangen kann.

Mit den sphärischen Spiegeln hat es eine ähnliche Bewandniß, nur hängt die Stelle desjenigen Bildes, welches das Auge wahrnimmt, von der Stelle ab, wo sich das Auge befindet. Wenn der strahlende Punct P sein Licht auf den sphärischen 27 F. Hohlspiegel AMN wirft, so macht das zurückgehende Licht unzählig viele verschiedene Bilder. Eine Reihe dieser Bilder liegt in der Axe AC, und sie haben ihren Ursprung von der Krümmung der Kugelfläche, in wie fern selbige an jeder Stelle M mit der Krümmung des Parallelkreises durch M überein kommt. Eine andre Reihe von Bildern rührt her von derjenigen Krümmung der Kugelfläche in M, welche mit der Krümmung des größten Kreises durch die Axe AC und die Stelle M über-

übereinkommt. Diese zuletzt erwehnten Bilder sind einerley mit den Puncten Q, worin zwey zunächst nach einander folgende zurückgeworfene Strahlen Mp, Nq, einander schneiden: (101. §.) alle Puncte Q liegen in einer krummen Linie πQz welche die catoptrische Brennlinie heist, (caustica per reflexionem auch cata-caustica) und der Nahme rührt daher, weil man in den optischen Wissenschaften jeden Sammlungs- oder Zerstreuungspunct des zurückgeworfenen oder gebrochenen Lichts in einem etwas weitläuftigern Verstande einen Brennpunct (focum) nennt. Ein
28 F. Auge in O siehet also zwey verschiedene Bilder des strahlenden Puncts P, das eine in p, das andre in Q, die jedoch in den meisten Fällen nur wie ein Bild erscheinen, welches nicht so deutlich ist, wie es seyn würde, wenn alle von dem Element MmnN zurückgeschickte Strahlen einerley Vereinigungspunct hätten.

Es ist leicht zu erachten, daß es mit dem erha-
32 F. benen sphärischen Spiegel eben die Bewandniß habe. Stehet das Auge in O und fängt die Strahlen auf, die das Element MmnN zurück schickt; so siehet es eine Vermischung der beyden Bilder p und Q, also ein nicht völlig deutliches Bild des Puncts P, und dies Bild ändert seine Stelle, wenn das Auge seine Stelle ändert. Der Unterscheid vom sphärischen Hohlspiegel bestehet nur darin, daß allemahl das Bild, welches der erhabene Spiegel macht, hinter demselben liegt, dasjenige aber, welches der Hohlspiegel macht, allemahl vor demselben liegt, wenn AP $>$ $\frac{1}{2}$AC ist. Alle Puncte Q worin die in einerley Ebene

eines

eines grösten Kreises auffallenden Strahlen nach ihrer Zurückwerfung rückwärts verlängert einander schneiden würden, machen ebenfals eine Reihe geometrischer, (nicht physischer wie beym Hohlspiegel) Bilder aus, die in der catoptrischen Brennlinie πQz liegen, welche hier ebenfals nur geometrisch nicht physisch ist. Eine andre Reihe von Bildern liegt in der Axe AC, und das sind die Puncte, worin die auf einerley zur Axe PAC gehörigen Parallelkreis fallenden Strahlen nach ihrer Zurückwerfung rückwärts verlängert einander schneiden würden.

114. §.

Eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten für die catoptrische Brennlinie des Kreises zu finden. 27 F.

Auflösung. Man lasse QR und MB auf AC senkrecht fallen, und setze $CR = x$, $RQ = y$; so hat man $Mp : Qp = MB : y$, und $x - Cp : y = CB - Cp : BM$; also $y = \dfrac{MB \,.\, Qp}{Mp} = \dfrac{MB\,(Mp - MQ)}{Mp}$, oder $y = BM - \dfrac{BM \,.\, QM}{Mp}$, und $x = Cp + \dfrac{(CB - Cp)\,y}{BM}$. Weil nun BM, QM, und Mp durch α gegeben sind, so ist $y = BM\left(1 - \dfrac{QM}{Mp}\right)$ durch α gegeben, folglich auch x, weil CB und Cp ebenfals durch α gegeben sind. Es war nemlich $MQ =$

 $r\,(r$

$$\frac{r(r+(\delta-r)\cos\alpha)\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\cos\alpha+(\delta-r)^2)}}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2}$$

und $Mp = \frac{r\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\cos\alpha+(\delta-r)^2)}}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$;

(101. 102. §.) also findet man $\frac{MQ}{Mp} =$

$$\frac{(r+(\delta-r)\cos\alpha)(r+2(\delta-r)\cos\alpha)}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2} =$$

$$\frac{r^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+2(\delta-r)^2\cos\alpha^2}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2},$$ und

das giebt $1 - \frac{MQ}{Mp} = \frac{2(\delta-r)^2\sin\alpha^2}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2}$,

folglich $y = \frac{2r(\delta-r)^2\sin\alpha^3}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2}$.

Oben im 87 §. ist $\frac{\delta-r}{\delta-\frac{1}{2}r} = n$, und $\frac{\frac{1}{2}r}{\delta-\frac{1}{2}r}$ $= m$ gesetzt, wenn also die für y gefundene Formul im Zähler und Nenner mit $(\delta-\frac{1}{2}r)^2$ dividirt wird, so erhält man $y = \frac{r.n^2\sin\alpha^3}{n^2+3mn\cos\alpha+2m^2}$.

Ferner war $x = Cp\left(1-\frac{y}{BM}\right)+\frac{CB.y}{BM}$, und es ist $CB = r\cos\alpha$, $BM = r\sin\alpha$, $Cp = \frac{\frac{1}{2}nr}{1-n\sin v\alpha}$ (87. §.) $= \frac{\frac{1}{2}nr}{m+n\cos\alpha}$, $\frac{y}{BM} =$ $\frac{n^2\sin\alpha^2}{n^2+3mn\cos\alpha+2m^2}$; also $1-\frac{y}{BM} =$ $\frac{n^2\cos\alpha^2+3mn\cos\alpha+2m^2}{n^2+3mn\cos\alpha+2m^2}$, und man findet

$x =$

$$x = \frac{(n^2 \cos\alpha^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2) \cdot \frac{1}{2}nr}{(n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2)(m + n\cos\alpha)} + \frac{n^2 \sin\alpha^2 \cdot r \cos\alpha}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}.$$ Durch die Division findet man $\frac{2m^2 + 3mn \cos\alpha + n^2 \cos\alpha^2}{m + n \cos\alpha} = 2m + n \cos\alpha$, also ist auch $x = \frac{(2m + n \cos\alpha) \cdot \frac{1}{2}nr + n^2 \sin\alpha^2 \cdot r \cos\alpha}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}$, oder $x = \frac{\frac{1}{2}nr\,(2m + 3n \cos\alpha - 2n \cos\alpha^3)}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}$; und wenn $\frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - r} = \mu$ angenommen wird, so ist $y = \frac{r \sin\alpha^3}{1 + 3\mu \cos\alpha + 2\mu^2}$, und $x = \frac{\frac{1}{2}r\,(2\mu + 3 \cos\alpha - 2 \cos\alpha^3)}{1 + 3\mu \cos\alpha + 2\mu^2}$.

Man setze $\frac{y}{r} = Y$, $\frac{x}{r} = X$, $X^2 + Y^2 = Z^2$, so geben die beyden gefundenen Gleichungen folgende dritte $Z^2 = \frac{\sin\alpha^6 + (\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)^2}{(2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha)^2}$. Es ist aber $\sin\alpha^6 = (1 - \cos\alpha^2)^3 = 1 - 3\cos\alpha^2 + 3\cos\alpha^4 - \cos\alpha^6$, und $(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)^2 = (\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha)^2 - 2(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha)\cos\alpha^3 + \cos\alpha^6 = \mu^2 + 3\mu \cos\alpha + \frac{9}{4}\cos\alpha^2 - 2\mu \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha^4 + \cos\alpha^6$, also erhält man $Z^2 = \frac{\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha^2 - 2\mu \cos\alpha^3}{(2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha)^2}$.

Daraus folgt ferner $2\mu \cos\alpha^3 + (9\mu^2 Z^2 + \frac{3}{4}) \cos\alpha^2 + (6\mu(2\mu^2 + 1) Z^2 - 3\mu) \cos\alpha + (2\mu^2 + 1)^2 Z^2 - (\mu^2 + 1) = 0$, und aus der zweyten Gleichung erhält man

$$\cos\alpha^3 + (3\mu X - \tfrac{3}{2}) \cos\alpha + (2\mu^2 + 1) X - \mu = 0;$$

also kann man nun $\cos\alpha$ aus den beyden letzten Gleichungen wegschaffen. Um abzukürzen, bezeichne man die Coefficienten der drey letzten Glieder in der ersten Gleichung mit P^2, Q^2, R^2, die Coefficienten der letzten aber mit V, W; so ist

$$2\mu \cos\alpha^3 + P^2 \cos\alpha^2 + Q^2 \cos\alpha + R^2 = 0$$

und

$$2\mu \cos\alpha^3 + 2\mu V . \cos\alpha + 2\mu W = 0,$$

also auch

$$P^2 \cos\alpha^2 + (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha + R^2 - 2\mu W = 0.$$

Demnach ist ferner

$$P^2 \cos\alpha^3 + (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (R^2 - 2\mu W) \cos\alpha = 0,$$

und

$$P^2 \cos\alpha^3 + V . P^2 . \cos\alpha + W . P^2 = 0$$

also

$$(Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (R^2 - 2\mu W - P^2 . V) \cos\alpha - P^2 . W = 0.$$

Die beyden quadratischen Gleichungen geben

$$P^2 (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (Q^2 - 2\mu V)^2 \cos\alpha + (R^2 - 2\mu W)(Q^2 - 2\mu V) = 0,$$

und

$$P^2 (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + P^2 (R^2 - 2\mu W - P^2 . V) \cos\alpha - P^4 . W = 0;$$

daraus folgt

$$((Q^2 - 2\mu V)^2 - P^2 (R^2 - 2\mu W - P^2 . V)) . \cos\alpha + (R^2 - 2\mu W)(Q^2 - 2\mu V) + P^4 . W = 0.$$

und

und man erhält

$$\cos\alpha = \frac{(R^2-2\mu W)(Q^2-2\mu V)P^4 . W}{P^2(R^2-2\mu W-P^2 . V)-Q^2-2\mu V)^2}.$$

Wird dieser Werth $= \frac{A}{B}$ gesetzt, und in der quadratischen Gleichung

$$P^2 \cos\alpha^2 + (Q^2-2\mu V)\cos\alpha + R^2 - 2\mu W = 0$$

substituirt, so hat man zwischen x und y die Gleichung

$$\frac{P^2 . A^2}{B^2} + \frac{(Q^2-2\mu V) . A}{B} + R^2 - 2\mu W = 0,$$

oder

$$P^2 . A^2 + (Q^2-2\mu V) . A . B + (R^2-2\mu W) B^2 = 0,$$

und man kann nun übersehen, daß die gesuchte Gleichung bis auf die zwölfte Ordnung steigen könne, weil A und B Functionen von x und y sind, welche auf 5 Dimensionen steigen. Wofern in besondern Fällen die Glieder, welche die höhern Dimensionen von x und y enthalten, einander aufheben, oder auch ihre Coefficienten für sich verschwinden, so wird dadurch die Gleichung auf eine niedere Ordnung herunter gebracht.

Unter diesen besondern Fällen ist besonders derjenige merkwürdig, wenn die Strahlen mit der Axe des Spiegels parallel einfallen. Alsdenn ist $\delta = \infty$, also $\mu = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - r} = 0$, mithin $P^2 = \frac{3}{4}$, $Q^2 = 0$, $R^2 = Z^2 - 1$, $V = -\frac{3}{2}$, $W = X$; also $A = \frac{9}{16} X$, und $B = \frac{3}{4}(Z^2 - 1 + \frac{9}{8}) = \frac{3}{4}(Z^2 + \frac{1}{8})$, und man erhält die Gleichung $P^2 . A^2 + R^2 . B^2 = 0$, oder

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{9^2}{16^2} X^2 + \frac{9}{16}(Z^2 - 1)(Z^2 + \tfrac{1}{8})^2 = 0,$$

welche

welche nur auf die sechste Ordnung steigt. Eben diese Gleichung giebt

$$\frac{27}{64} X^2 + (Z^2 - 1)(Z^2 + \tfrac{1}{8})^2 = 0$$

oder $27 X^2 + (Z^2 - 1)(8 Z^2 + 1)^2 = 0$,

und nach gehöriger Rechnung

$$64 Z^6 - 48 Z^4 - 15 Z^2 + 27 X^2 - 1 = 0.$$

Es ist aber $Z^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$, und $X = \frac{x}{r}$ angenommen, also erhält man

$$\frac{64(y^2+x^2)^3}{r^6} - \frac{48(y^2+x^2)^2}{r^4} - \frac{15(y^2+x^2)}{r^2} + \frac{27 x^2}{r^2} - 1 = 0,$$

oder

$$64(y^2+x^2)^3 - 48 r^2 (y^2+x^2)^2 - 15 r^4 (y^2+x^2) + 27 r^4 x^2 - r^6 = 0,$$

und wenn man alles nach den Potenzen von y ordnet

$$64 y^6 + (192 x^2 - 48 r^2) y^4 + (192 x^4 - 96 r^2 x^2 - 15 r^4) y^2 + 64 x^6 - 48 r^2 x^4 + 12 r^4 x^2 - r^6 = 0.$$

Umständlichere Untersuchungen über die Eigenschaften der Brennlinien des Kreises für die mancherley hieher gehörigen besondern Fälle, so wie auch allgemeinere Betrachtungen der Brennlinien, wenn die zurückwerfende Linie kein Kreis ist, gehören mehr für die Geometrie als für die Optick: man sehe davon nach die Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes par Mr. le Marquis de l' Hopital Sect. VI. pag. 104 sqq. Ioh. Bernoulli Lect. Math. de methodo integralium in usum Ill. March. Hospitalii Lect. 26 — 32.

— 32. Operum Tom. III. pag. 464 seqq. Smiths Lehrbegrif der Optick übersetzt von Kaestner 2 Buch 2 Th. 5 Cap. 216 u. f. S. Von Joh. Bernoulli wird unter andern die Nachricht mitgetheilt, daß Tschirnhaus über diese Art Brennlinien die ersten Untersuchungen angestellet, und in den Actis Eruditorum Lipſ. de A. 1682. menſ. Nov. pag. 364 das Resultat davon bekannt gemacht habe, ohne dabey die Methode zu entdecken, welche ihn auf diese Erfindung geleitet hatte. Seine Untersuchungen sind auf den Fall eingeschränkt, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, und durch einen Rechnungsfehler verleitet, hatte er anfangs eine Linie als Brennlinie für diesen Fall angegeben, die nur auf die vierte Ordnung steigt. Joh. Bernoulli aber zeigte ihm den Fehler, und fand die oben angegebene Linie der sechsten Ordnung. M. s. die Abhandlung: Solutio curvæ causticæ per vulgarem Geometriam Cartesianam in den Actis Erud. Lipſ. A. 1692. menſ. Ianuar. pag. 30. und Ioh. Bernoullii Opera Tom I. pag. 52. auch Iacobi Bernoullii Opera Tom. I. pag. 466. Tschirnhaus sahe seinen Fehler ein, und machte solches in den Actis Eruditorum A. 1690. menſ. Febr. pag. 71 bekannt. Was die übrigen schon erwehnten Schriftsteller sonst von der Brennlinie des Kreises lehren, läßt sich aus den hier mitgetheilten Formuln herleiten, wenn man sich nur erinnert, daß für die erhabene Seite der Kreislinie, wenn selbige das Licht zurück wirft, der Halbmesser r in diesen Formuln negativ angenommen, also $\mu = -\frac{\frac{1}{2}r}{\delta + r}$ gesetzt werden müsse.

In

In dem Fall $\delta = 2r$ ist demnach $\mu = \frac{1}{2}$ für den Hohlspiegel, und $\delta = -\frac{1}{6}$ für den erhabenen Spiegel: das sind die beyden besondern Fälle, welche Joh. Bornouilli in den Lectionibus Hospitalianis a. a. O. vornemlich entwickelt hat. Uebrigens dienen die Gleichungen:

$$y = \frac{r \sin\alpha^3}{2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha},$$

$$x = \frac{r(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)}{2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha},$$

in jedem Fall die Brennlinie zu zeichnen, wenn man die cubische Gleichung

$$\cos\alpha^3 + 3\left(\frac{\mu x}{r} - \frac{1}{2}\right)\cos\alpha + (2\mu^2 + 1)\cdot\frac{x}{r} - \mu = 0$$

auflösen kann. Für jede Abscisse x giebt selbige drey verschiedene Werthe von $\cos\alpha$, und weil zu jedem Cosinus zwey verschiedene einander entgegen gesetzte Sinus gehören; so giebt die erste Gleichung sechs verschiedene Werthe für y. Umgekehrt aber, wenn man y als gegeben annimmt, so wird $\sin\alpha$ durch eine Gleichung der sechsten Ordnung bestimmt; also gehören zu jedem y sechs verschiedene Werthe von $\sin\alpha$, mithin zwölf Werthe von $\cos\alpha$, und eben so viele von x: woher es dann begreiflich wird, daß die allgemeine Gleichung auf die zwölfte Ordnung steigen muß. In dem Fall $\mu = 0$, wird die erste Gleichung $y = r \sin\alpha^3$ cubisch, und zu jedem y gehören nur drey Werthe von $\sin\alpha$, mithin sechs Werthe von x: daher kommt es, daß nun die Gleichung zwischen x und y nur auf die sechste Ordnung steigt.

Der

Der IX. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Brechung des Lichts mit Anwendungen auf ebene brechende Flächen.

115. §.

Es sey ABCD ein Gefäß, das die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat; dies setze man den Sonnenstrahlen so aus, daß eine von den Seitenflächen AHGD, wenn die Grundfläche AB wagrecht steht, der Sonne grade zugekehrt sey, damit ihr Schatten AEKH ganz innerhalb des Gefässes falle. Man messe die Länge des Schattens AE = HK, und giesse hiernächst das Gefäß voll Wasser. Dies wird den Erfolg haben, daß der Schatten der Seitenfläche AHGD sich um ein ansehnliches verkürzt, und nun nur bis an FL reicht: demnach müssen die Strahlen SD SG, die wie bekannt, als parallel zu betrachten sind, da wo sie die Wasserfläche treffen, bey D und G gebrochen werden, und im Wasser die Richtung DF, GL, annehmen. 36 F.

Wenn ABCD ein aus reinem hellen Glase verfertigtes Parallelepipedum ist, so nimmt man eine völlig ähnliche Erscheinung wahr, wenn man ein undurchsichtiges Recheck aus Holz, oder Metall, wie man will, verfertigen läßt, das eben so hoch, als die Seitenfläche AHGD des Parallelepipedi ist.

ist. Man stellet dies Rechteck über AH lothrecht, und mißt die Länge des Schattens AE: sobald man hiernächst das gläserne Parallelepipedum an AHGD ansetzt, so das eine Seitenfläche desselben an daß undurchsichtige Rechteck anschließt, sobald wird der Schatten kürzer, und erstreckt sich nur bis an FL, statt dessen, daß er sich vorher bis an EK erstreckte.

116. §.

Wird AD aufwärts nach P verlängert, so ist DP für den Strahl SD **das Einfallsloth**, so wie bey der Zurückwerfung (81 §.) hier ist nemlich die Fläche CD des Wassers des Glases, oder was es sonst für eine durchsichtige Masse seyn mag, wagrecht, und AD lothrecht angenommen, und diese Fläche CD heist hier **die brechende Fläche**, so wie sie in Absicht des zurück geworfenen Lichts **die zurück werfende Fläche** heissen kann, und in der leztern Absicht als Spiegelfläche betrachtet wird. Weiter ist PDS = ADE der Winkel des einfallenden Strahls mit dem Neigungsloth, und derselbe heist hier schlechthin **der Neigungswinkel** (angulus inclinationis). In der Ebene dieses Neigungswinkels liegt auch der gebrochene Strahl DF, und dies nimmt man am deutlichsten wahr, wenn das Parallelepipedum aus Glas besteht, und die Ebene ADGH dunkel ist. Alsdenn ist AE der Schatten von AD, wenn der Strahl ungebrochen durch die Luft geht, AF aber der Schatten, wenn der Strahl gebrochen durchs Glaß geht, und die drey Puncte A, F, E, liegen in grader Linie, mithin DA, DF, DE, in einer

ner Ebene. Der Winkel ADF des gebrochenen Strahls mit dem Einfallsloth heist **der gebrochene Winkel**, (angulus refractus) der Winkel FDE des gebrochenen Strahls mit dem einfallenden aber **der Brechungswinkel.** (angulus refractionis). Alle drey Winkel also, der Neigungswinkel, der gebrochene, und der Brechungswinkel liegen in einerley Ebene, die auf der brechenden Fläche, da wo der Strahl auffält, senkrecht ist: sie heist die **Brechungs-Ebene**, und ist hier das, was im 81 §. die Zurückwerfungs-Ebene war.

Wenn demnach die **brechende Fläche** krumm ist, so muß man sich eine Ebene vorstellen, welche diese brechende Fläche da, wo der Strahl auffällt, berührt: auf dieser ist alsdenn das Einfallsloth senkrecht, weil ein Element der krummen Fläche an dieser Stelle zugleich als ein Element der berührenden Ebene zu betrachten ist. Eben deswegen muß der Strahl, wenn er auf das Element fällt, wo die ebene Fläche die krumme brechende Fläche berührt, eben die Brechung leiden, die er litte, wenn es ein Element der ebenen Fläche wäre: die Brechung sowohl, als die Zurückwerfung richtet sich bloß nach dieser Stelle, und würde ungeändert bleiben, wenn sich gleich die übrige Gestalt der brechenden Fläche, oder der Spiegelfläche, änderte.

117. §.

Stellt man die im 115. §. beschriebenen Beobachtungen bey verschiedenen Sonnen-Höhen an, 36 F.
so werden die Winkel AED, AFD, so wie ADE, ADF, verschieden seyn, wie denn AED die jedes-

mahlige Höhe der Sonne seyn wird: bey einerley brechenden Masse indessen wird man finden, daß die Sinus der Winkel ADE und ADF allemahl in einerley Verhältniß bleiben, wie sich auch die Höhe der Sonne, und mit ihr der Neigungswinkel ADE ändert. Man kan AD, AE, AF messen, und alsdenn hat man $\cot.\, ADE = \frac{AD}{AE}$, $\cot.\, ADF = \frac{AD}{AF}$, also $\operatorname{cosec} ADE = \frac{\sqrt{(AE^2 + AD^2)}}{AE}$, $\operatorname{cosec}.\, ADF = \frac{\sqrt{(AF^2 + AD^2)}}{AF}$, mithin sin ADE $= \frac{AE}{\sqrt{(AE^2 + AD^2)}}$ und sin ADF $= \frac{AF}{\sqrt{(AF^2 + AD^2)}}$. Beym Glase findet man nun allemahl sin ADE : sin ADF $= 3 : 2$, oder noch genauer $= 31 : 20$, und beym Wasser sin ADE : sin ADF $= 4 : 3$, oder genauer $= 529 : 396 = 1000 : 748$. Man nennt dies Verhältniß des Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels das **Verhältniß der Refraction**, und dasselbe ist vermöge der Erfahrung **bey einerley brechenden Masse einerley, der Neigungswinkel ändre sich wie er wolle;** bey verschiedenen brechenden Massen aber verschieden. Je kleiner der Neigungswinkel ist, desto kleiner ist indessen allemahl der Brechungswinkel, mit jenem verschwindet auch dieser, oder: in jeder **brechenden Masse geht der senkrecht auffallende Strahl ungebrochen durch.**

118. §.

Befestiget man im verfinsterten Zimmer das 36 F.
gläserne Parallelepipedum so, daß die horizontal-liegende Grundfläche AB, wenigstens in der Gegend F, nicht auf einem undurchsichtigen Boden liegt; so wird der Strahl DF bey F zwar wieder aus dem Glase in die Luft gehen, aber daselbst von neuen aus der Lage FM, die mit DF in grader Linie liegt, in die Lage FN so gebrochen werden, daß FN mit dem einfallenden Strahl SD parallel liegt. Im finstern Zimmer lassen sich die Stellen D und F, imgleichen die Strahlen SD, FN selbst ganz deutlich wahrnehmen, und so kann man sich durch mehr als ein Mittel von der parallelen Lage der Strahlen SD und FN versichern. Nun sey FQ für den Strahl DF das Einfalls-Loth, so ist vermöge der Beobachtung QFN = ADE, so wie QFM = ADF wäre. Hat man nun sin ADE = $\frac{m}{n}$ sin ADF befunden, so ist auch sin QFN = $\frac{m}{n}$ sin QFM, demnach ist wenigstens beym Glase, wenn der Strahl aus Glas in die Luft geht, das Verhältniß der Refraction in umgekehrter Ordnung eben dasselbe, was man findet, wenn der Strahl aus der Luft ins Glaß fällt. Versuche mit andern brechenden Massen lehren, daß es damit eben die Bewandniß habe. Beym Uebergang des Lichts aus der dünnern Masse in die Dichtere ist allemahl der gebrochene Winkel kleiner als der Neigungswinkel: beym Uebergang des Lichts aber aus der dichtern Masse in die dünnere ist der

gebrochene Winkel grösser als der Neigungswinkel. Sind übrigens die brechenden Massen einerley, so ist allemahl das Verhältniß der Refraction, wenn der Strahl aus der dichtern Masse in die Dünnere fällt, in umgekehrter Ordnung einerley mit demjenigen, was man findet, wenn der Strahl aus der dünnern Masse in die Dichtere geht.

Wie man Versuche dieser Art mit allerley brechenden Massen anstellen, und sich überhaupt davon versichern könne, daß die hier und im vor. §. vorgetragenen Gesetze der Refraction allgemein wahr sind, wenn das Licht aus einer durchsichtigen Masse in eine andre Dichtere, oder Dünnere übergeht; solches werden die folgenden Untersuchungen nach und nach mehr ins Licht setzen. Das optische Gesetz von der gradlinichten Ausbreitung des Lichts nach allen Seiten, (4. §. Optick) und das catoptrische Gesetz von der Gleichheit der Einfalls- und Zurückstrahlungswinkel (81 §.) war zwar den alten griechischen Geometern bekannt: allein die Entdeckung des Gesetzes der Strahlenbrechung ist allererst in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gemacht worden, obgleich die Strahlenbrechung selbst mit ihren Wirkungen nicht unbekannt war. Man hat noch aus dem Alterthum eine Optick und Catoptrick, die dem Euclides zugeschrieben wird, aber so fehlerhaft ist, daß eben um deßwillen von einigen Schriftstellern diese Stücke nicht für ächte Schriften des allgemein berühmten Geometers dieses Nahmens gehalten werden. M. s. *Montucla* Histoire des Mathematiques Tom. I. Part. III. Liv. V. pag. 624. 625. Priestleys

Geschichte

Geschichte der Optick vom H. Klügel übersetzt, 1 Periode 6 und 7 Seite. Willebrordus Snellius, Professor der Mathematick zu Leiden, ist der erste gewesen, der das wahre Gesetz der Strahlenbrechung erfunden hat: er ist aber zu frühe, im Jahr 1626, da er nur im 35sten Jahr seines Alters war, gestorben, als daß er aus dieser Entdeckung hätte mehr Nutzen für die Wissenschaft ziehen, oder auch nur sie selbst bekannt machen können. Huggen hat des Erfinders Handschrift gesehen, und giebt die eben erwehnte Nachricht gleich Anfangs in seiner Dioptrick: (M. s. Hugenii Opera Posthuma Tom. I. pag. 2. 3.) Dabey vermuthet er, daß Snellius seine Entdeckung selbst noch nicht völlig verstanden habe. Trigonometrisch ausgedrückt würde des Snellius Gesetz so lauten: die Cosecanten des Neigungs- und des gebrochenen Winkels sind bey einerley brechenden Masse in einem unveränderlichen Verhältniß, wenn gleich der Neigungswinkel geändert wird. Cartesius, der nach Huggens Bericht des Snellius Handschrift gesehen haben soll, drückte nachher dies Gesetz bequemer durch das Verhältniß der Sinus der Winkel aus, welches, wenn Snellii Gesetz wahr ist, ebenfals unveränderlich seyn muß, weil es das umgekehrte Verhältniß der Cosecanten ist. Man kann diese Gesetze der Brechung so wie die Gesetze der Zurückwerfung (81 §.) anfangs wenigstens als Hypothesen gelten lassen, die durch die beständige Uebereinstimmung aller daraus fliessenden Folgen mit dem, was die Erfahrung lehrt, nach und nach ihre völlige Gewißheit erhalten.

119. §.

37. Der Punct P wirft einen Lichtstrahl PM
38 F. auf die ebene brechende Fläche BC, und das Verhältniß der Refraction ist gegeben. Durch P ist die grade Linie PA auf BC senkrecht gezogen: man sucht den Punct Π, worin der gebrochene Strahl die senkrechte Linie PA schneidet.

Aufl. 1) Es sey DE das Neigungsloth durch M, und der einfallende Strahl PM werde in die Lage MN gebrochen; so liegen PM und MN in der Ebene der Parallelen AP und DE, welches zugleich die Brechungsebene ist, und AM ist dieser Brechungsebene Durchschnittslinie mit der ebenen brechenden Fläche BC. Es sey der Neigungswinkel $DMP = EMF = APM = \alpha$, der gebrochene Winkel $EMN = DM\Pi = A\Pi M = \beta$, und das Verhältniß der Refraction $= \mu : 1$, so ist $\sin\alpha : \sin\beta = \mu : 1$. Ferner sey $AP = \delta$, $AM = z$; so ist $PM = \sqrt{(\delta^2 + z^2)}$, und im Dreyeck $PM\Pi$ hat man $\Pi M = \frac{PM \,.\, \sin\alpha}{\sin\beta}$, also $\Pi M = \mu \sqrt{(\delta^2 + z^2)}$. Demnach hat man im rechtwinklichten Dreyeck $A\Pi M$ die Hypothenuse ΠM, und die Seite $AM = z$ ist gegeben: mithin findet man $A\Pi = \sqrt{(\mu^2 (\delta^2 + z^2) - z^2)} = \sqrt{(\mu^2 \delta^2 + (\mu^2 - 1) z^2)}$, oder $A\Pi = \mu\delta \sqrt{\left(1 + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \,.\, \frac{z^2}{\delta^2}\right)}$.

2) Wenn der Strahl aus einer dünnern Masse in eine dichtere übergeht, mithin $\mu > 1$ ist, wie die 27ste Figur annimmt; so ist allemahl $A\Pi > AP$. Wofern aber P in der dichtern Masse und auf der andern

andern Seite der brechenden Ebene eine dünnere Masse befindlich, mithin $\mu < 1$ ist, wie die 38ste Figur annimmt; so ist allemahl $A\Pi < AP$, und die gefundene Formul läßt sich auch so ausdrücken

$$A\Pi = \mu\delta \sqrt{\left(1 - \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{z^2}{\delta^2}\right)}.$$

3) Weil übrigens $\frac{z}{\delta} = \operatorname{tg}\alpha$, so ist auch $A\Pi$ $= \mu\delta\sqrt{(1 + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \operatorname{tg}\alpha^2)}$, oder $A\Pi = \delta\sqrt{(\mu^2 (1 + \operatorname{tg}\alpha^2) - \operatorname{tg}\alpha^2)} = \delta\sqrt{(\mu^2 \sec\alpha^2 - \operatorname{tg}\alpha^2}$. Ferner hat man $\sin\beta^2 = \frac{\sin\alpha^2}{\mu^2}$, $\cos\beta^2 = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\mu^2}$, also $\cot\beta^2 = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\sin\alpha^2}$, und $\operatorname{tg}\alpha^2 \cot\beta^2 = \frac{\mu^2}{\cos\alpha^2} - \operatorname{tg}\alpha^2 = \mu^2 \sec\alpha^2 - \operatorname{tg}\alpha^2$; demnach verwandelt sich die gefundene Formul auch in folgende $A\Pi = \delta \,.\, \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cot\beta$.

120. §.

1) In der 37sten Fig. hat $A\Pi$ den kleinsten Werth, wenn z oder $AM = 0$ ist. Alsdenn hat man $A\Pi = \mu\delta = \frac{\delta \sin\alpha}{\sin\beta}$: in allen andern Fällen ist $A\Pi > \mu\delta$. So lange indessen z in Vergleichung mit δ sehr klein ist, so lange bleibt sehr nahe $A\Pi = \mu\delta$. Man nehme also $Ap = \mu\delta$, und $A\mu$ sey in Vergleichung mit AP sehr klein; so erhellet, daß alle Strahlen, die von P auf $A\mu$ fallen, nach der Brechung eine solche Lage haben, als kämen

 sie

sie von p her. Steht also das Auge in O sehr nahe bey der Axe AP, so empfängt es die von P ausgehenden Lichtstrahlen eben so, als kämen sie von p her: ihm scheint also P in p zu stehen, und deswegen kann p ein Bild von P heissen. Das Auge wird auf einerley Art gerührt, es mag die Strahlen ohne Refraction unmittelbar von p erhalten, oder vermittelst der Refraction in eben der Lage, als kämen sie von p her. In dem jetzt betrachteten Fall also verursacht die Refraction, daß der Punct P von der brechenden Fläche weiter entfernt zu seyn scheint, als er davon würklich entfernt ist.

38 F. 2) In dem Fall, welchen die 38ste Fig. vorstellt, hat $A\Pi$ den grösten Werth, wenn $z = 0$ ist, weil alsdenn $A\Pi = \mu\delta$ wird, in allen andern Fällen aber $A\Pi < \mu\delta$ ist. So lange indessen z in Vergleichung mit δ sehr klein ist, so lange bleibt wiederum $A\Pi$ sehr nahe $= \mu\delta$, und wenn man $Ap = \mu\delta$ nimmt, so ist wie vorhin der Punct p ein Bild von P. Einem Auge in O, sehr nahe bey der Axe AP scheint P in p zu stehen, und in diesem Fall verursacht die Refraction, daß der Punct P nicht so weit von der brechenden Fläche entfernt zu seyn scheint, als er würklich davon entfernt ist.

3) Wenn P ein sichtbarer Gegenstand ist, worin man mehrere Puncte unterscheiden kann; so gilt das von jedem Punct, was von P und dessen Bilde p bewiesen ist. Alle Bilder p zusammen machen das Bild des ganzen sichtbaren Gegenstandes aus, das die Refraction in dem Fall der 37sten Figur von der brechenden Fläche entfernt, und in dem Fall der 38sten Figur derselben näher rückt. Liegt P in einem Gefäß, das man mit Wasser füllen

kann;

kann; so muß es scheinen, als wäre P etwas höher gehoben, wenn man, nachdem das Gefäß mit Wasser angefüllt und dasselbe völlig in Ruhe gekommen ist, von oben herab in das Gefäß hinein siehet.

4) Fällt ein Strahl QM in einer solchen Lage auf die brechende Fläche BC, daß derselbe verlängert die Axe AP hinter der Fläche BC in P′ schneiden würde, so ist AP′ das, was vorhin AP oder δ war, nur hat AP′ eine Lage, die der Lage von AP entgegen gesetzt ist. Schneidet nun der gebrochene Strahl die Axe in Π′, so muß man, um AΠ′ zu finden, in der allgemeinen Formul AΠ =

$$\mu\delta\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2-1}{\mu^2}\cdot\frac{z^2}{\delta^2}\right)}$$

das δ negativ annehmen, da dann zugleich AΠ negativ wird. Der Abstand des Bildes p' von der brechenden Ebene ist nun $= -\mu\delta$.

121. §.

Aus P fällt ein Lichtstrahl PM auf die brechende Ebene AB, und in derselben Ebene der Brechung APM ein andrer Strahl PN sehr nahe bey PM, so daß MPN als ein Differential des Winkels APM betrachtet werden kann; PM wird in die Lage $M\mu$ und PN in die Lage $N\nu$ gebrochen: man soll den Punct Q finden, worin beyde gebrochene Strahlen einander schneiden. 39 F.

Aufl. Es sey MC das Einfalls-Loth, CMP = APM = α, CMΠ = AΠM = β, und $\sin\alpha : \sin\beta = \mu : 1$ das Verhältniß der Refraction. Die

 Figur

Figur stellt den Fall vor, wenn $\mu > 1$ ist, und weil $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, so wächst β mit α, es mag μ grösser, oder kleiner als 1 seyn. Nun ist $AM\Pi = 90° - \beta$, und $ANQ = 90° - (\beta + d\beta)$, also $AM\Pi > ANQ$, mithin werden $M\Pi$ und NQ nach Π und Q verlängert einander irgendwo in Q schneiden, und weil die Lage von MQ bekannt ist, so kommt die Auflösung der Aufgabe nur darauf an, die Grösse von MQ zu finden. Aus dem Mittelpunct P sey mit dem Halbmesser PN der Bogen NK beschrieben, aus Q aber mit dem Halbmesser QN der Bogen NL; so ist $AMP = 90° - \alpha$, $ANP = 90° - (\alpha + d\alpha)$, also $MPN = AMP - ANP = d\alpha = \frac{NK}{PN}$, und $PN = \frac{NK}{d\alpha}$; überdem ist $MQN = AMQ - ANQ = d\beta = \frac{NL}{QN}$, und $QN = \frac{NL}{d\beta}$. Aber QN und QM sind nur um ein Differential unterschieden, also ist auch $QM = \frac{NL}{d\beta}$, und eben so PN oder $PM = \frac{NK}{d\alpha}$. Das giebt $\frac{QM}{PM} = \frac{NL \cdot d\alpha}{NK \cdot d\beta}$; und weil $NL = MN \cos\beta$, $NK = MN \cos\alpha$, so ist auch $\frac{QM}{PM} = \frac{d\alpha \cos\beta}{d\beta \cos\alpha}$. Ferner ist $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, also $d\alpha \cos\alpha = \mu\, d\beta \cos\beta$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\mu \cos\beta}{\cos\alpha}$; mithin findet man $QM = \frac{PM \cdot \mu \cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$.

Weil

Weil $\mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ist, und PM $= \delta \sec\alpha = \frac{\delta}{\cos\alpha}$, so hat man auch MQ $= \frac{\delta . \tang\alpha \cot\beta \cos\beta}{\cos\alpha^2}$, und im 119 §. n. 3. war $A\Pi = \delta \operatorname{tg}\alpha . \cot\beta$, mithin ist QM $= \frac{A\Pi . \cos\beta}{\cos\alpha^2}$. Ferner ist $A\Pi = M\Pi . \cos\beta$, also QM $= \frac{M\Pi . \cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$. Weil überdem $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\mu}$, also $\cos\beta^2 = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\mu^2}$, so ist $\frac{\cos\beta^2}{\cos\alpha^2} = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\mu^2 \cos\alpha^2} = \sec\alpha^2 - \frac{\operatorname{tg}\alpha^2}{\mu^2} = 1 + \frac{(\mu^2 - 1) \operatorname{tg}\alpha^2}{\mu^2}$, und man erhält $MQ = M\Pi \left(1 + \frac{(\mu^2 - 1) \operatorname{tg}\alpha^2}{\mu^2}\right)$.

Wenn $\mu > 1$ ist, wie die Figur annimmt, so ist $MQ > M\Pi$; ist aber $\mu < 1$, so wird $MQ < M\Pi$, wie auch daraus erhellet, weil nun NQ die lothrechte Linie PA in einem Punct π schneiden muß, der näher bey A liegt, als Π. Aus Q sey QR auf AP senkrecht gezogen, so ist $\frac{AR}{A\Pi} = \frac{MQ}{M\Pi} = \frac{\cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$, oder $\frac{M\Pi + \Pi Q}{M\Pi} = 1 + \frac{\Pi Q}{M\Pi} =$

$\cos\beta^2$

$\frac{\cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$, mithin $\Pi Q = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} \cdot M\Pi$.

Das giebt ferner $\Pi R = \Pi Q \cos\beta = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2}$

$\cdot A\Pi$, und $QR = \Pi Q \sin\beta = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2}$

$\cdot AM$, also auch $\Pi R = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\,\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha^2\,\mathrm{tg}\beta}$

$\cdot \delta$, $AR = \frac{\cos\beta^2 \cdot \mathrm{tg}\alpha^2}{\cos\alpha^2\,\mathrm{tg}\beta} \cdot \delta = \frac{\cos\beta^3}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$,

und $RQ = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)}{\cos\alpha^2} \cdot \delta\,\mathrm{tg}\alpha$ oder $RQ =$ $\frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$. Wenn also α verschwindet, so wird $AR = \mu\delta$, und $RQ = 0$, wie dem 120 §. gemäß ist, weil bey dieser Voraussetzung $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$ wird.

122. §.

39. Weil alle Strahlen, welche das Element MN
40 F. auffängt, nach ihrer Brechung in die Lage $M\mu$ und $N\nu$ so auseinander fahren, als kämen sie von Q her, so ist Q ein Bild von P, ein Zerstreuungspunct. Ist P ein Object, das im Wasser liegt, und AB die brechende Fläche des Wassers indem das von P ausgehende Licht aus dem Wasser in die Luft geht, so verwandelt sich die Lage der Strahlen, welche sich in dem Raum, des Winkels MPN ausbreiten würden, in die Lage $M\mu$, $N\nu$, und sie breiten sich nach der Brechung in

in den Raum des Winkels MQN aus. Einem Auge, das sich in O befindet, scheint P die Stelle Q zu haben: auch ändert sich diese Stelle Q mit der Stelle des Auges, weil AR und RQ sich mit den Winkeln α und β ändern. Es giebt also eine Reihe von Bildern Q auf ähnliche Art, wie sie das vom sphärischen Spiegel zurück geworfene Licht verursachte, und die Linie, worin alle diese Bilder liegen, heist hier eine dioptrische Brennlinie. (caustica per refractionem auch dia-caustica). In dem hier betrachteten Fall, wenn die brechende Fläche eben ist, ist diese Brennlinie geometrisch, nicht physisch, weil die Puncte Q Zerstreuungspuncte sind. Im folgenden werden auch Fälle betrachtet werden, wenn die brechende Fläche krumm ist, und wenn alsdenn die Puncte Q Sammlungspuncte sind, so ist diese Brennlinie physisch.

In der brechenden Ebene stelle man sich ein Paar mit den Halbmessern AM, und AN aus A beschriebene Kreise vor, wozu die Halbmesser AM und AN gehören, und wovon M*m*, N*n*, ein paar unendlich kleine Bogen sind; so erhellet, daß die auf das Element M*mn*N fallenden Strahlen nach der Brechung nicht einerley Zerstreuungspunct haben. Zu den auf den Bogen M*m* fallenden Strahlen gehört der Zerstreuungspunct Π, und zu den auf das Element MN des Halbmessers fallenden Strahlen der Zerstreuungspunct Q. In dem Fall, welchen die 40 Fig. vorstellt, ist es eben so, und dies verursacht, daß ein Auge in O, auf ähnliche Art wie beym sphärischen erhabenen Spiegel, zwey verschiedene Bilder von P siehet, das eine in Π, das andre in Q. In den meisten Fällen vermischt

mischt sich das Licht von beyden Bildern, und das Auge sieht nur ein wiewohl etwas undeutliches Bild von P. M. s. Bouguer Traité d' Optique Liv. II. Sect. I. Art. III. pag. 103. 104.

123. §.

Die Gleichung zu finden, welche die Natur der Brennlinie der ebenen Fläche ausdrückt.

Aufl. Man setze AR $= x$, RQ $= y$, so hat man im 121 §. ein paar Gleichungen für x und y beyde durch die Winkel α und β ausgedruckt: und wenn man diese Winkel aus jenen Gleichungen wegschaft, so giebt sich die gesuchte Gleichung zwischen x und y. Es war nemlich $x = \frac{\cos\beta^3}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$, $y = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$, und das giebt $\mu\delta = \frac{x \cos\alpha^3}{\cos\beta^3} = \frac{y\cos\alpha^3}{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}$, mithin $\frac{y}{x} = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\beta^3}$. Ferner ist $\cos\beta^2 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = (\mu^2 - 1)\sin\beta^2$, also $\frac{y}{x} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^3$. Aus Q falle QS auf AB senkrecht, so ist $\mathrm{tg}\beta = \frac{SM}{QS} = \frac{AM + RQ}{AR}$, also $\mathrm{tg}\beta = \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha + y}{x}$, und $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\beta - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x}$. Dieser Werth dem vorigen

gleich

gleich gesetzt giebt $\mathrm{tg}\beta - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^3$, also ferner $1 - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x\,\mathrm{tg}\beta} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^2$, oder $1 - \frac{\mu\delta\cos\beta}{x\cos\alpha} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^2$, wenn man nemlich μ statt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ setzt: also ist auch $\frac{\mu\delta\cos\beta}{x\cos\alpha}$ $= 1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2$. Es ist aber $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} =$

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{(1 - \mu^2\sin\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\sec\beta^2 - \mu^2\,\mathrm{tg}\beta^2)}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{(1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)}}$, und dieser Werth in die letzte Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{\mu\delta}{x\sqrt{(1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)}} = 1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2,$$

also $\frac{\mu^2\delta^2}{x^2} = (1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)^3$, ferner $1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2 = \sqrt[3]{\frac{\mu^2\delta^2}{x^2}}$, und $(1 - \mu^2)$ $\mathrm{tg}\beta^2 = \frac{\sqrt[3]{\mu^2\delta^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$, woraus $\mathrm{tg}\beta^2 =$ $\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\delta^2}}{(\mu^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}}$ gefunden wird, und $\mathrm{tg}\beta =$

$\sqrt{}$

$\dfrac{\sqrt{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})}}{\sqrt{(\mu^2 - 1)}\sqrt[3]{x}}$. Das giebt $tg\beta^3 =$
$\dfrac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{(\mu^2 - 1)^{\frac{3}{2}} x}$, und $x(\mu^2 - 1) tg\beta^3 =$
$\dfrac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{(\mu^2 - 1)}}$. Oben aber ist $y = x$
$(\mu^2 - 1) tg\beta^3$ gefunden, also ist die gesuchte

Gleichung $y = \dfrac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\mu^2 - 1)}}$.

Die Wurzelzeichen schaft man durch folgende Rechnung weg. Es ist auch $\sqrt[3]{(\mu^2 - 1)\, y^2} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2}$. Man setze $(\mu^2 - 1)\, y^2 = v$, $x^2 = w$, $\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} = r$, so ist $\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{w} = r$. Weiter sey $\sqrt[3]{v} = p$, $\sqrt[3]{w} = q$, so ist $p^3 = v$, $q^3 = w$, und $p = q - r$. Aus diesen dreyen Gleichungen schaft man p und q weg, so giebt sich eine rationale Gleichung zwischen w und v, also auch hiernächst zwischen x und y. Man cubire die Gleichung $p = q - r$, und setze statt p^3 und q^3 ihre rationalen Werthe; so findet man

$$v = w - 3r \cdot q^2 + 3r^2 \cdot q - r^3$$

also $3rq^2 - 3r^2 q + r^3 + v - w = 0$,
mithin auch

$$3rq^3 - 3r^2 q^2 + (r^3 + v - w)\, q = 0.$$

Diese

Diese Gleichung von

$3rq^3 - 3rw = 0$ subtrahirt giebt

$3r^2q^2 - (r^3 + v - w)q - 3rw = 0$, und vorhin war

$3r^2q^2 - 3r^3q + r^4 + r(v - w) = 0$: wird also diese letzte Gleichung von der nächstvorigen subtrahirt, so erhält man

$$(2r^3 + w - v)q - r^4 - rv - 2rw = 0,$$

also $q = \dfrac{r^4 + rv + 2rw}{2r^3 + w - v}$, und $p = q - r = \dfrac{2rv + rw - r^4}{2r^3 + w - v}$. Stellt man in diesen Gleichungen die angenommenen Werthe wieder her, so hat man $\sqrt[3]{x^2} = \dfrac{(\mu^2\delta^2 + (\mu^2 - 1)y^2 + 2x^2)\sqrt[3]{\mu^2\delta^2}}{2\mu^2\delta^2 + x^2 - (\mu^2 - 1)y^2}$,

$$\sqrt[3]{(\mu^2 - 1)y^2} = \frac{(2(\mu^2 - 1)y^2 + x^2 - \mu^2\delta^2)\sqrt[3]{\mu^2\delta^2}}{2\mu^2\delta^2 + x^2 - (\mu^2 - 1)y^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt y aus x vermittelst einer reinen quadratischen Gleichung, wie man am leichtesten übersiehet, wenn man sie so ausdrückt: $q = \dfrac{(r^3 + p^3 + 2q^3)r}{2r^3 + q^3 - p^3}$. Man findet nemlich $2r^3q + q^4 - p^3q = r^4 + rp^3 + 2rq^3$, also $(q + r)p^3 = q^4 - 2rq^3 + 2r^3q - r^4$, und $p^3 = \dfrac{q^4 - 2rq^3 + 2r^3q - r^4}{q + r} = q^3 - 3rq^2 + 3r^2q - r^3$, also $p^3 = (q - r)^3$, das ist $(\mu^2 - 1)y^2 = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\delta^2})^3$, mithin wie oben gefunden ist $y = \pm\sqrt{\dfrac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\delta^2})^3}{\mu^2 - 1}}$.

Wegen der Zweydeutigkeit des Wurzelzeichens hat also die Ordinate y allemahl zwey gleiche einander entgegen gesetzte Werthe, und die Brennlinie hat zwey gleiche und ähnliche Aeste, die sich von dem Punct p aus zu beyden Seiten der Axe der Abscissen ins unendliche fort erstrecken. Ueberdem ist es auch aus der Natur der Sache für sich offenbar, daß die Brennlinie diese Gestalt haben müsse, weil man auf beyden Seiten der Axe gleiche Winkel APM nehmen kann, und einerley Winkel APM auf jeder Seite einerley Stelle des Puncts Q geben muß.

Umgekehrt ist also auch x durch y vermittelst folgender reinen quadratischen Gleichung gegeben $p = \frac{(2p^3 + q^3 - r^3)r}{2r^3 + q^3 - p^3}$. Daraus folgt $2r^3p + pq^3 - p^4 = 2rp^3 + rq^3 - r^4$, also $(p-r)q^3 = p^4 + 2rp^3 - 2r^3p + r^4$, und $q^3 = p^3 + 3rp^2 + 3r^2p + r^3 = (p+r)^3$, mithin $x^2 = (\sqrt[3]{(\mu^2 - 1)\, y^2} + \sqrt[3]{\mu^2\, \delta^2})^3$. Es giebt also für jede gegebene Ordinate y ebenfals nur zwey gleich grosse einander entgegen gesetzte Abscissen x, und daraus ergiebt sich, daß auf beyden Seiten der Linie AB gleich grosse von einander abgesonderte einander ähnliche Stücke der Brennlinie liegen. Denn man kann auch AS $= y$, und SQ $= x$ als die Ordinate ansehen, so ergiebt die eben gefundene Gleichung, daß jeder Abscisse $y =$ AS zwey einander gleiche und entgegen gesetzte Ordinaten $x =$ SQ zugehören, wovon $x = \pm \mu\delta = \pm$ Ap die beyden kleinsten sind, wenn y oder AS $= 0$ angenommen wird. Weil nemlich δ^a einerley bleibt, man

man mag δ positiv, oder negativ nehmen, so ist die Gleichung einerley, der strahlende Punct P mag auf der einen oder der andern Seite von AB in gleicher Entfernung AP befindlich seyn, wofern anders das Verhältniß der Refraction $\mu : 1$ einerley bleibt.

In dem Fall $\mu < 1$ lassen sich die für x und y gefundenen Gleichungen so ausdrücken:

$$x^2 = (\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} - \sqrt[3]{(1 - \mu^2) y^2})^3$$

$$y^2 = \frac{(\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} - \sqrt[3]{x^2})^3}{1 - \mu^2}.$$

Nun ist x allemahl kleiner als $\mu\delta = Ap$, und eben dies ist der gröste Werth von x in dem Fall y oder AS $= 0$. In dem Fall $y^2 = \frac{\mu\delta}{\sqrt{(1 - \mu^2)}}$ verschwindet nun $x = SQ$, und wird für grössere y unmöglich. Umgekehrt muß $x < \mu\delta$ seyn für mögliche y, und für alle Werthe von x, die zwischen $+ \mu\delta$ und $- \mu\delta$ fallen, giebt es ein paar gleich grosse einander entgegen gesetzte y. Demnach begränzt in diesem Fall die Brennlinie einen bestimmten Raum von allen Seiten, so wie sie gegentheils in dem Fall $\mu > 1$ vier ins unendliche fortlaufende Aeste hatte.

Eine völlig rationale Gleichung zwischen x und y giebt folgende Rechnung. Man brauche die Buchstaben v und w statt $p^3 = (\mu^2 - 1) y^2$ und $q^3 = x^2$, setze auch überdem $r^3 = \mu^2 \delta^2 = \alpha$, so ist vermöge der ersten vorhin gefundenen Gleichung $2a + w - v = \frac{(a + v + 2w)\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{w}}$, und vermöge der zweyten $2a + w - v = \frac{(2v + w - a)\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{v}}$. Beyde Werthe gleich gesetzt, und diese gleichen Werthe cubirt, geben die rationale Gleichung $(a + v + 2w)^3 v = (2v + w - a)^3 w$ welche sich nach geschehener Multiplication in folgende verwandelt:

$$v^4 + \left.\begin{matrix} 3a \\ -2w \end{matrix}\right\} . v^3 + \left.\begin{matrix} 3a^2 \\ +24aw \\ -6w^2 \end{matrix}\right\} . v^2 + \left.\begin{matrix} a^3 \\ +24aw^2 \\ +2w^3 \end{matrix}\right\} . v = (w - a)^3 . w$$

Setzt man nun statt v und w die Werthe $(\mu^2 - 1) y^2$ und x^2, so steigt die Gleichung auf die achte Ordnung.

124. §.

Ein Lichtstrahl, der aus einer dünnern durchsichtigen Masse in eine Dichtere übergeht, wird allemahl gebrochen, wenn er gegen die brechende Fläche in dem Einfallspunct unter einem schiefen Winkel geneigt ist: nur der lothrechte Strahl geht ungebrochen durch. Je grösser der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen das Einfallsloth, oder je kleiner seine Neigung gegen die brechende Fläche ist, desto grösser ist die Brechung. In dem Fall, wenn der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth einen rechten Winkel machte, oder seine Neigung gegen die brechende Fläche $= 0$ würde, wäre die Brechung am stärksten: weil aber der Strahl nun die brechende Fläche eigentlich nicht mehr

mehr trift, so erfolgt auch keine Brechung mehr; der Strahl dringt in die dichtere Masse gar nicht mehr hinein, könnte eine Brechung erfolgen, so wäre der Sinus des gebrochenen Winkels $= \frac{1}{\mu}$; und wenn für Luft und Glas $\frac{1}{\mu} = \frac{2}{3}$ ist, so wäre der gröste gebrochene Winkel, oder eigentlich die Gränze, die kein gebrochener Winkel übertreffen kann, $= 41° \, 48' \, 37''$.

Man nehme umgekehrt an, daß der Strahl aus der dichtern Masse in die dünnere falle, und das Verhältniß der Refraction sey $= \mu : 1$, also $\mu < 1$, der Neigungswinkel sey α, der gebrochene Winkel β; so ist $\sin\beta = \frac{1}{\mu} \sin\alpha$, und $\sin \beta > \sin\alpha$. Es kann aber $\sin\beta$ nie grösser als 1 seyn: demnach wird der Strahl nur gebrochen, oder er kann nur aus der dichtern Masse in die dünnere dringen, so lange $\frac{1}{\mu} \sin\alpha$ nicht grösser als 1 ist. Uebertrift $\frac{1}{\mu} \sin\alpha$ die Einheit, so wird der Strahl wieder zurück geworfen, nicht gebrochen.

Die Voraussetzung $\frac{1}{\mu} \sin\alpha < 1$ erfordert, daß $\sin\alpha < \mu$ sey: demnach muß der Sinus des Neigungswinkels kleiner seyn, als der Exponent des Verhältnisses der Refraction, wenn der Strahl aus der dichtern Masse in die dünnere dringen soll. Wenn z. E. für Glaß und Luft $\mu = \frac{2}{3}$ ist; so wird erfordert, daß $\sin\alpha < \frac{2}{3}$ sey, wenn der Strahl aus dem Glase in die Luft gehen soll: mithin muß α nicht über $41° 48' 37''$ betragen, oder der Neigungswinkel des Strahls gegen die brechende Fläche, muß nicht kleiner seyn, als $48° 11' 23''$.

Aus eben diesem Grunde wird im 119 §. n. 2.

$$A\Pi = \mu\delta \sqrt{\left(1 - \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{z^2}{\delta^2}\right)}$$ unmöglich,

wenn $\frac{z}{\delta}$ oder $\tan g\alpha > \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)}}$ ist, oder

$\cot\alpha < \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\mu}$, mithin wenn $\mathrm{cosec}\,\alpha <$

$\frac{1}{\mu}$ und $\sin\alpha > \mu$ ist.

125. §.

36 F. Wenn der Boden des Gefässes ABCD (115 §.) eine ebene Glaßtafel ist, wovon die untere und obere Seitenfläche genau parallel sind; wenn ferner dieser Boden genau wagrecht gestellet, und das Gefäß mit Wasser gefüllt ist, dessen obere Fläche, sobald es ruhig geworden, gleichfals den wagrechten Stand annimmt; so wird ein Lichtstrahl, den man im finstern Zimmer in das Gefäß fallen läßt, drey mahl gebrochen werden, fals anders das Gefäß so unterstützt ist, daß der Strahl durch den gläsernen Boden durchgehen kann, ohne daß ihm etwas undurchsichtiges im Wege ist. Die erste Brechung erfolgt oben in der Wasserfläche, die zweyte unten, da wo Wasser und Glaß an einander gränzen, die dritte in der untern Fläche des gläsernen Bodens, wo der Strahl wieder in die

Luft

Luft gehet. Giebt man nun auf die Lage des oben einfallenden, und unten wieder in die Luft gehenden Strahls acht, so findet sich allemahl, daß der eine dieser Strahlen mit dem andern parallel sey.

Wenn also in der 41 Fig. zwischen den dreyen ebenen und parallelen Flächen RS, TV, XY, in dem Raum β Wasser in dem Raum γ Glaß, oben und unten in α aber Luft befindlich ist, und auf RS ein Strahl AB fällt, der im Wasser von B nach C, im Glase von C nach D, in der Luft wieder von D nach E geht; so ist DE mit AB parallel. 41 F.

Man kann auch statt des Wassers andre durchsichtige flüßige Massen wählen, der Erfolg wird immer derselbe seyn. Auch kann man den ins finstere Zimmer fallenden Strahl mit einem ebenen Spiegel auffangen, der ihn aufwärts zurück wirft: wenn man nun das erwehnte Gefäß, die horizontale Lage des Bodens beybehalten, so stellt, daß der zurückgeworfene Strahl zuerst von unten hinauf durch den gläsernen Boden, und so ferner durch das Wasser oben wieder in die Luft geht; so ist ebenfals der unten einfallende mit dem oben ausfahrenden Strahl parallel.

Vermöge dieser und andrer ähnlicher Versuche ist man berechtiget anzunehmen, der ausfahrende Strahl *DE* sey allemahl mit dem einfallenden *AB* parallel, wenn derselbe aus der Luft durch zwo von der Luft und von einander selbst verschiedene durchsichtige Massen wieder in Luft von eben der Dichtigkeit fällt, die brechenden Flächen aber, welche die beyden durchsichtigen Massen von einander selbst und von der Luft absondern, eben und

und mit einander parallel sind. Ja, man hat keinen Grund zu glauben, daß der Erfolg anders seyn werde, wenn gleich die durchsichtige Masse, worin der einfallende Strahl AB liegt, und wohinein der zum dritten mahl gebrochene Strahl DE geht, nicht eben Luft, sondern jede andre von den in den Räumen β und γ befindlichen unterschiedene Masse wäre.

126. §.

Wenn ein Lichtstrahl nach und nach durch mehrere durchsichtige Massen geht, die insgesamt durch ebene und parallele Flächen von einander abgesondert sind; so ist das Verhältniß vom Sinus des ersten Neigungswinkels an der ersten brechenden Fläche zum Sinus des letzten gebrochenen Winkels an der letzten brechenden Fläche eben so groß, als es seyn würde, wenn der Strahl unmittelbar aus der ersten durchsichtigen Masse in die letzte fiele.

Auch ist bey eben dieser Voraussetzung das Verhältniß der Refraction für die erste und letzte Masse, wenn nemlich der Strahl unmittelbar aus der ersten in die letzte fiele, zusammen gesetzt aus den Verhältnissen der Refraction für jedes Paar dieser Massen, wie sie in der Ordnung von der ersten bis zur letzten folgen.

Beweis des 1. Satzes. Man nehme zuerst nur drey nach einander folgende durchsichtige Massen α, β, γ, an, welche durch die parallelen
41 F. Ebenen RS, TV, von einander gesondert sind. Der Lichtstrahl nehme den Weg ABCD, und PQ,

pq,

pq, stellen die Einfallslothe in den Puncten B, C, vor. Eine dritte Ebene XY sey mit den vorigen beyden parallel, worauf der Strahl in D fällt, ΠK sey das Einfallsloth, und im Raum, wo K liegt, sey wiederum eine durchsichtige Masse befindlich, die mit α von einerley Art ist: so wird der Strahl ABCD bey D wieder in die Lage DE mit AB parallel gebrochen (125. §.) Diesemnach ist KDE = PBA der Einfallswinkel für den gebrochenen Winkel ΠDC = qCD, wenn der Strahl aus der Masse α unmittelbar in die Masse γ fällt.

Ferner nehme man an, daß so viele durchsichtige Massen, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, wie man will durch ebene und parallele Flächen von einander abgesondert sind, so ist in der dritten Masse qCD der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel ABP, wenn der Strahl auch unmittelbar aus α in γ fiele. Also hat CD einerley Lage, es mag der Strahl AB erst in BC in der Masse β gebrochen seyn, oder in der Lage aC ⌗ AB auffallen, wenn die Masse β mit α einerley ist. Im letzten Fall aber wäre rDE vermöge des erwiesenen der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel pCa = PBA: mithin ist auch rDE der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel ΠDb = PBA, wenn γ und β mit α von einerley Art wären, oder der Strahl unmittelbar aus α in δ fiele. Demnach ist der Satz wahr, wenn der Strahl durch vier brechende Massen fällt. 42 F.

Eben so gilt der Schluß für jede angenommene Zahl der brechenden Massen auf die nächstfolgende um eins grössere. Ist der Satz wahr, wenn alle Massen von α bis ζ an einander gränzen, so ist er auch wahr, wenn noch die Masse η hinzu kommt.

Denn vermöge der Voraussetzung behält FG einerley Lage, es mag der Strahl den Weg ABCDEF nehmen, oder in der Lage YF # AB, unter dem Neigungswinkel ZFY in der Masse α auffallen: mithin ist VGH der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel WGX = ZFY = PBA, wenn der Strahl unmittelbar aus der Masse α in η hinüber geht: und hiemit ist die allgemeine Richtigkeit des Satzes selbst bewiesen.

Beweis des 2. Satzes. Es sey

$\sin PBA : \sin QBC = m : n$
$\sin pCB : \sin qCD = p : q$
$\sin \Pi DC : \sin rDE = k : r$
$\sin \pi ED : \sin sEF = s : v$
$\sin ZFE : \sin tFG = w : x$
$\sin WGF : \sin VGH = y : z$;

so ist überdem wegen der parallelen Lage der brechenden Ebenen $QBC = pCB$, $qCD = \Pi DC$, $rDE = \pi ED$, $sEF = ZFE$, $tFG = WGF$; folglich das Verhältniß $\sin PBA : \sin VGH$ aus allen übrigen zusammen gesetzt.

Eben dies Verhältniß wäre zugleich das Verhältniß der Refraction, wenn der Strahl unmittelbar aus der Masse α in die Masse η fiele. (1 S.) Man kann also das Verhältniß der Refraction für zwey Massen finden, wenn das Verhältniß der Refraction für jede dieser Massen und eine und eben dieselbe dritte bekannt ist. Hat man z. E. das Verhältniß der Refraction für Wasser und Luft = 3 : 4 für Luft und Glaß = 3 : 2, so ist für Wasser und Glaß das Verhältniß der Refraction = 9 : 8.

Der

Der X. Abschnitt.

Die Strahlenbrechung, wenn das Licht durch ein Prisma fällt.

127. §.

Zwischen zwoen Ebenen *EF* und *EG*, die einander in *EH* schneiden, befindet sich eine dichtere durchsichtige Masse, als ausserhalb derselben, woselbst ich hier Kürze halber Luft annehmen will, und auf eine dieser Ebenen *EF* fällt ein Lichtstrahl *AB*, der in der Ebene des Neigungswinkels beyder Ebenen *EF* und *EG* liegt: man sucht die Lage des zum zweyten mahl gebrochenen wieder in die Luft gehenden Strahls. 43 F.

Aufl. Es sey PQ das Neigungsloth des in B einfallenden Strahls AB, und durch B sey RE in der Ebene EF, so wie ES in der Ebene EG auf EH senkrecht, so ist RES der Neigungswinkel beyder Ebenen gegen einander. In eben dieser Ebene liegt das Neigungsloth PQ, weil beyde Ebenen QRE und RES auf EF senkrecht sind, mithin zusammen fallen; (313 §. G.) zugleich liegt AB, wie vorausgesetzt wird, in der Ebene RES: demnach bleibt auch der gebrochene Strahl BC in derselben Ebene, und wenn *pq* das Neigungsloth durch C ist, so liegt zugleich *pq* aus der schon angeführgeführten Ursache in derselben Ebene, mithin auch der zum zweyten mahl gebrochene Strahl CD. Nun sey der Einfallswinkel PBA $= \alpha$, der gebrochene Winkel QBC $= \beta$, das Verhältniß der Refraction für die durchsichtige Masse $m : n$, so ist

$\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$. Ferner sey BEC $= \varepsilon$, der zweyte

Einfallswinkel pCB $= \gamma$, der zweyte gebrochene

Winkel qCD $= \delta$, so ist $\sin\delta = \frac{m}{n}\sin\gamma$. (117. §.)

Wenn ferner die beyden Einfallslothe einander in M schneiden, so hat man pMB + BMC $= 180°$ $= \varepsilon +$ BMC, also pMB $= \varepsilon$, und $\gamma = \varepsilon - \beta$,

woraus $\sin\delta\ \frac{m}{n}\sin(\varepsilon - \beta) = \frac{m}{n}(\sin\varepsilon\ \cos\beta$

$- \cos\varepsilon\ \sin\beta)$ gefunden wird. Braucht man in

dieser Gleichung den Werth $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$, und

$\cos\beta = \sqrt{(1 - \frac{n^2}{m^2}\sin\alpha^2)}$ so erhält man $\sin\delta =$

$$\frac{m}{n}\sin\varepsilon\sqrt{(1 - \frac{n^2}{m^2}\sin\alpha^2)} - \cos\varepsilon\ \sin\alpha.$$

Wenn beyde Ebene Flächen parallel sind, so hat man $\varepsilon = 0$, also $\sin\varepsilon = 0$, $\cos\varepsilon = 1$, und $\sin\delta = -\sin\alpha$, oder der einfallende und ausfallende Strahl machen jeder mit ihren Einfalls-Loth einerley Winkel; weil nun beyde Einfallslothe in dem Fall $\varepsilon = 0$ parallel sind, so ist auch der ausfahrende Strahl mit dem einfallenden parallel, nur daß nicht beyde auf einerley Seite des zugehörigen Einfallsloths liegen, wie dem 117. §. gemäß ist, wo diesen Fall die 36. Fig. vorstellet.

128. §.

Der ausfahrende Strahl schneidet den einfallenden unter dem Winkel KND, und man hat KND $=$ NBC $+$ NCB. Ferner ist NBC $= \alpha - \beta$, und NCB $= \delta - \gamma$, also KND $= \alpha + \delta - (\beta + \gamma)$; und weil $\beta + \gamma = p$MB $= \varepsilon$, so ist KND $= \alpha + \delta - \varepsilon$. In dem Fall $\alpha = 0$, wenn der Strahl AB senkrecht auf die Fläche EF fällt, ist zugleich $\beta = 0$, also hat man $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon$. Mit α wächst β, also nimmt δ ab, wenn α wächst, weil $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin(\varepsilon - \beta)$ war: wenn also α beständig um eben soviel zunähme, als δ abnimmt, so würde $\alpha + \delta$ eine beständige Grösse seyn, mithin auch der Winkel KND $= \alpha + \delta - \varepsilon$ keine Aenderungen leiden, wenn gleich α Aenderungen litte. Allein die Winkel α und δ hängen nicht so von einander ab, daß diese Voraussetzung bestehen kann, und der Winkel KND ändert sich würklich mit α und δ. Um einigermassen zu übersehen, wie die Aenderungen des Winkels KND, den ich nun $= \zeta$ setzen will, von den Aenderungen des Winkels α abhängen, erwäge man folgendes.

Wenn der Strahl senkrecht auffällt, so ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon$, und $\zeta = \delta - \varepsilon$. Ferner hat man allemahl $\sin\alpha = \frac{m}{n} \sin\beta$, $\sin\delta$

$=$

$= \frac{m}{n} \sin(\varepsilon - \beta)$, also $d\alpha \cos\alpha = \frac{m}{n} d\beta \cos\beta$ und $d\delta \cos\delta = -\frac{m}{n} d\beta \cos(\varepsilon - \beta)$, oder $d\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos\beta}{\cos\alpha}$, und $d\delta = -\frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$; die Gleichung $\zeta = \alpha + \delta - \varepsilon$ aber giebt $d\zeta = d\alpha + d\delta$: also hat man $d\zeta = \frac{m}{n} d\beta \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}\right)$. Die Voraussetzung $\alpha = 0$ giebt $d\zeta = \frac{m}{n} d\beta \left(1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{(1 - (m^2 : n^2) \sin\varepsilon^2)}}\right)$. Weil nun $m > n$ ist, so ist $1 - \frac{m^2}{n^2} \sin\varepsilon^2 < 1 - \sin\varepsilon^2$, oder $\cos\varepsilon > \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2} \sin\varepsilon^2)}$, also $d\zeta$ negativ: das heißt, wenn α von der Gränze $= 0$ zu wachsen anfängt, so nimmt ζ ab. Mit α wächst auch β, und beyde Cosinus von α und β nehmen zugleich ab, jedoch wächst α schneller als β, und $\cos\alpha$ nimmt schneller ab, als $\cos\beta$, wie denn der Werth $\alpha = 90°$, den Werth $\cos\alpha = 0$, also $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \infty$ giebt. Mit α wächst also $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ beständig, und hat alle mögliche positive Werthe bis ins unend-

unendliche fort. Mit α und β wächst auch cos $(\varepsilon - \beta)$ und $\cos\delta = \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2} \sin(\varepsilon - \beta)^2)}$, aber $\cos\delta$ schneller, als $\cos(\varepsilon - \beta)$, mithin nimmt $\frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ ab, und dieser Werth wird $= 1$, wenn $\beta = \varepsilon$ ist. Weil nun $d\zeta = \frac{m}{n} d\beta$

$\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}\right)$ war, so nimmt der negative Werth von $d\zeta$ ab, wenn α von der 0 an wächst, und die Aenderung, welche $d\zeta$ leidet, wird nach und nach geringer, so lange bis $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ $= \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ wird, womit $d\zeta$ verschwindet. Hiernächst wird $d\zeta$ positiv, und ζ wächst beständig mit α so lange bis $\alpha = 90°$ wird: grössere Werthe für α aber kommen hier nicht vor.

129. §.

Zu finden, wie groß α seyn müsse, damit ζ am kleinsten ausfalle.

Aufl. Weil anfangs ζ abnimmt, wenn α wächst, hiernächst aber ζ wieder zunimmt, so giebt es einen kleinsten Werth von ζ, und das ist derjenige, dem der Werth $d\zeta = 0$ zugehört, welches die Gleichung $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ giebt.

Weil

Weil nun $\sin\alpha = \frac{m}{n} \sin\beta$, und $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin(\varepsilon - \beta)$, so erfordert die angenommene Bedingung, daß

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{(1 - (m^2 : n^2)\sin\beta^2}} = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\sqrt{(1 - (m^2 \cdot n^2)\sin(\varepsilon - \beta)^2)}}$$

sey, und dieser Gleichung geschicht ein Genüge, wenn $\varepsilon = 2\beta$, oder $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$ gesetzt wird. Demnach ist ζ am kleinsten, wenn $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$, oder $\sin\alpha = \frac{m}{n} \sin\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, folglich $\alpha = \text{Arc.}\sin.\frac{m}{n}\sin\frac{1}{2}\varepsilon$.

Weil in eben diesem Fall $\sin\delta = \frac{m}{n}\sin\beta$ wird, so hat man zugleich $\alpha = \delta$, oder der einfallende und ausfahrende Strahl machen jeder mit seinem Neigungsloth einerley Winkel.

130. §.

Wenn man beyde Ebenen EF und EG mit ei-
43 F. ner dritten RFGS schneidet, die mit der Durchschnittslinie EH der vorigen parallel liegt; so schliessen alle drey zusammen einen dreyseitigen prismatischen Raum ein, und die Ebene der Brechung RES ist auf den Seitenlinien und Seitenflächen dieses Prisma senkrecht. Läßt man also aus Glaß oder einer andern durchsichtigen Masse ein dreyseitiges Prisma verfertigen, so dient dasselbe, für diejenige durchsichtige Masse, woraus das Prisma gemacht ist, das Verhältniß der Refraction

zu

zu finden, vorausgesetzt, daß man den Neigungswinkel α, für den einfallenden Strahl, und eben so den Neigungswinkel δ für den ausfahrenden Strahl messen könne.

Die Gleichung $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2} \sin\alpha^2)} - \cos\varepsilon \sin\alpha$ giebt nemlich $(\sin\delta + \cos\varepsilon \sin\alpha)^2 = \frac{m^2}{n^2} \sin\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2 \sin\alpha^2$, und daraus findet man

$$\frac{m}{n} = \sqrt{((\sin\delta \operatorname{cosec}\varepsilon + \sin\alpha \cot\varepsilon)^2 + \sin\alpha^2)}.$$

Weil die Gestalt des Prisma bekannt seyn muß, so ist auch ε ein bekannter Winkel, und so ist $\frac{m}{n}$ durch die drey bekannten Winkel α, δ, ε, gegeben. Der Winkel ε heist gewöhnlich der **brechende Winkel** des Prisma.

Bringt man das Prisma in die Lage, daß $\delta = \alpha$ wird, welches vermöge des 128. §. allemahl möglich ist; so hat man $\frac{m}{n} = \sin\alpha \sqrt{(1 + (\operatorname{cosec}\varepsilon + \cot\varepsilon)^2)} = \sin\alpha \sqrt{(1 + \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)}$ (458. §. Geom.) $= \sin\alpha \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\varepsilon$, oder $\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon}$, welches mit dem 129. §. übereinkommt.

Wenn ER = ES, oder das Prisma gleichschenklicht ist; so hat man ERS $= 90° - \tfrac{1}{2}\varepsilon$, und EBC $= 90° - \beta$. In der angenommenen Lage des Prisma aber ist $\beta = \tfrac{1}{2}\varepsilon$, also EBC = ERS, folglich BC mit RS parallel: oder derjenige

Theil des gebrochenen Strahls, welcher im Prisma selbst liegt, ist mit RS parallel.

131. §.

43 F. Nach Anleitung des 128. und 129. §. also läßt sich der Versuch am bequemsten so anstellen. In ein verfinstertes Zimmer lasse man durch eine kleine Oefnung den Sonnenstrahl AB fallen, und befestige das Prisma in horizontaler Lage, so nemlich, daß die Seitenlinien horizontal liegen: wenn alsdenn diese Seitenlinien zugleich auf der verticalen Ebene durch den Sonnenstrahl senkrecht sind, so ist diese Verticalfläche zugleich die Ebene der Brechung für den Strahl AB. Damit man nun den Einfallswinkel ABP $= \alpha$ beliebig verändern kann, wird das Prisma an beyden Enden, da wo es seine Grundflächen hätte, mit einem Paar cylindrischer Zapfen versehen, deren gemeinschaftliche Axe mit den Seitenlinien des Prisma parallel ist. Diese Zapfen werden alsdenn so unterstützt, daß man das ganze Prisma um seine horizontalliegende Axe umdrehen kann.

Gesetzt nun das Prisma liegt anfangs so, daß der Strahl AB auf die Seitenfläche EF senkrecht fällt; und man drehet es um seine Axe so, daß der Winkel RBA kleiner wird, so wird zugleich der Winkel KND kleiner, und weil AB einerley Lage behält, so senkt sich der ausfahrende Strahl CD gegen den Horizont: und dies solange, bis α

$$= \text{Arc} . \sin \frac{m}{n} \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon$$ wird. Trift also der Strahl CD eine gegen überstehende Wand so

wird

wird das auf dieselbe projicirte Sonnenlicht bis dahin herab sinken. Wird hiernächst das Prisma noch weiter auf eben die Art gedrehet, so wächst der Winkel KND, und das auf die gegen überstehende Wand fallende Sonnenlicht hebt sich wieder. Demnach läßt sich durch Versuche, mittelst allmähliger Umdrehung des Prismen, leicht die Lage desselben finden, die es haben muß, damit der Winkel KND $= \zeta$ am kleinsten, und zugleich der Winkel $\delta = \alpha$ werde. Man drehet nemlich das Prisma so lange, bis das auf die gegenüber stehende Wand fallende Licht zu sinken aufhört, und bey weiterer Umdrehung wieder steigen würde: in der so gefundenen Lage muß man es befestigen.

132. §.

Bey dem allen würde es nun doch noch seine Schwierigkeit haben, den Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die Seitenfläche EF des Prisma, oder seine Ergänzung α zu $90°$, genau genug zu messen; deswegen kann man sich des folgenden Hülfsmittels bedienen. Man ziehe BV, 44 F.
CW, in der Ebene RES horizontal, und durch E in derselben Ebene die Horizontallinie YZ, so ist $VBP + BEY = 90°$, und $WCq + CEZ = 90°$, folglich $VBP + WCq = 180° - (BEY + CEZ) = BEC$, oder $VBP + WCq = \varepsilon$. Weiter sey $VBA = \eta$, $WCD = \vartheta$, so ist VBA die Höhe der Sonne über dem Horizont, und WCD die Neigung des ausfahrenden Strahls gegen den Horizont: man hat aber $VBP + \eta = \alpha$, und $WCq + \vartheta = \delta$, mithin $\alpha + \delta = VBP + WCq + \eta + \vartheta$, oder $\alpha + \delta = \eta + \vartheta + \varepsilon$. Diesemnach

 hat

hat man in dem Fall, wenn $\alpha = \vartheta$ ist, $2\alpha = \eta + \vartheta + \varepsilon$, oder $\alpha = \frac{1}{2}(\eta + \vartheta + \varepsilon)$, kann also nur für den Augenblick der Beobachtung die Höhe der Sonne und zugleich der Neigungswinkel ϑ gemessen werden, so hat man zugleich den Winkel α.

Diese Voraussetzung $\alpha = \delta$ erfordert, daß $\beta = QBC = \frac{1}{2}\varepsilon$ sey. (129. §.) Wenn demnach in eben diesem Fall der zum erstenmahl gebrochene Strahl BC horizontal ist, so hat man zugleich $VBP = \frac{1}{2}\varepsilon$, weil der Voraussetzung gemäß BC mit BV in grader Linie liegt. Es war aber $VBP + WCq = \varepsilon$, also nunmehro auch $WCq = \frac{1}{2}\varepsilon$, so wie $\alpha = \eta + \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\delta = \vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon$. Ueberdem ist $\alpha = \delta$, also $\eta = \vartheta$, oder VBA = WCD. Demnach ist es in diesem besondern Fall nur nöthig, daß man die Höhe der Sonne messe, weil der zum zweytenmahl gebrochene Strahl CD nun gegen den Horizont eben die Neigung hat, wie der einfallende Strahl AB.

Hätte man umgekehrt $\eta = \vartheta$ gefunden, so gäbe dies $\alpha = \eta + \frac{1}{2}\varepsilon = \eta + VBP$, also $VBP = \frac{1}{2}\varepsilon = CBQ$, mithin müste BC mit BV in grader Linie liegen, oder BC wäre horizontal. Weil übrigens allemahl $\alpha = \text{Arc. sin} \frac{m}{n} \sin\beta$ ist, so hat man in dem jetzt betrachteten besondern Fall $\alpha = \text{Arc. sin.} \frac{m}{n} \sin\frac{1}{2}\varepsilon$, und $\eta = \text{Arc. sin} \frac{m}{n} \sin\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$. So groß muß die Sonnenhöhe seyn, wenn der zum erstenmahl gebrochene Strahl horizontal liegen soll.

Weil

Weil man auch die Neigungswinkel REY, SEZ, der Seitenflächen des Prisma gegen den Horizont messen kann, so dienen diese ebenfals α zu finden, wenn nur die Höhe der Sonne gemessen ist. Setzt man REY $= \lambda$, so hat man $\alpha - \eta + \lambda = 90$, also $\alpha = 90^\circ + \eta - \lambda$ aus η und λ. Kann man die Neigung der Seitenfläche RS gegen den Horizont messen, die ich $= \omega$ setzen will, so ist $\lambda = \omega + 90^\circ - \frac{1}{2}\varepsilon$.

133. §.

Noch ist bey dieser Art von Versuchen zu be- 43 F.
merken, daß der bisher mit ε bezeichnete Winkel des Prisma nicht jede willkührliche Grösse haben könne, wenn das Licht bey jedem Neigungswinkel PBA $= \alpha$ durch beyde Flächen EF und EG des Prisma durchgehen soll. Man gehe nemlich auf den 124. §. zurück, und erinnnere sich, daß hier BC$p = \gamma$ der Neigungswinkel für die Fläche EG des Prisma sey, so wie qCD $= \delta$ der gebrochene Winkel ist. Damit nun der Strahl nach CD durchgehen könne, muß $\sin\delta$ nicht grösser als 1 mithin $\frac{m}{n}\sin\gamma$ nicht grösser als 1 seyn, und $\sin\gamma$ nicht grösser als $\frac{n}{m}$, mithin beym gläsernen Prisma $\sin\gamma$ nicht grösser, als $\frac{2}{3}$, und γ nicht grösser als $41^\circ\ 48'$: also muß $\varepsilon - \beta < 41^\circ\ 48'$ und $\varepsilon < \beta + (41^\circ\ 48')$ seyn. Der kleinste Werth von β ist 0°, also muß $\varepsilon < 41^\circ\ 48'$ seyn, wenn das Licht bey jedem Einfallswinkel PBA $= \alpha$ durch das Prisma durchgehen soll. Wenn $\varepsilon = 90^\circ$

wäre, so könnte der Strahl AB nie durchgehen, weil α nicht über $90°$ und β nicht über $41° 48'$ betragen kann.

Alle bey Betrachtung des Prisma bisher erwiesene Formuln sind in der Voraussetzung richtig, daß der Neigungswinkel α auf der Seite des Perpendiculs BP liege, wo der dickere Theil des Prisma liegt. In dem Fall, wenn der einfallende Strahl, mithin der Winkel α, auf der andern Seite liegt, und BA sich gegen den dünnern Theil vom Prisma neigt, muß α mithin auch β negativ angenommen werden, und alsdenn erfordert die eben erwehnte Voraussetzung, daß $\varepsilon < (41° 48') - \beta$ sey, widrigenfals wird das Licht nicht nach CD durchgehen. Weil aber β bis zu $41° 48'$ wächst, wenn α bis zum rechten Winkel anwächst; so müste $\varepsilon = 0$ seyn, wenn der Strahl bei jedem Neigungswinkel α durchgehen sollte; das heist, die Seitenflächen EF, EG des Prisma müsten parallel seyn. Diesemnach geht das Licht nur so lange durch, als $\beta < (41° 48') - \varepsilon$ ist, und

$$\sin\alpha < \frac{m}{n} \sin((41° 48') - \varepsilon).$$

134. §.

Wenn auf die Seitenfläche EF des durchsichtigen Prisma ein Lichtstrahl fällt, der aus mehrern einfachen parallelen Strahlen zusammen gesetzt ist; so werden auch die ausfahrenden Strahlen insgesammt parallel seyn, wofern man voraussetzen kann, daß alle Strahlen nach einerley Gesetz gebrochen werden, aber das Verhältniß der Refraction für alle einerley sey. Denn bey dieser Voraus-

aussetzung ist in der 44 Fig. der Winkel KND $= \zeta$ (128. §.) für alle einerley. Wofern aber mehrere 44 F.
auf die Seitenfläche EF des Prisma fallende Strahlen AB, Ab, eine solche Lage gegen einander haben, als kämen sie von einerley Punct A her; so werden auch die zum zweyten mahl gebrochenen Strahlen CD, cd, eine solche Lage gegen einander haben, als kämen sie von einerley Punct a her. Es sey PQ das Einfallsloth für den Strahl AB, 45 F.
und $\Pi\Lambda$ für den Strahl Ab, man setze PBA $= \alpha$; so ist $\Pi b\mathrm{A} = \alpha + \mathrm{BA}b$. Denn es ist $\mathrm{E}b\mathrm{A} = \mathrm{EBA} + \mathrm{BA}b$, also $\mathrm{E}b\mathrm{A} - 90^\circ = \mathrm{EBA} - 90^\circ + \mathrm{BA}b$, d. i. $\Pi b\mathrm{A} = \mathrm{PBA} + \mathrm{BA}b = \alpha + \Delta\alpha$, wenn $\mathrm{BA}b = \Delta\alpha$ gesetzt wird. Es sey ferner bey der zweyten Brechung pq das Einfallsloth für den Strahl ABC und $\pi\lambda$ für den Strahl Abc, so ist $q\mathrm{CD} = \delta$ (127. §.), und die Gleichung

$$\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\left(\varepsilon - \mathrm{A} \,.\, \sin \,.\, \frac{n}{m} \sin\alpha\right)$$ ergiebt,

daß δ abnehme, wenn α wächst. Man setze also, δ nehme um die Differenz $\Delta\delta$ ab, wenn α um die Differenz $\Delta\alpha$ wächst, so ist $\lambda cd = \delta - \Delta\delta$, und $\lambda cd < q\mathrm{CD}$; woraus schon folgt, das CD, cd, rückwärts nach C, c, zu verlängert irgendwo in a zusammen stossen. Nun erhellet, wie vorhin, daß $p\mathrm{C}a = \pi\mathrm{C}a + \mathrm{C}ac$ sey, oder $q\mathrm{CD} = \lambda cd + \mathrm{C}ac$; es ist aber $q\mathrm{CD} = \delta$, $\lambda cd = \delta - \Delta\delta$, also folgt, es sey $\mathrm{C}ac = \Delta\delta$.

135. §.

Es ist der Winkel BAb **gegeben, den ein Paar einfallende Strahlen mit einander einschlies-**

schliessen: man soll den Winkel Cac finden, unter welchem die zum zweytenmahl gebrochenen Strahlen einander schneiden.

Aufl. Wenn man dem 127. und 134. §. gemäß $PBA = \alpha$, $BAb = \Delta\alpha$, $qCD = \delta$, $Cac = \Delta\delta$ setzt; so hat man

$$\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2} \sin\alpha^2\right)} - \cos\varepsilon \sin\alpha;$$

(127. §.) und wenn in dieser Gleichung $\alpha + \Delta\alpha$ statt α gesetzt wird, so findet man

$$\sin(\delta + \Delta\delta) = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2} \sin(\alpha + \Delta\alpha)^2\right)}$$

$- \cos\varepsilon \sin(\alpha + \Delta\alpha)$. Aus dieser Gleichung giebt sich $\delta + \Delta\delta$ vermöge der trigonometrischen Tafeln, aus der erstern aber δ. Wird also ein Winkel von andern abgezogen, so hat man $\Delta\delta$.

Wenn $\Delta\alpha$ sehr klein ist, so läßt sich $\Delta\delta$ beynahe vermittelst der Differentialrechnung finden, und man hat $d\delta = - \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos(\varepsilon - \beta}{\cos\delta}$ (128. §.) woselbst $\beta = A . \sin \frac{n}{m} \sin\alpha$ ist.

Eben daselbst war $d\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos\beta}{\cos\alpha}$; hat also der Strahl AB die Lage, welche erfordert wird, damit $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$ werde, oder ist $\alpha = A . \sin \frac{n}{m} \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, so ist zugleich $\alpha = \delta$, und $d\delta = - d\alpha$, oder BAb, Cac, sind beynahe gleich groß.

136. §.

136. §.

Es stelle VW die Wand eines verfinsterten Zimmers vor, wohin sonst kein Licht, ohne nur durch eine kleine kreisförmige Oefnung *xy* fallen kann. Durch diese falle ein Sonnenstrahl B*xyb* hinein, und man stelle sich vor, der Strahl *x*B komme vom untern Rande, *yb* aber von obern Rande der Sonne S; so ist alles durch die Oefnung fallende Sonnenlicht in dem Raum des Kegels BA*b* enthalten, (75. §. Optick) und wenn man den Strahl B*xyb* mit einer Ebene senkrecht auffängt, so projicirt er sich in ein Kreisförmiges Sonnenbild, das auf der gegen überstehenden Wand, wenn der Strahl diese noch erreichte, oder auf dem Fusboden des Zimmers elliptisch ausfallen würde. 45 F.

Man fange den Strahl B*xyb* mit dem gläsernen, oder sonst aus einer durchsichtigen Masse verfertigten Prisma RES auf, und zwar in der Lage, welche erfordert wird, damit das Bild, welches der gebrochene Strahl DC*cd* auf die gegenüberstehende Wand wirft, die niedrigste Stelle einnehme. **Wofern nun alles Licht, woraus der Strahl** *Bxyb* **zusammen gesetzt ist, nach einerley Gesetz gebrochen wird, so muß das Bild der Sonne auf der Wand, kreisförmig oder elliptisch erscheinen, nachdem der Strahl DC*cd* senkrecht, oder schief auffält.**

137. §.

Wenn man diesen Versuch anstellet, so fällt derselbe ganz anders aus, als er der angenommenen Voraussetzung gemäß ausfallen müste. **Newton**, der aus diesem und mehren andern hieher gehörihörigen Versuchen zuerst ganz neue für die optischen Wissenschaften sehr wichtige Entdeckungen hergeleitet hat, beschreibt den Erfolg so.

In einem verfinsterten Zimmer stellte ich an ein rundes Loch, das etwa $\frac{1}{3}$ Zoll breit war, und sich im Fensterladen befand, ein gläsern Prisma, wodurch ein Sonnenstrahl, der durch das Loch hinein kam, aufwärts nach der gegen überstehenden Wand des Zimmers gebrochen wurde. Die Seitenlinien des Prisma waren in diesem und andern ähnlichen Versuchen auf der Verticalfläche durch den Sonnenstrahl senkrecht, und um die mit den Seitenlinien parallele Axe drehete ich das Prisma langsam, und sahe das gebrochene Licht oder das Sonnenbild an der Wand erst niederwärts gehen, dann wieder steigen. Zwischen dem niederwärts gehen und aufsteigen, wo das Bild eine Zeitlang stille zu stehen schiene, hielt ich das Prisma stille, und befestigte es in dieser Lage. Alsdenn ließ ich das gebrochene Licht senkrecht auf ein Bladt weisses Papier fallen, und bemerkte folgende Gestalt und Abmessungen des Bildes. Es war lang und nicht eyförmig, sondern mit zwoen gradlinichten parallelen Seiten von oben nach unten begränzt, am obern und untern Ende aber von zweenen Halbkreisen. An den graden Seiten war es sehr deutlich abgeschnitten, aber an den kreisförmigen Enden sehr verwirrt und undeutlich, das Licht nahm daselbst nach und nach ab, und verlohr sich unmerklich. In der Entfernung $18\frac{1}{2}$ Fuß vom Prisma war die Breite des Bildes etwa $2\frac{1}{8}$ Zoll, die Länge aber $10\frac{1}{4}$ Zoll, die Länge seiner graden Seiten etwa 8 Zoll, der brechende Winkel des Prisma ma 64 Grad. Ein kleinerer Winkel gab ein kürzeres Bild, die Breite aber blieb unverändert. Ferner bemerkte ich, daß die Strahlen in graden Linien vom Prisma nach dem Bilde giengen, und also beym Ausfahren aus dem Prisma die Neigung gegen einander schon hatten, auf welche die Länge des Bildes ankam. Das Bild war gefärbt, und die kenntlichsten Farben lagen in dieser Ordnung von unten nach oben: **Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violet**, mit allen ihren dazwischen fallenden Schattirungen in einer beständigen Folge.

Daß dergleichen Farben erscheinen, wenn das Licht der Sonne durch ein Prisma, oder auch sonst durch ein eckigtes Stück Glas fällt, ist zwar ein Erfolg, der lange vor **Newton** war beobachtet, und dessen Erklärung von mehrern seiner Vorgänger war versucht worden: allein vor Newton hatte niemand bey dem schon erzählten und den übrigen hieher gehörigen Versuchen, wovon bald mehrere werden angeführt werden, so viel Aufmerksamkeit und Scharfsinn angewandt, als dieser grosse Mathematiker, der, wie bey seinen übrigen Entdeckungen, also auch bey den optischen, von der Mathematik den vortreflichsten Gebrauch zu machen wuste. Sein von der Optick geschriebenes Werk ist zum erstenmahl unter dem Titel: Opticks or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light, zu London im Jahr 1704 durch den Druck bekannt gemacht, auch im Jahr 1706 vom Herrn Samuel Clarke eine lateinische Uebersetzung davon mit Bewilligung des Verfassers herausgegeben worden. Im Jahr 1717

ward

ward vom englischen Original, und 1719 von der lateinischen Uebersetzung eine zweyte Auflage veranstaltet: auch hat man eine französische Uebersetzung nach der zweyten englischen Ausgabe durch H. Coste, Amsterdam 1720. Ausser dieser französischen Uebersetzung führt Montucla (Histoire des Mathem. T. II. pag. 314.) eine andre Pariser vom Jahr 1722 an. Einen Auszug aus den Nachrichten, welche Newton selbst von seinen Versuchen gegeben hat, findet man in dem vom Herrn Kaestner übersetzten und zugleich in den analytischen Vortrag umgeänderten Lehrbegrif der Optick des Herrn Roberth Schmith 1. Buch 6 Cap. 61 u. f. S. Auch vergleiche man hiemit Priestleys Geschichte und gegenwärtigen Zustand der Optick vom Herrn Klügel übersetzt, die 5te Periode 183 u. f. S.

Der XI. Abschnitt.

Die verschiedene Brechbarkeit des ungleichartigen und verschiedene Farben zu wege bringenden Lichts.

138. §.

Der Erfolg bey dem im vor. §. beschriebenen Versuch läßt sich am besten erklären, wenn man mit Herrn Newton annimmt: das Sonnenlicht

licht bestehe aus einer Vermischung verschiedener in Absicht auf die Brechbarkeit ungleichartiger Strahlen, von denen bey einerley Neigungswinkel einige mehr als andre gebrochen werden, die also brechbarer heissen können. Das Licht, dessen Strahlen alle gleichviel gebrochen werden, heist **einfaches, gleichartiges Licht**, dasjenige aber, was aus Strahlen bestehet, davon einige mehr, andre weniger gebrochen werden, **zusammengesetztes, ungleichartiges Licht**. Man behauptet eben nicht, wenn man diese Eintheilung macht, daß das so genannte einfache Licht in aller Absicht vollkommen einförmig und gleichartig sey; jedoch sind die Strahlen, welche gleich viel gebrochen werden, in allen den Umständen, die in den optischen Wissenschaften betrachtet werden, einander ähnlich.

Die Farben des einfachen Lichts heissen **Grundfarben, einfache, gleichartige Farben**, die übrigen aber **ungleichartige und zusammengesetzte**. Das einfache Licht, welches roth aussiehet, oder vielmehr, welches verursacht, daß uns die Sachen, welche es erleuchtet, die rothe Farbe zu haben scheinen, heist **rothes Licht**, und in eben der Bedeutung braucht man die Ausdrücke: **gelbes Licht, grünes Licht, blaues Licht, violettes Licht**, u. s. f. nicht eben, als wenn man voraussetzte, die Strahlen selbst hätten diese Farben, sondern weil sie den Sachen, welche sie erleuchten, diese Farben zu geben scheinen. M. s. Traité d' Optique sur les reflexions etc. par M. le Chev. Newton, trad. de l' Anglois par M. Coste Tom. I. Liv. I. Part. II. Definit. I. pag. 161.

139. §.

46 F. Es sey nun ABb ein Lichtstrahl, der aus zwoen verschiedentlich brechbaren Lichtarten bestehet, so werden beyde Lichtarten sowohl beym hinein dringen in das Prisma RES, als auch nochmehr, wenn sie aus dem Prisma wieder in die Luft fahren, durch die Brechung von einander getrennt werden. Das weniger brechbare Licht wird im Prisma den Weg BC*cb*, ausser demselben den Weg CD*dc* nehmen: was aber stärker brechbar ist, nimmt nach der ersten Brechung den Weg B*bf*F, nach der zweyten den Weg F*fg*G. Fängt man nun die beyden ausfahrenden Strahlenkegel mit einer weissen Ebene XY senkrecht auf, so muß sich jeder derselben in einen Kreis D*d*, G*g*, projiciren, und es wird auf die Grösse der Winkel CBF, *cbf*, als die Differenz der gebrochenen Winkel, ankommen, wie weit XY vom Prisma entfernt seyn muß, damit die beyden Kreise D*d*, G*g*, einander nicht mehr schneiden, sondern völlig von einander gesondert erscheinen. Ist XY würklich soweit entfernt, so wird jeder von beyden Kreisen seine eigene Grundfarbe haben; schneiden aber beyde Kreise einander noch, so wird die Farbe des Bildes in der Stelle, die zu beyden Kreisen gehört gemischt und von jeder, der beyden Grundfarben verschieden seyn.

140. §.

Nimmt man an, das Sonnenlicht bestehe aus siebenerley Arten von einfachen oder gleichartigen Licht, wovon jedes seine eigene von den übrigen verschiedene Brechbarkeit und Grundfarbe hat; so

ist

ist begreiflich, wie das lange prismatische Sonnenbild KL entstehen kann. Man nehme bis auf weitere Prüfung an, es bestehe dies Sonnenbild aus sieben Kreisen, deren Mittelpuncte in grader Linie liegen: jeder diese Kreise habe seine eigene Grundfarbe, und zwar, von unten nach oben, die rothe, orange, gelbe, grüne, blaue, indigo, und violette Farbe. Wenn nun jeder dieser Kreise den folgenden schneidet, so könnten wohl daher in den Stellen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, wo die Kreise einander schneiden, die vermischten Farben und Schattirungen entstehen, nur vornemlich zunächst bey den Mittelpuncten würden die Grundfarben erscheinen. 47 F.

Daß man Grund hat, diese sieben Arten des Sonnenlichts als einfache Arten zu betrachten, wird aus folgendem Versuch erhellen. **Newton** machte im Mittel eines schwarzen Papiers ein rundes Loch, etwa $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$ Zoll im Durchmesser, darauf ließ er das prismatische Sonnenbild fallen, und zwar so, daß etwas von dem gefärbten Licht durch das Loch durchgieng. Diesen durchgelassenen Theil des Lichts brach er mit einem Prisma, und ließ das gebrochene Licht senkrecht auf ein weisses Papier fallen; nun war die Erscheinung, welche das von neuen gebrochene Licht auf dem Papier darstellete, nicht länglicht, wie beym Versuch, so wie er im 137. §. beschrieben worden, sondern rund, auch ward die Farbe dieses Lichts durch die neue Brechung nicht weiter geändert.

Mit etwas veränderter Einrichtung ward der Versuch auch so angestellet. Gleich hinter das Prisma, welches das noch ungebrochene Sonnenlicht auffieng, stellte **Newton** ein Bret mit einem

nem Loch, etwa $\frac{1}{3}$ Zoll weit, dadurch nur ein Theil des vermittelst des Prisma gebrochenen schon gefärbten Lichts durchgieng. Etwa 12 Fuß hinter diesem Brett befand sich ein andres ebenfals durchlöchertes, das von den Strahlen, welche das erste Brett durchliesse, wiederum den mittlern Theil durchgehen ließ. Hinter diesem zweyten Brett befand sich wieder ein Prisma, das die durchgelassenen Strahlen von neuen brach. Nun drehete Newton das erste Prisma nach und nach um seine Axe, damit eine Farbe nach der andern durch die Löcher der Bretter durchgieng und auf das zweyte Prisma fiel. Er bemerkte an welchen Ort der Wand jede Farbe von diesem zweyten Prisma geworfen wurde, und fand, daß das Licht, welches im ersten Prisma am meisten gebrochen wurde, wie das blaue und violette, auch im zweyten am meisten aus seinem Wege gebracht wurde, das rothe aber in beyden die geringste Veränderung erlitte. Das blaue Licht fiel auf eine höher liegende Stelle der gegen über stehenden Wand, als das grüne, dies wiederum an einer höhern Stelle, als das gelbe, u. s. f. Das zweyte Prisma behielte seine Stellung unverändert, und die Löcher in beyden Brettern auch, mithin fiel jede Art Strahlen auf das zweyte Prisma in einerley Neigung, und doch ward das blaue Licht stärker, als das grüne, dieses stärker als das gelbe gebrochen, und so ferner nach der Ordnung weiter. Uebrigens ward die Farbe nie durch die zweyte Brechung verändert, ja auch eben so wenig durch die Zurückwerfung. Alle Sachen, was sie für Farben haben mogten, als Papier, Asche, Auripigment, Indig,

Gold,

Gold, Silber, Kupfer, Graß, blaue Blumen, Veilchen, farbichte Wasserblasen, Pfauenfedern, Tinctur vom ligno rephritico, u. s. w. sahen im einfachen rothen Licht gänzlich roth, im blauen blau aus, u. s. f. Alle hatten im einfachen Licht von einerley Art einerley Farbe, nur warfen einige dieses Licht stärker, andre schwächer zurück.

141. §.

Alle diese Versuche leiten natürlich auf die Schlußfolge, daß nur eine Farbe in der Welt seyn würde, wenn das Sonnenlicht nur aus einerley Art Strahlen bestünde, und daß die Verschiedenheit der Farben, welche die körperlichen Dinge in der Natur unsern Augen darstellen, daher rührt, weil jeder Körper, der seine eigene Farbe hat, nur diejenige Art des darauf fallenden Lichts, welches von eben der Farbe ist, vornemlich zurück wirft; das übrige Licht dringt zum Theil in die Masse des Körpers hinein, oder wird sonst zerstreuet. So schickt Zinnober vornemlich das rothe Licht, Gras und Laub von Bäumen das grüne Licht vornemlich zurück. Und wenn ein Körper mehr als eine Art des Lichts zurück wirft, so entstehen die vermischten oder zusammengesetzten Farben nach dem verschiedenen Verhältnisse der Menge des von jeder einfachen Art zurückgeworfenen Lichts. Die weisse Farbe ist eine Vermischung aller Grundfarben in gehörigem Verhältniß, weil das aus allen einfachen Arten vermischte Sonnenlicht die weisse Farbe hat. Im folgenden werden über alle diese Schlüsse aus den Versuchen mit dem Prisma noch umständlichere Betrachtungen vorkommen: hier ist nur noch zu bemerken, daß man Grund habe anzunehmen, jede einfache Art der Lichtstrahlen werde nach einer gewissen beständigen Regel gebrochen, oder für jeden Farbenstrahl gehöre, ein bestimmtes beständiges **Verhältniß des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels.**

142. §.

47 F. Die im 107. §. vorläufig angenommene Vorstellung: es bestehe das prismatische Sonnenbild KL aus sieben Kreisen, davon jeder seine eigene Grundfarbe habe, und das Sonnenlicht selbst aus siebenerley Arten einfachen oder gleichartigen Lichts, dienete nur, die ersten Begriffe von dieser Zerstreuung des Lichts bey jeder Brechung festzusetzen, und den Erfolg selbst einigermassen begreiflich zu machen. Sonst ist die Meinung nicht, daß alle Strahlen die hier als gleichartig betrachtet werden, völlig gleichartig, völlig gleich stark brechbar, und von völlig einerley Farbe seyn: die Meinung ist also auch nicht, als wenn das prismatische Sonnenbild nur aus sieben, nicht mehrern, Kreisen bestehe, davon jeder seine eigene Farbe hat: vielmehr muß man sich von K bis L unzählig viele nach einander folgende Kreise für unzählig viele nach einander folgende Farben vorstellen, wovon jede folgende von der vorhergehenden durch unmerkliche Stuffen sich unterscheidet. Oberhalb und unterhalb α muß man sich noch Mittelpuncte von Kreisen vorstellen, die alle roth sind, nach β zu verliehrt sich die Röthe in die Orangefarbe, von β nach γ ins gelbe, und immer so weiter. Eben daher

daher rührt es, daß die kreisförmigen Enden des Bildes bey K und L verwirrt und undeutlich erscheinen, auch das Licht daselbst sich unmerklich verliert. Wäre unten nur ein rother, und oben nur ein violetter Kreis, so müsten die Halbkreise, welche das Bild begränzen, eben so scharf abgeschnitten seyn, wie die graden Seitenlinien desselben: ja eben dies erklärt es, warum die Gränzen zu beyden Seiten grade, und scharf abgeschnitten erscheinen. Eigentlich also giebt es unzählig viele rothe, gelbe, grüne, Strahlen u. s. f. und selbst das rothe Licht bestehet aus ungleichartigem rothen, das blaue aus ungleichartigen blauen Licht, u. s. f. alle diese Arten gränzen durch unmerkliche Stuffen aneinander. Weil indessen die schon oft genannten sieben Farben hauptsächlich für unsre Empfindung unterschieden sind; so kann man ganz wohl bey der gewöhnlichen Vorstellung bleiben, das Licht bestehe aus siebenerley Arten von Farben-Strahlen. Ungleichartige rothe Strahlen sind nur in den Graden der Röthe unterschieden, und eben die Bewandniß hat es mit dem übrigen Licht, das hier als gleichartig betrachtet, und dem eine eigene Grundfarbe zugeschrieben wird.

143. §.

Aus diesem allen folgt nun, wenn man nach Anleitung des 130, 131, und 132. §, das Verhältniß der Refraction für eine durchsichtige Masse suchen will, daß dies Verhältniß nicht für alles auffallende Licht ohne Unterscheid einerley sey. Es ist für die violetfarbene Strahlen am grösten, und für die rothen Strahlen am kleinsten, wenn das

Licht, aus der Luft in eine dichtere durchsichtige Masse fällt. Es sey für die Strahlen, deren Brechbarkeit am grösten ist, das Verhältniß der Refraction $= M : 1$, und für diejenigen, deren Brechbarkeit am kleinsten ist, das Verhältniß der Refraction $= N : 1$; so kann man diejenigen, für welche das Verhältniß der Refraction $= \frac{1}{2}(M+N) : 1$ ist, als **Strahlen von mittlerer Brechbarkeit** betrachten. Setzt man nun $\frac{1}{2}(M+N) = m$, und $\frac{1}{2}(M-N) = \mu$, so ist $M = m + \mu$, und $N = m - \mu$; alsdenn hat man für das Licht von mittlerer Brechbarkeit das Verhältniß der Refraction $= m : 1$, für das Licht von der grösten und kleinsten Brechbarkeit aber die Verhältnisse $m + \mu : 1$, und $m - \mu : 1$.

144. §.

48 F. 1) Es sey nun RES das Prisma in der Lage, welche erfordert wird, damit nach der ersten Brechung des auffallenden Lichts AB, die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit, mit RS parallel laufen, wie BC, nach der zweyten Brechung aber in die Lage CD kommen. Man setze, wie bisher die Winkel $PBA = \alpha$, $RES = \varepsilon$, $qCD = \delta$, so ist der Voraussetzung gemäß $\alpha = \delta$, und $CBQ = BCp = qCH = \frac{1}{2}\varepsilon$. Das Verhältniß der mittlern Refraction sey $= m : 1$, so ist $\sin\alpha = m \sin \frac{1}{2}\varepsilon$. Ferner sey BF ein Strahl desjenigen Lichts, welches am wenigsten brechbar ist, das Verhältniß der kleinsten Refraction $= m - \mu : 1$, und $CBF = \varphi$, so ist auch $\sin\alpha = (m - \mu) \sin (\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi)$. Das giebt $m \sin \frac{1}{2}\varepsilon = (m - \mu) \sin (\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi)$. Woferne man nun voraussetzen kann, daß φ ein sehr

sehr kleiner Winkel sey, so ist beynahe $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi) = \sin\frac{1}{2}\varepsilon + \cos\frac{1}{2}\varepsilon \sin\varphi$, wo auch beynahe $\sin\varphi = \varphi$ genommen werden kann. Weil nun bey eben der Voraussetzung μ in Vergleichung mit m nur eine kleine Zahl ist, so hat man beynahe $(m-\mu) \sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi) = m \sin\frac{1}{2}\varepsilon + m \,.\, \varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varepsilon - \mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$, und man findet $m \,.\, \varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varepsilon = \mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$.

2) Weiter hat man $BFE = BCE + \varphi$, also $90° - BFE = 90° - BCE - \varphi$, oder $\pi FB = pCB - \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon - \varphi$. Es sey $\lambda FG = \delta'$, so ist $\sin\delta' = (m-\mu)\sin(\frac{1}{2}\varepsilon - \varphi)$, und man findet wie vorhin $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon = \varphi)$ beynahe $= \sin\frac{1}{2}\varepsilon - \varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varepsilon$, also $\sin\delta' = m \sin\frac{1}{2}\varepsilon - m \,.\, \varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varepsilon - \mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$; und wenn der Werth $m\varphi \cos\frac{1}{2}\varepsilon = \mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$ gesetzt wird, so hat man $\sin\delta' = m \sin\frac{1}{2}\varepsilon - 2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$, oder $\sin\delta' = \sin\alpha - 2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sin\delta - 2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$. Wenn nun CD und FG einander in a schneiden, so ist $EFa = ECa + CaF$, oder $GFS = DCS + CaF$, und $90° - GFS = 90° - DCS - CaF$, d. i. $\delta' = \delta - CaF$, oder $CaF = \delta - \delta'$. Es sey $CaF = \psi$, so ist ψ nur klein, und man hat $\delta' = \delta - \psi$, also $\sin\delta' = \sin\delta - \psi \cos\delta$. Dieser Werth dem vorhin gefundenen $\sin\delta' = \sin\delta - 2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$ gleich gesetzt giebt $\psi \cos\delta = 2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon$,

also $\psi = \dfrac{2\mu \sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$.

3) Die Strahlen, welche am meisten brechbar sind, werden auf der andern Seite von CD ebenfals um einen Winkel $= \psi$ abweichen: mithin ist der Winkel, unter welchen die am meisten brechbaren Strahlen die am wenigsten brechbaren schnei-

 den,

den, $= 2\psi = \frac{4\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$. Weil oben das Verhältniß der mittlern Refraction, wenn das Licht aus der Luft in das Prisma fällt $= m : 1$ angenommen ist, so folgt, wenn alles Licht im Prisma unter dem Winkel $\frac{1}{2}\varepsilon$ auf die brechende Fläche fiele, und aus dem Prisma in die Luft gienge, daß der Sinus des gebrochenen Winkels für das Licht von mittlerer Brechbarkeit $= m \sin \frac{1}{2}\varepsilon$ wäre, also $= \sin\alpha = \sin\delta$. Für das Licht, das die gröste oder kleinste Brechbarkeit hat, sey der gebrochene Winkel $= \delta \pm \varrho$, so hat man, weil ϱ in Vergleichung mit δ nur klein ist, $\sin\delta \pm \varrho \cos\delta = \sin(\delta \pm \varrho)$, und eben dieses Winkels Sinus ist $= (m \pm \mu) \sin \frac{1}{2}\varepsilon = \sin\delta \pm \mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, folglich erhält man $\varrho \cos\delta = \mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\varrho = \frac{\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$. Wird also

$$2\psi = \frac{4\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta} = \omega$$ angenommen, so hat man $\varrho = \frac{1}{4}\omega$.

4) Wäre die Sonne ein Punct, der gar keine scheinbare Grösse hätte, so würden sich die Kreise, welche das gefärbte Bild KL (142. §.) ausmachen, in kleinere Kreise verwandeln, und der Durchmesser eines jeden würde dem Durchmesser der Oefnung im Fensterladen gleich seyn; eben so groß wäre denn auch die Breite des Bildes. (75. §. Opt.) Würde alsdenn die Breite des Bildes von seiner Länge abgezogen, so hätte man den Abstand $\alpha\eta$ der Mittelpuncte der beyden äussersten Kreise. Eben das würde der Erfolg seyn, wenn man alles übrige Licht absondern, und nur dasjenige durch die Oefnung

nung lassen könnte, was vom Mittelpunct der Sonne kommt. Alle durch die Oefnung fallende Strahlen würden alsdenn parallel seyn, und unter einerley Winkel α auf das Prisma fallen. Zugleich wäre nun $\alpha\eta$ die Sehne desjenigen Winkels, unter welchem die am meisten gebrochenen Strahlen die am wenigsten gebrochenen schneiden, der im vor. §. ω hies. Weil nun die Breite des Bildes auch alsdenn dem Durchmesser eines jeden der gefärbten Kreise gleich bleibt, woraus das Bild bestehet, wenn die Strahlen von der ganzen Sonnenscheibe durchfallen; so findet man in allen Fällen $\alpha\eta$, wenn von der ganzen Länge des gefärbten Bildes die Breite abgezogen wird. Es sey also die Länge des Bildes $= L$, die Breite $= l$, der senkrechte Abstand desselben vom Prisma $= D$, so ist $\tang \psi = \tang \frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}(L-l)}{D}$. (Man nimmt hiebey an, daß Fa und Ca in Vergleichung mit der Entfernung D sehr klein sind, weil CF sehr klein ist). Hat man auf diese Art ψ oder $\omega = 2\psi$ gefunden, so giebt sich daher $\varrho = \frac{1}{4}\omega = \frac{1}{2}\psi$, und daraus ferner das Verhältniß der grösten und kleinsten Refraction $= \sin(\delta \pm \varrho) : \sin \frac{1}{2}\varepsilon = m \pm \mu : 1$.

145. §.

Durch diese Schlüsse wird das Verfahren erläutert, dessen sich Herr Newton in seiner Optick (Lib. I. Part. I. Prop. VII. Theor. 6.) bedient, vermittelst des Prisma das Verhältniß der Refraction für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit sowohl, als auch zugleich den Unterschied der Refraction der äussern und mittlern Strahlen zu finden. Er maß die Höhe der Sonne $= \eta$, und zugleich die Neigung ϑ derjenigen Strahlen gegen den Horizont, welche auf die Mitte des Bildes fielen, und fand $\eta + \vartheta = 44° \, 10'$. Der brechende Winkel ε des Prisma war $= 62° \, 30'$, also $\alpha = \delta = \frac{1}{2}(\eta + \vartheta + \varepsilon) = 53° \, 35'$. (98. §.) und $\frac{1}{2}\varepsilon = 31° \, 15'$ Daraus findet man $\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}$ (130. §.) $= \frac{8047211}{5187733} = 1,5512$ beynahe $= \frac{31}{20}$. Dieser Bruch ist nun hier nach der Bezeichnung des 143. §. $= m$.

Weiter war $L = 9\frac{7}{8}$ Zoll, $l = 2\frac{1}{8}$ Zoll, also $L - l = 7\frac{3}{4}$ Zoll, und $D = 18\frac{1}{2}$ Fuß $= 222$ Zoll, mithin $\tang\psi = \tang\frac{1}{2}\omega = \frac{7\frac{3}{4}}{444} = \frac{31}{1776}$ $= 0,017455$, und $\psi = \frac{1}{2}\omega = 1°$. (Newton giebt $1° \, 3\frac{1}{2}''$ an). Demnach ist $\varrho = 30'$, und weil $\frac{1}{2}\varepsilon = 31° \, 15'$, $\delta = 53° \, 35'$ war, so hat man $m + \mu : 1 = \sin 54° \, 5' : \sin 31° \, 15' = 8098710 : 5187733$ und $m - \mu : 1 = \sin 53° \, 5' : \sin 31° \, 15' = 7995100 : 5187733$, also $m + \mu = \frac{8098710}{5187733} = 1,56113$, und $m - \mu = \frac{7995100}{5187733} = 1,54115$. Die letzte Zahl von der ersten abgezogen giebt $2\mu = 0,01998$, also $\mu = 0,00999$. Demnach ist sehr nahe $\mu = \frac{1}{100}$,

und

und man hat beynahe

$$m : 1 = 155 : 100 = 77\tfrac{1}{2} : 50,$$
$$m + \mu : 1 = 156 : 100 = 78 : 50,$$
$$m - \mu : 1 = 154 : 100 = 77 : 50.$$

Das sind die Zahlen, welche Newton a. a. Ort für das Verhältniß der mittlern, der grösten und kleinsten Refraction findet, wenn das Licht, aus der Luft im Glaß fällt.

146. §.

Man nimmt bey dieser Rechnung gewöhnlich an, daß die halbe Summe der Sinus des grösten und kleinsten gebrochenen Winkels vom Sinus der halben Summe beyder Winkel nicht merklich unterschieden sey, und das trift um deswillen beynahe zu, weil der Unterscheid beyder Winkel gewöhnlich nur klein ist, wie er denn beym Glase nur ohngefehr zwey Grad ausmacht. Eigentlich wäre es bey einer scharfen Rechnung nicht einerley, ob man die halbe Summe des grösten und kleinsten gebrochenen Winkels für den mittlern gebrochenen Winkel annimmt, oder denjenigen Winkel, dessen Sinus die halbe Summe der Sinus des grösten und kleinsten gebrochenen Winkels ist. Die Differenzen der Sinus nehmen ab, wenn die Differenzen der Winkel einerley bleiben: wenn also Λ der gröste λ der kleinste gebrochene Winkel ist, und derjenige, soll der mittlere heissen, dem ein Sinus $= \frac{1}{2}(\sin\Lambda + \sin\lambda)$ zugehört, so ist derselbe kleiner als $\frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$. Es ist nemlich vermöge des 451. §. Geom. $\frac{1}{2}(\sin\Lambda + \sin\lambda) = \sin\frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)\cos\frac{1}{2}(\Lambda - \lambda)$, also $\frac{1}{2}(\sin\Lambda + \sin\lambda) < \sin\frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$: mithin auch $\text{Ang}.\sin.\frac{1}{2}(\sin\Lambda + \sin\lambda) < \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$. Gehört zu diesen gebrochenen Winkeln Λ und λ der Einfallswinkel k, so ist das Verhältniß der grösten Refraction $= \frac{\sin \Lambda}{\sin k} : 1$, das Verhältniß der kleinsten $= \frac{\sin \lambda}{\sin k} : 1$, und das Verhältniß der mittlern $= \frac{\frac{1}{2}(\sin \Lambda + \sin \lambda)}{\sin k} : 1$, in dem Verstande des 141. §. Will man das Verhältniß $\frac{\sin \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)}{\sin k} : 1$ dafür annehmen, so ist dasselbe grösser als jenes: wenn indessen $\Lambda - \lambda$ nur klein ist, so ist $\cos \frac{1}{2}(\Lambda - \lambda)$ sehr nahe $= 1$, und beyde Werthe sind beynahe gleich groß.

Was hier Λ, λ, k, sind, waren im vor. §. $\delta + \varrho$, $\delta - \varrho$, und $\frac{1}{2}\varepsilon$: die Rechnung aber, vermöge welcher $m = 1,5512$ gefunden ist, nimmt $m = \frac{\sin \delta}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$ an. Weil nun ferner am Ende des 145. §. $m + \mu = 1,56113$, und $m - \mu = 1,54115$ gefunden ist, so würde die halbe Summe dieser Zahlen $\mu = 1,55114$ geben, welches mit dem vorigen Werth von m in den drey ersten Decimalstellen übereinkommt. Eben dieser Zahl ist vermöge der angestellten Rechnung $=$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sin(\delta + \varrho) + \sin(\delta - \varrho))}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{\sin \delta \cos \varrho}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon},$$

und hier ist $\varrho = 30'$, also $\cos \varrho = 0,99996$, und man findet $1,5512 \times 0,9996 = 1,55114$, so daß beyde Rechnungen nun bis auf die fünfte Decimalstelle übereinstimmen.

147. §.

Wenn m schon gefunden, und der Winkel ψ oder $\omega = 2\psi$ bekannt ist, so läßt sich auch μ vermittelst der Gleichung $\psi = \frac{2\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \delta}$ (144. §. n. 2.) finden. Diese giebt nemlich $\mu = \frac{\frac{1}{2}\psi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$. Im Exempel des 145 §. war ψ ein Bogen von einem Grad, also ist hier $\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{360} \cdot \pi$, wenn π den halben Umfang eines Kreises für den Halbmesser $= 1$ bedeutet. Weiter war $\delta = 53° \; 35'$, und $\frac{1}{2}\varepsilon = 31° \; 15'$: man kann also auch μ ganz vortheilhaft vermittelst der Logarithmen finden. Hier giebt die Rechnung folgendes:

$l\pi = 0,4971498$	$l.360 = 2,5563025$
$l\cos\delta = 9,7735327 - 10$	$l\sin\frac{1}{2}\varepsilon = 9,7149776 - 10$
$l\pi.\cos\delta = 0,2706825$	$l.360\sin\frac{1}{2}\varepsilon = 2,2712801$

$$2,2712801$$

$$l\mu = 0,9994024 - 3, \text{ also } \mu = 0,00998$$

oder sehr nahe $\mu = \frac{1}{100}$, wie im 145. §.

148. §.

Setzt man ein hohles Prisma aus dreyen ebenen Glaßtafeln zusammen mit der Einrichtung, daß man es mit Wasser füllen, hiernächst aber verschliessen kann; so dient dasselbe auf eben die Art, wie bisher ist gewiesen worden, das Verhält-

hältniß der Refraction für Luft und Wasser zu finden. Es hat nemlich alsdenn der ausfahrende Strahl gegen den einfallenden eben die Lage, die er hätte, wenn auch das Wasser zwischen den Glastafeln nicht eingeschlossen wäre. Es sey *res*
49 F. das Wasser-Prisma, RE, *re*, imgleichen *es*, ES, die parallelen Seitenflächen der Glaßtafeln, und der einfallende Strahl nehme den Weg AB*bc*CD; so hat der zum zweyten mahl gebrochene Strahl *bc* im Wasser eben die Lage, die er hätte, wenn der Strahl in der Lage *ab* mit AB parallel unmittelbar in *b* auf das Wasser-Prisma fiele. Auch hat der wieder in die Luft gehende zum vierten mahl gebrochene Strahl CD eben die Lage, die der Strahl *cd* hätte, wenn *bc* bey *c* aus dem Wasser unmittelbar in die Luft gienge. (126. §.) Mithin hat CD gegen AB eben die Lage die *cd* gegen *ab* hätte. Geht man also mit einem solchen Prisma eben so um, wie im vorhergehenden gewiesen ist, um vermittelst des maßiv gläsernen Prisma das Verhältniß der Refraction für Luft und Glaß zu finden; so kann auf eben die Art das Verhältniß der Refraction für Luft und Wasser gefunden werden. Umständlichere Lehren von der Strahlenbrechung im Glase und andern durchsichtigen Massen, besonders auch in Ansehung der verschiedenen Brechbarkeit des ungleichartigen Lichts werden in der Dioptrick vorkommen.

Der

Der XII. Abschnitt.

Die Brechung des gleichartigen Lichts in einer Kugelfläche.

149. §.

Der Punct P wirft einen Lichtstrahl PM auf die brechende Kugelfläche $KMANL$ und das Verhältniß der Refraction $\mu : 1$ ist gegeben. Durch P und den Mittelpunct C der Kugelfläche ist PA als eine Axe der Kugelfläche gezogen, und die Lage des einfallenden Strahls PM gegen die Axe AP ist gegeben: man soll die Lage des gebrochenen Strahls MW finden. 50 F.

Aufl. Die Ebene APM stelle einen Schnitt der Kugel durch die Axe AP vor, also KMANL einen grösten Kreisbogen in dieser Ebene; so ist sie zugleich die Brechungs-Ebene, worin der gebrochene Strahl MW liegt, und der Halbmesser CM nach R verlängert ist das Neigungsloth. Man nehme an, der gebrochene Strahl MW schneide gehörig verlängert, die Axe AP in Π, so ist die Lage des gebrochenen Strahls gefunden, wenn die Stelle des Puncts Π durch $C\Pi$ oder $A\Pi$ gefunden ist. Nun sey der Neigungswinkel $CMV = RMP = \alpha$, und der gebrochene Winkel $CMW = \beta$, mithin $\sin\alpha = \mu \sin\beta$. Ferner sey $ACM = \gamma$, $APM = \varphi$,

$= \varphi$, $A\Pi M = \psi$, $CA = CM = r$; so ist $\frac{CP}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\varphi}$, und $\frac{C\Pi}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\psi}$, mithin $\frac{CP \sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{C\Pi \sin\psi}{\sin\beta}$. Daraus folgt $\frac{\sin\alpha \,.\, C\Pi}{\sin\beta} = \frac{CP \sin\varphi}{\sin\psi}$, oder $\frac{\mu \,.\, C\Pi}{CP} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$. Weiter ist $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\Pi M}{PM}$, also auch $\frac{\mu \,.\, PM}{CP} \,.\, C\Pi = \Pi M$, und $\frac{\mu^2 \,.\, PM^2}{CP^2} \,.\, C\Pi^2 = \Pi M^2$. Im Dreyeck CPM hat man $PM^2 = CP^2 - 2r \,.\, CP \cos\gamma + r^2$, also $\frac{PM^2}{CP^2} = 1 - \frac{2r \,.\, \cos\gamma}{CP} + \frac{r^2}{CP^2}$, und diese Zahl sey $= \lambda^2$, ferner im Dreyeck $C\Pi M$ ist $\Pi M^2 = C\Pi^2 + 2r \,.\, C\Pi \,.\, \cos\gamma + r^2$, also erhält man die Gleichung $\mu^2 \lambda^2 C\Pi^2 = C\Pi^2 + 2r \,.\, C\Pi \,.\, \cos\gamma + r^2$, woraus $C\Pi$ gefunden werden kann. Man erhält nemlich $(\mu^2 \lambda^2 - 1)\, C\Pi^2 - 2r \,.\, \cos\gamma \,.\, C\Pi = r^2$, also auch $C\Pi^2 - \frac{2r \cos\gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1} \,.\, C\Pi = \frac{r^2}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$, und das giebt $C\Pi =$

$$\frac{r \cos\gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1} \pm \sqrt{\frac{r^2 \cos\gamma^2 + r^2 (\mu^2 \lambda^2 - 1)}{(\mu^2 \lambda^2 - 1)^2}}$$

oder $C\Pi = \frac{r\left(\cos\gamma \pm \sqrt{\cos\gamma^2 + (\mu^2 \lambda^2 - 1)}\right)}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$,

oder

oder auch $C\Pi = \dfrac{r\,(\cos\gamma \pm \sqrt{(\mu^2\,\lambda^2 - \sin\gamma^2)})}{\mu^2\,\lambda^2 - 1}$.

Die Ursache, weswegen auf solche Art zwey verschiedene Werthe für $C\Pi$ gefunden werden, ist darin zu suchen, weil die Auflösung eigentlich folgende Frage beantwortet: In welchem Punct wird AP von MW geschnitten werden, wenn man MW in eine solche Lage bringt, daß $\sin CMW = \dfrac{1}{\mu}$. $\sin CMV$ wird? zum gegebenen Sinus $= \dfrac{1}{\mu}$ $\sin CMV$ aber gehören zwey verschiedene Winkel, nemlich CMW und $CMw = 180° - CMW$: demnach muß die vollständige Auflösung der Aufgabe zwey verschiedene Durchschnittspuncte Π und Π', also auch zwey verschiedene Entfernungen $C\Pi$ und $C\Pi'$ des gesuchten Durchschnittspuncts von C geben.

Hier wird nur derjenige von beyden Winkeln gebraucht, der kleiner als 90° ist, mithin auch nur derjenige Werth $C\Pi$, welcher dem Winkel CMW zugehört, der kleiner als 90° ist. Um von beyden gefundenen Werthen denjenigen gehörig zu unterscheiden, welcher dem Winkel CMW zugehört, und hier allein gebraucht wird, ist folgendes zu bemerken. Die 50 Fig. stellt den Fall vor, wenn $\mu < 1$ ist, und das Licht aus einer dünnern durchsichtigen Masse in eine Dichtere, wie aus Luft in Glaß oder Wasser, hinüber geht. So lange nun $\mu^2\,\lambda^2 > 1$, mithin $\lambda^2 > \dfrac{1}{\mu^2}$ ist, so lange ist

der

der Nenner des Bruchs
$\frac{\cos\gamma \pm \sqrt{(\cos\gamma^2 + \mu^2 \lambda^2 - 1)}}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$, positiv, und
der eine Werth des Zählers ist negativ: daraus ergiebt sich, daß die gesuchte Linie einen positiven, und einen negativen Werth habe, so lange $\lambda^2 > \frac{1}{\mu^2}$ ist. Man setze AP $= \delta$, also CP $= \delta + r$,

so ist $\lambda^2 = 1 - \frac{2r \cos\gamma}{\delta + r} + \frac{r^2}{(\delta + r)^2} = 1 - \frac{2r}{\delta + r} + \frac{r^2}{(\delta + r)^2} + \frac{2r\,(1 - \cos\gamma)}{\delta + r}$, oder $\lambda^2 = \left(1 - \frac{r}{\delta + r}\right)^2 + \frac{2r\ \text{sinv}\,.\,\gamma}{\delta + r}$, oder auch

$\lambda^2 = \frac{\delta^2}{(\delta + r)^2} + \frac{2r\ \text{sinv}\,.\,\gamma}{\delta + r}$. Für einerley Winkel γ nähert sich diese Zahl der Einheit desto mehr, je grösser δ angenommen wird, und sie wird $= 1$, wenn δ unendlich groß wird. Demnach läßt sich allemahl δ so groß annehmen, daß $\lambda^2 > \frac{1}{\mu^2}$ wird, wenn wie hier vorausgesetzt ward, $\mu > 1$ ist; alsdenn aber hat CΠ einen positiven und einen negativen Werth, wie es die Figur vorstellt, und der positive ist derjenige, welcher hier nur gebraucht wird. Ich nehme also hinführo

C$\Pi = \frac{\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2)}}{\mu^2 \lambda^2 - 1}\,.\,r$ an.

Man setze nun die unbestimmte Linie C$\Pi = z$, so ist

ist $z = \frac{\cos\gamma + \sqrt{(\cos\gamma^2 + \mu^2\lambda^2 - 1)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} . r$, $=$ $\frac{\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} . r$, und dieser Ausdruck nähert sich dem Werth $\frac{1 + \mu\lambda}{\mu^2\lambda^2 - 1} . r =$ $\frac{r}{\mu\lambda - 1}$, wenn γ sehr klein wird: für $\gamma = 0$, wäre $z = \frac{r}{\mu\lambda - 1}$, und $\lambda = \frac{\delta}{\delta + r}$. Man setze also $\frac{\delta}{\delta + r} = \zeta$ und nehme $C\pi = \frac{r}{\mu\zeta - 1}$ an, so ist $C\pi = \frac{r(\delta + r)}{\mu\delta - \delta - r}$, oder $C\pi =$ $\frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r}$. So lange nun γ sehr klein bleibt, so lange bleibt der für z gefundene allgemeine Ausdruck noch sehr nahe $= \frac{r}{\mu\zeta - 1} = \frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r}$, diesemnach werden alle Strahlen, die wie Pm, $P\mu$, sehr nahe bey der Axe auffallen, in der Kugelfläche so gebrochen, daß sie nach der Brechung auch sehr nahe wieder in einerley Punct π zusammen laufen. Dieser Punct π ist ein Bild von P, weil ein Auge in O die aus P kommenden Strahlen so empfängt, als kämen sie von π her.

Die allgemeine Formul läßt sich so ausdrücken

$$\frac{z}{r} = \frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1} + \frac{\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} - \sin v . \gamma}{\mu^2\lambda^2 - 1},$$

 und

und weil $\frac{\delta}{\delta + r} = \zeta$ gesetzt, ist, so hat man $\lambda^2 = \zeta^2 + \frac{2r \sin v . \gamma}{\delta + r}$. Setzt man noch $\frac{r}{\delta + r} = \varepsilon$, so ist $\varepsilon + \zeta = 1$, und $\lambda^2 = \zeta^2 + 2\varepsilon . \sin v . \gamma$. Das giebt $\mu^2 \lambda^2 - 1 = \mu^2 \zeta^2 - 1 + 2\mu^2 \varepsilon . \sin v . \gamma$, oder $\mu^2 \lambda^2 - 1 = (\mu\zeta - 1)\left(\mu\zeta + 1 + \frac{2\mu^2 \varepsilon . \sin v . \gamma}{\mu\zeta - 1}\right)$. Ferner sey $\mu\zeta + \frac{2\mu^2 \varepsilon . \sin v . \gamma}{\mu\zeta - 1}$ M, so erhält man $\mu^2 \lambda^2 - 1 = (\mu\zeta - 1)(1 + M)$, und $\frac{z}{r} = \frac{1}{(\mu\zeta - 1)(1 + M)} + \frac{\sqrt{(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2)} - \sin v . \gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$: überdem ist $\frac{1}{1 + M} = 1 - \frac{M}{M + 1}$, also $\frac{z}{r} = \frac{1}{\mu\zeta - 1} + \frac{\sqrt{(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2)} - \sin v . \gamma - M}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$ und $z = \frac{r}{\mu\zeta - 1} - \frac{M + \sin v . \gamma - \sqrt{(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2)}}{\mu^2 \lambda^2 - 1} . r$. Wie nun diese Formul den Abstand des Durchschnittspuncts Π vom Mittelpunct C der brechenden Kugelfläche giebt, so hat man zugleich den Abstand des Puncts Π von der Kugelfläche selbst, nemlich $A\Pi = C\Pi + CA = z + r$. Wird also $A\Pi = x$ gesetzt, so findet man $x = \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1}$

$$- \frac{M + \sin v\gamma - \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r.$$

150. §.

So lange der Winkel γ nur klein ist, hat man sehr nahe $\sin\gamma^2 = 2\sin v\gamma$: überdem ist $\mu^2\lambda^2 = \mu^2\zeta^2 + 2\mu^2\varepsilon \sin v\gamma$, also $\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2 = \mu^2\zeta^2 \left(1 + \frac{2(\mu^2\varepsilon - 1)\sin v \cdot \gamma)}{\mu^2\zeta^2}\right)$. So lange ferner $\mu\zeta > 1$ bleibt, so lange ist beynahe $\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} = \mu\zeta\left(1 - \frac{(\mu^2\varepsilon - 1)\sin v\gamma}{\mu^2\zeta^2}\right)$, oder $\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} = \mu\zeta - \frac{\sin v\gamma}{\mu\zeta} + \frac{\mu\varepsilon \sin v\gamma}{\zeta}$: vergleicht man hiemit den Werth $M + \sin v \cdot \gamma = \mu\zeta + \sin v \cdot \gamma + \frac{2\mu^2\varepsilon \sin v \cdot \gamma}{\mu\zeta - 1}$, so erhellet, daß bey den angenommenen Voraussetzungen der letzte Werth grösser als der erste sey. Wenn demnach $\mu\zeta > 1$ ist, so ist $x < \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1}$, oder $A\Pi < A\pi$, und $\pi\Pi = A\pi - A\Pi =$

$$\frac{M + \sin v\gamma - \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r.$$

Es sey dieser Werth $= h$, und $\frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1} = g$, so ist $x = g - h$. In dem Fall, wenn γ sehr klein ist, findet man $M + \sin v\gamma - \sqrt{(\mu^2\lambda^2 -}$

$\sin\gamma^2) = \left(1 + \frac{1}{\mu\zeta} + \frac{2\mu^2\varepsilon}{\mu\zeta - 1} - \frac{\mu\varepsilon}{\zeta}\right)$ $\sin v . \gamma$, und der in $\sin v\gamma$ multiplicirte Factor ist $= \frac{\mu\zeta + 1}{\mu\zeta} + \frac{\mu\varepsilon(\mu\zeta + 1)}{(\mu\zeta - 1)\zeta} =$ $\frac{(\mu\zeta - 1 + \mu^2\varepsilon)(\mu\zeta + 1)}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)}$. Weil ferner $\zeta = 1 - \varepsilon$, so erhält man $\mu\zeta - 1 + \mu^2\varepsilon = \mu - \mu\varepsilon - 1 + \mu^2\varepsilon = \mu(\mu\varepsilon + 1) - (\mu\varepsilon + 1) = (\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1)$, und diese Werthe geben $h =$ $\frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1)(\mu\zeta + 1) . r \sin v\gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)}$.

$\frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1}$. Weiter ist $\mu^2\lambda^2 - 1 = \mu^2\zeta^2 - 1 + 2\mu^2\varepsilon \sin v . \gamma$, also $\frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1} = \frac{1}{\mu^2\zeta^2 - 1}$ $- \frac{2\mu^2\varepsilon \sin v\gamma}{(\mu^2\zeta^2 - 1)(\mu^2\zeta^2 - 1 + 2\mu\varepsilon \sin v\gamma)}$ läßt man also denjenigen Theil weg, der den Factor $\sin v . \gamma^2$ enthalten würde, so wird $h =$ $\frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1) . r \sin v . \gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$ gefunden. Weil dieser Ausdruck mit γ wächst, so erhellet, daß nicht alle aus P auf die Kugelfläche fallende Strahlen in einerley Punct der Axe AP nach der Brechung zusammen laufen. Nur diejenigen, welche wie $P\mu$, Pm, sehr nahe bey der Axe auffallen, haben den Vereinigungspunct π, und für die übrigen rückt Π desto näher gegen A, je grösser γ wird, in dem Fall nemlich, wenn $\mu > 1$ ist. Der Unterterscheid $\pi\Pi = h$ der beyden Entfernungen $C\pi$, $C\Pi$, heist die von der Kugelgestalt herrührende Abweichung des gebrochenen Strahls PMW.

151. §.

Unter der allgemeinen Auflösung der Aufgabe des 149 §. ist eine ziemliche Anzahl besondrer Fälle enthalten, wovon die merkwürdigsten noch um deswillen eine kurze Erörterung verdienen, weil davon im folgenden Abschnitt eine fernere Anwendung gemacht werden muß. Zuförderst bemerke ich, daß selbst die im 119 §. vorgekommene Aufgabe von der zuletzt aufgelöseten nur ein besondrer Fall sey. Wenn nemlich der Halbmesser AC 50 F.
wächst, und alles übrige ungeändert bleibt, so nimmt der Winkel ACM ab, und der Bogen AM nähert sich der Natur einer graden Linie, so wie die Kugelfläche der Natur einer ebenen Fläche, welche AP in A senkrecht schneidet, oder die Kugelfläche in A berührt. Wird nun AD $= u$, DM $= w$ gesetzt, so ist $u = r$ sinv. γ, $w = r$ sinγ; also $x = \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1} - \frac{Mr + u - \sqrt{(\mu^2\lambda^2 r^2 - w^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1}$, (149 §.) und $\zeta r = \frac{\delta r}{\delta + r}$. Ferner war $M = \mu\zeta + \frac{2\mu^2 \varepsilon \sin v\gamma}{\mu\zeta - 1}$, und $\lambda^2 = \zeta^2 + 2\varepsilon \sin v.\gamma$, also ist $Mr = \mu\zeta r + \frac{2\mu^2 \varepsilon . u}{\mu\zeta - 1}$; weil überdem $2 \sin v.\gamma = \sin\gamma^2 + \sin v.\gamma$, so erhält man $\lambda^2 r^2 = \zeta^2 r^2 + \varepsilon.(w^2 + u^2)$. Wenn r unendlich groß wird,

 so

so verschwindet γ, und w wird $=$ AB, $\zeta r = \delta$, $\varepsilon = \frac{r}{\delta + r} = 1$, $\zeta = 0$, $\lambda = 0$, $u = 0$, mithin wird in diesem Fall

$x = -\surd(\mu^2 \delta^2 + w^2) - w^2)$,

wie im 119 §. Was nemlich daselbst z war, ist hier w, und das Zeichen (—) rührt daher, weil in dem Fall des 119 §. der Punct Π mit P auf einerley Seite der brechenden Fläche liegt, im 149. §. aber die Linien AΠ positiv genommen sind, welche sich von der brechenden Fläche aus nach der Lage erstrecken, die der Lage AP entgegen gesetzt ist.

152. §.

51 F. Die 51. Figur stellt den Fall vor, wenn der Strahl bey der Brechung in der Kugelfläche aus einer dünnern durchsichtigen Masse in eine dichtere fällt. Alsdenn ist $\mu < 1$, also ist nun $g = -\frac{\mu\zeta r}{1 - \mu\zeta}$ (150. §.) negativ; das will sagen, die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen fahren nach der Brechung hinter der Kugelfläche auseinander, und haben alsdenn eine solche Lage, als kämen sie aus dem Punct π her, der vor der Kugelfläche liegt. Dieser Punct π ist nun kein Sammlungspunct, sondern ein Zerstreuungspunct der gebrochenen Strahlen, kein physisches sondern ein geometrisches Bild des Puncts P. So lange der Winkel γ wenige Grade fasset, ist die Abweichung $h = \frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1) \,.\, r \,\text{sinv}.\gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$,

(150.

(150. §.) also $x = g - h = - \frac{\mu \zeta r}{1 - \mu \zeta} + \frac{(1-\mu)(\mu\varepsilon + 1) . r \sin v . \gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$, und Π liegt wiederum der brechenden Fläche näher als π. Beym fernern Gebrauch dieser Formuln in der Photometrie wird nur vornemlich nöthig seyn, daß die Entfernung des Bildes π, es sey übrigens ein Sammlungs- oder Zerstreuungs-Punct der zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen nach ihrer Brechung, für jeden besondern Fall bekannt sey; mehrere Untersuchungen über die Abweichung wegen der Kugelgestalt wird die Dioptrick anstellen.

153. §.

Es sey also zuerst $\mu > 1$, so hat man $g = \frac{\mu \zeta r}{\mu \zeta - 1}$, und $\zeta = \frac{\delta}{\delta + r}$, also $g = \frac{\mu \delta r}{\mu\delta - (\delta + r)}$, oder $g = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$, und eben die Formul ist auch $= \frac{\mu r}{\mu - 1 - r : \delta}$. So lange $\delta > \frac{r}{\mu - 1}$ ist, so lange ist g positiv, π liegt hinter der brechenden Fläche, und ist ein Sammlungspunct der gebrochenen Strahlen. Wie nun g ausser der Zahl μ nur von δ und r abhängt, r aber bey einerley Kugelfläche unveränderlich ist, so müssen noch die Aenderungen erwogen werden, die mit g vorgehen, wenn δ Aenderungen leidet.

1) Demnach nehme man an, daß $\delta = AP$ wachse, oder P von der brechenden Fläche weiter wegrücke, so wird $g = \frac{\mu r}{\mu - 1 - r : \delta}$ kleiner, und π rückt der brechenden Fläche näher. Wächst δ über alle Gränzen, so wird zuletzt $g = \frac{\mu}{\mu - 1} r$. Es sey $AF = \frac{\mu}{\mu - 1} r$, so will die letzte Folge soviel sagen: wenn der Strahl $P'm$ mit der Axe AP parallel, und sehr nahe bey der Axe auffällt, so schneidet er nach der Brechung die Axe in F. Eben das gilt für alle Strahlen, die in eben der Lage sehr nahe bey der Axe auffallen, ihr Vereinigungspunct nach der Brechung ist F, und dieser Punct heißt der Brennpunct der Kugelfläche, so wie AF die Brennweite. Die Nahmen werden hier aus einem ähnlichen Grunde, wie beym sphärischen Spiegel (93 §.) gebraucht. Setzt man also diese Brennweite $= f$, so ist $f = \frac{\mu}{\mu - 1} r$, also $\mu r = (\mu - 1) f$, und die allgemeine Formul $g = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1) \delta - r}$ läßt sich auch so ausdrücken $\frac{(\mu - 1) \delta f}{(\mu - 1) \delta - r} = \frac{\delta f}{\delta - r : \mu - 1}$.

Weil nun $\frac{\mu}{\mu - 1} = 1 + \frac{1}{\mu - 1}$, so ist auch $f = r + \frac{r}{\mu - 1}$, und $\frac{r}{\mu - 1} = f - r$, mithin

$$g = \frac{\delta f}{\delta - (f - r)} = \frac{f}{1 - (f - r) : \delta}.$$

2) Wenn

2) Wenn δ abnimmt, oder P der brechenden Kugelfläche näher rückt, so wächst $g = \frac{f}{1-(f-r):\delta}$, weil der Nenner dieses Bruchs bey ungeändertem Zähler kleiner wird. In dem Fall $\delta = f - r$ wird g unendlich groß, das heist: die Strahlen laufen nach der Brechung mit der Axe der Kugelfläche parallel, wenn der Abstand des strahlenden Puncts von der brechenden Kugelfläche dem Ueberschuß der Brennweite über dem Halbmesser der Kugelfläche gleich ist.

3) Nimmt δ noch weiter ab, so daß $\delta < f - r$, oder $\delta + r < f$ ist, so wird $g = -\frac{\delta f}{f-r-\delta} = -\frac{f}{(f-r):\delta - 1}$ negativ, die Strahlen haben nach der Brechnng keinen Sammlungspunct hinter der brechenden Fläche, wohl aber einen Zerstreuungspunct vor derselben, und laufen so auseinander, als kämen sie von diesem Zerstreuungspunct her. Uebrigens nimmt $g = -\frac{f}{(f-r):\delta - 1}$ desto mehr ab, je mehr δ abnimmt, und wenn δ verschwindet, wird $g = 0$.

4) Auf den Punct M der brechenden Kugelfläche könnte wohl ein Strahl QM in einer solchen Lage fallen, daß derselbe verlängert die Axe AC der Kugelfläche hinter derselben schnitte: alsdenn wäre AP was vorhin δ war nur mit entgegen gesetzter Lage. Um also für Fälle dieser Art $A\pi$ zu finden, muß man in der allgemeinen Formul für g die Linie δ negativ annehmen, so giebt sich $g =$ 52 F.

 $\mu\delta r$

$$\frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\,\delta + r}, \text{ oder auch } g = \frac{\delta f}{\delta + f - r}.$$

Weil nun $f > r$ ist, so bleibt dieser Werth allemahl positiv, wie groß auch δ von A nach C zu angenommen wird. Strahlen also, die vor der Brechung schon gegen einerley Punct der Axe hinter der brechenden Kugelfläche zu liefen, bleiben auch nach der Brechung zusammen laufende Strahlen. So lange $\delta < r$ ist, so lange ist $g > \delta$ und π ist von der brechenden Fläche weiter als P entfernt. Wird aber $\delta > r$, so wird $g < \delta$, und π liegt der brechenden Fläche näher als P, wie solches auch die Betrachtung der Figur von selbst zu erkennen giebt.

154. §.

51 F. Wird nunmehro $\mu < 1$ angenommen, welches der Fall ist, den die 51 Fig. vorstellt, so hat man

$$g = - \frac{\mu \delta r}{(1 - \mu)\,\delta + r}.$$

1) Diese Formul hat allemahl einen negativen Werth, was auch statt δ für ein positiver Werth gesetzt wird. Sie wächst mit δ, und nimmt ab, wenn δ kleiner wird, so wie sie auch mit δ zugleich verschwindet. In allen Fällen also, wenn aus einem Punct der Axe P, der vor der brechenden Fläche liegt, Strahlen sehr nahe bey der Axe auffallen, fahren diese Strahlen hinter der brechenden Fläche so aus einander, als kämen sie von einem Punct in der Axe her, der vor der brechenden Fläche liegt, da dann dieser Punct ein geometrisches Bild, oder ein Zerstreuungspunct ist. In dem

dem Fall $\delta = \infty$ hat man $g = - \frac{\mu r}{1 - \mu}$, und die Brennweite ist negativ. Das heißt: es giebt keinen physischen wohl aber einen geometrischen Brennpunct für die mit der Axe parallel auffallenden Strahlen. Wird also nun $\frac{\mu r}{1 - \mu} = f$ gesetzt, so ist auch $g = - \frac{\delta f}{\delta + r : (1 - \mu)}$. Weil ferner $\frac{1}{1 - \mu} = 1 + \frac{\mu}{1 - \mu}$ ist, so hat man $\frac{r}{1 - \mu} = r + \frac{r \mu}{1 - \mu} = r + f$, und es wird $g = - \frac{\delta f}{\delta + r + f}$.

2) Fallen die Strahlen in einer solchen Lage auf, daß sie verlängert hinter der brechenden Kugelfläche in einem Punct der Axe zusammen laufen würden, wie im 153. §. n. 4. angenommen ward, so ist δ negativ, also $g = \frac{\mu \delta r}{r - (1 - \mu) \delta}$, oder $g = \frac{\delta f}{\frac{r}{1 - \mu} - \delta} = \frac{\delta f}{f + r - \delta}$. Dieser Werth bleibt positiv, so lange $\delta < f + r$ bleibt, auch ist $g < \delta$ so lange $\delta < r$ bleibt; wird aber $\delta > r$, so wird $g > \delta$, und g wächst mit δ bis $\delta = f + r$ wird, da dann g unendlich groß wird, und die Strahlen nach der Brechung mit der Axe parallel laufen.

Wird

Wird $\delta > f + r$, so wird $g = - \frac{\delta f}{\delta - (f+r)}$ wieder negativ, und nimmt ab, wenn δ noch weiter wächst, bis $g = -f$ wird, wenn δ unendlich groß ist.

155. §.

Bey allen diesen Schlüssen ist noch vorausgesetzt worden, daß die Lichtstrahlen auf die erhabene Seite der brechenden Kugelfläche fallen, an sich aber sind die Formuln des 149sten und 150sten §. so allgemein, daß auch der Fall darunter enthalten ist, wenn das Licht auf die hohle Seite der brechenden Kugelfläche fällt. Die allgemeine Formul war $x = \frac{\mu \zeta r}{\mu \zeta - 1} - h$, und im 151: §. sind die Aenderungen schon zum Theil erwogen, die mit der Formul vorgehen, wenn r Aenderungen leidet, auch ist gewiesen, daß der besondre Fall, wenn die brechende Fläche eben ist, (119. §.) unter der allgemeinen Formul enthalten sey. Diesen Fall giebt die allgemeine Formul, wenn man $r = \infty$ setzt, und man siehet leicht, wenn nunmehro r oder AC negativ angenommen wird, daß solches soviel heisse, als annehmen: der Kugelfläche Mittelpunct C liege auf der Seite der Kugelfläche, wo das Licht herkommt, oder die hohle Seite der Kugelfläche sey dem auffallenden Licht zugekehrt. Weil nun hier die Abweichung wegen der Kugelgestalt beyseit gesetzt, und die allgemeine Formul $g = \frac{\mu \zeta r}{\mu \zeta - 1} = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$ nur gebraucht wird;

so

so nehme man in derselben r negativ an, und man erhält $g = - \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta + r}$ für den Fall, wenn das Licht auf die hohle Seite der Kugelfläche fällt.

156. §.

1) Ist nun zuerst $\mu > 1$, so ist allemahl g negativ, wenn δ positiv ist, oder: wenn das Licht von einem Punct der Axe vor der Kugelfläche ausgehet, so fahren die Strahlen nach der Brechung ebenfals aus einander als kämen sie von einem Zerstreuungspunct her, der vor der brechenden Fläche liegt, wie es die 53. Fig. vorstellt. Wird δ un- 53 F.
endlich groß, so ist $g = - \frac{\mu r}{\mu - 1}$ die Brennweite, welche nun negativ ist, und es giebt in diesem Fall keinen physischen sondern einen geometrischen Brennpunct für Strahlen, die mit der Axe parallel auffallen. Wird also $\frac{\mu r}{\mu - 1} = f$ gesetzt, so hat man auch $g = - \frac{\delta f}{\delta + r : (\mu - 1)}$ und $f = r + \frac{r}{\mu - 1}$, also $\frac{r}{\mu - 1} = f - r$, und $g = - \frac{\delta f}{\delta + f - r}$. So lange $\delta > r$ ist, so lange ist $g < \delta$, in dem Fall $\delta = r$, ist $g = - \delta$, und das Licht geht ungebrochen durch: wird $\delta < r$, so ist $g > \delta$.

2) Mit δ verschwindet auch g, wenn aber δ ne- 54 F.
gativ wird, oder wenn die Strahlen VM in der

Lage

Lage auffallen, daß sie sich hinter der brechenden Fläche in einem Punct P der Axe vereinigen würden; so ist $g = \frac{\mu \delta r}{r - (\mu - 1)\delta} = \frac{\delta f}{f - r - \delta}$ so lange wieder positiv, als $\delta < f - r$ bleibt. In dem Fall $\delta = f - r$, wird g unendlich groß, und die Strahlen sind nach der Brechung mit der Axe parallel. Wird endlich $\delta > f - r$, so ist $g = - \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r} = - \frac{\delta f}{\delta - (f - r)}$ wieder negativ, und nimmt ab, wenn δ wächst, bis zuletzt in dem Fall $\delta = \infty$ wieder $g = - \frac{\mu r}{\mu - 1} = - f$ wird.

157. §.

55 F. Es bleibe die Voraussetzung, daß r negativ, oder die Höhlung der Kugelfläche dem auffallenden Licht zugekehrt sey: überdem aber sey $\mu < 1$; so hat man $g = \frac{\mu \delta r}{(1 - \mu)\delta - r}$.

1) So lange nun δ positiv, und grösser, als $\frac{r}{1 - \mu}$ ist, so lange ist g positiv, und die Strahlen, welche sehr nahe bey der Axe auffallen, laufen nach der Brechung in einerley Vereinigungspunct zusammen. In dem Fall $\delta = \infty$ wird $g = \frac{\mu r}{1 - \mu}$, und dieser Werth sey $= f$; so ist f die Brennweite, und die Strahlen haben nach der Brechung einen physischen Brennpunct. Ueberdem

dem hat man auch $g = \frac{\delta f}{\delta - r : (1 - \mu)}$, und

$\frac{r}{1-\mu} = r + \frac{\mu r}{1-\mu} = r + f$, also $g = \frac{\delta f}{\delta - r - f}$. Wird $\delta = f + r$, so wird $g = \infty$, und die Strahlen sind nach der Brechung mit der Axe parallel. Wird ferner $\delta < f + r$, so ist $g = - \frac{\delta f}{f + r - \delta}$ negativ, die Strahlen fahren nach der Brechung aus einander, und haben vor der brechenden Fläche einen Zerstreuungs-Punct.

2) Mit δ verschwindet g, und wenn δ negativ wird, oder wenn Strahlen in der Lage auf die hohle Kugelfläche fallen, daß sie hinter derselben in einem Punct der Axe zusammen laufen würden; so ist $g = \frac{\mu \delta r}{(1-\mu)\delta + r} = \frac{\delta f}{\delta + r + f}$ allemahl 54 F.
positiv, und kleiner als δ. Dergleichen für sich schon zusammen laufende Strahlen werden also durch die Brechung in einen Vereinigungspunct gesammlet, welcher der brechenden Kugelfläche noch näher als P liegt. In der 54 Fig. wäre nun RMπ > RMP, und π würde zwischen A und P in π' fallen.

158. §.

**Ein Punct *P* der Axe *AP* wirft den Strahl *PM* auf die brechende Kugelfläche *AMN* in 56 F.
M, und es ist *AP* = δ, *ACM* = γ gegeben; *PN* ist ein andrer Strahl in derselben Ebene *APM*,**

APM, und die Winkel *MPN*, *MCN* sind in Vergleichung mit *APM*, *ACM* unendlich klein: man soll den Punct Q finden, worin beyde Strahlen nach der Brechung in die Lage *Mp*, und *Nq* einander schneiden.

Aufl. Daß es einen solchen Durchschnittspunct Q giebt, erhellet daraus, weil $Ap = x$ (149. 150. §.) abnimmt, wenn γ wächst, also rückt p nach q, wenn ACM um das Differential MCN wächst, und Mp wird von Nq in Q geschnitten. Die Lage der Linie MQ ist gegeben; denn man hat

$$\sin\alpha = \frac{CP \cdot \sin\gamma}{PM} =$$

$$\frac{(\delta + r)\sin\gamma}{\sqrt{(r^2 - 2r(\delta + r)\cos\gamma + (\delta + r)^2)}},$$ und

$\sin\beta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha$, also kommt die Auflösung der Aufgabe nur darauf an, daß man die Grösse der Linie MQ suche. Mit dem Halbmesser PN sey der Bogen NK zwischen den Schenkeln des Winkels MPN, und mit dem Halbmesser QN der Bogen NL zwischen den Schenkeln des Winkels MQN beschrieben; so ist $QM = \frac{NL}{MQN}$, und $PM = \frac{NK}{MPN}$. Ferner ist $ApM = \gamma - \beta$, und $AqN = \gamma - \beta + d\gamma - d\beta$, also $pQq = MQN = AqN - ApM = d\gamma - d\beta$. Noch setze man $APM = \pi$, so ist $MPN = d\pi$. Ueberdem ist $NL = MN \cos\beta$ und $NK = MN \cos\alpha$; also erhält man

QM

$$QM = \frac{MN \,.\, \cos\beta}{d\gamma - d\beta}, \quad PM = \frac{MN \cos\alpha}{d\pi},$$

und das giebt $\frac{QM}{PM} = \frac{d\pi \cos\beta}{\cos\alpha\,(d\gamma - d\beta)}$. Ferner ist $\gamma = \alpha - \pi$, also $d\gamma = d\alpha - d\pi$, und $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, also $d\alpha \cos\alpha = \mu d\beta \cos\beta$, und $d\alpha = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\cos\alpha}$; mithin $d\gamma = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\cos\alpha} - d\pi$, und $d\gamma \cos\alpha = \mu d\beta \cos\beta - d\pi \cos\alpha$, also erhält man

$$\frac{QM}{PM} = \frac{d\pi \cos\beta}{\mu d\beta \cos\beta - d\pi \cos\alpha - d\beta \cos\alpha},$$

oder wenn man $\frac{d\beta}{d\pi} = u$ setzt, $QM =$

$$\frac{PM \,.\, \cos\beta}{(\mu \cos\beta - \cos\alpha) \,.\, u - \cos\alpha}.$$

Noch hat man $\frac{\sin\pi}{r} = \frac{\sin\alpha}{\delta + r} = \frac{\mu \sin\beta}{\delta + r}$, also $\frac{d\pi \cos\pi}{r} = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\delta + r}$, und $\frac{d\beta}{d\pi} = u = \frac{(\delta + r)\cos\pi}{\mu r \cos\beta}$, und man findet $QM =$

$$\frac{\mu \,.\, PM \,.\, r \cos\beta^2}{\mu(\delta+r)\cos\pi\cos\beta - (\delta+r)\cos\pi\cos\alpha - \mu r \cos\alpha\cos\beta}.$$

Auf den verlängerten Strahl PM sey CD senkrecht gezogen, so ist $PD = (\delta + r)\cos\pi = PM + MD = PM + r\cos\alpha$, und wenn dieser Werth statt $(\delta + r)\cos\pi$ gebraucht wird, so verwandelt sich die gefundene Formul in folgende $QM =$

$$\frac{\mu \,.\, PM \,.\, r \,.\, \cos\beta^2}{(\mu \cos\beta - \cos\alpha) \,.\, PM - r \cos\alpha^2}.$$

 Wenn

Wenn r unendlich groß ist, das heißt, wenn sich die Kugelfläche in eine ebene Fläche verwandelt, so hat man $QM = -\frac{\mu PM . \cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$, wie im 121. §. und das Zeichen (—) rührt hier nur daher, weil die Linien, welche sich von der brechenden Fläche nach hinten erstrecken, positiv genommen sind, in dem Fall des 121. §. aber MQ vor der brechenden Fläche liegt.

In dem Fall, wenn die hohle Seite der Kugelfläche das Licht auffängt, ist r negativ, und man hat $QM = -\frac{\mu . PM . r \cos\beta^2}{(\mu \cos\beta - \cos\alpha) PM + r \cos\alpha^2}$.

Nimmt man an, daß diese hohle Seite der Kugelfläche polirt sey, und das Licht zurück werfe, so hat man, $\beta = -\alpha$, also $\mu = -1$, weil $\sin\alpha = -\sin\beta$, und $\cos\alpha = \cos\beta$, mithin wird alsdenn $QM = -\frac{PM . r \cos\beta}{2PM - r \cos\beta}$, wie im 101. §. woselbst $r \cos\beta = MD$ war, und das Zeichen (—) zeigt hier wiederum an, daß in dem Fall der Zurückwerfung vom sphärischen Hohlspiegel MQ vor dem Spiegel liege.

Man lasse CD und CE auf den einfallenden und gebrochenen Strahl MF, MG, senkrecht fallen, so ist $MD = r \cos\alpha$, $ME = r \cos\beta$, und die für QM gefundene allgemeine Formul im Zähler und Nenner mit r multiplicirt giebt $QM = \frac{\mu . PM . r^2 \cos\beta^2}{(\mu r \cos\beta - r \cos\alpha) PM - r^2 \cos\alpha^2}$, also ist auch

QM

$$QM = \frac{\mu \, . \, PM \, . \, ME^2}{(\mu\, ME - MD) \, . \, PM - MD^2}, \text{ und}$$

wenn die hohle Seite der Kugelfläche das Licht auffängt,

$$QM = - \frac{\mu \, . \, PM \, . \, ME^2}{(\mu\, ME - MD)\, PM + MD^2}.$$

Wenn der einfallende und gebrochene Strahl den grösten Kreis der Kugel, wozu der Bogen AM gehört, zum zweyten mahl in F und G schneiden, und man will die Sehnen MF, MG, in Rechnung bringen, so hat man $MD = \frac{1}{2} MF$, $ME = \frac{1}{2} MG$, also ist die allgemeine Formul $MQ =$

$$\frac{\frac{1}{2} \mu \, . \, PM \, . \, MG^2}{(\mu\, MG - MF)\, PM - \frac{1}{2} MF^2}.$$

159. §.

Weil alle Strahlen, die das Element MN auffängt, nach ihrer Brechung in Q zusammen laufen, und daselbst ein Bild des Puncts P machen, dessen Stelle von der Stelle des Elements MN abhängt, so giebt es auch hier wie im 122 §. eine Linie, worin alle Bilder liegen, eine **dioptrische Brennlinie des Kreises**, die in dem Fall, wenn die erhabene Seite der Kugelfläche das Licht auffängt physisch, wenn aber die hohle Seite das Licht auffängt, geometrisch ist, weil die Vereinigungspuncte im letzten Fall Zerstreuungspuncte werden.

Eine Gleichung für diese Linie zwischen rechtwinklichten Coordinaten liesse sich auf ähnliche Art finden, wie sie im 114 §. für die catoptrische Brennlinie des Kreises ist gesucht worden. Man setze nemlich QR und MB auf Ap senkrecht, und nehme $CR = x$, $RQ = y$ an, so hat man $Mp : Qp = MB : y$, und $Cp - x : y = CB + Cp : BM$; also $y = \frac{MB \cdot Qp}{Mp} = \frac{MB\,(Mp - MQ)}{Mp}$, oder

$$y = MB - \frac{MB \cdot MQ}{Mp},$$ und aus der zweyten Proportion $x = Cp - \frac{(CB + Cp)\,y}{BM}$. Nun sind BM, QM, Mp, CB, Cp, durch γ gegeben, weil auch α nnd β durch γ gegeben sind, also kann man x und y durch γ ausdrücken, hiernächst aber γ wegschaffen, und auf solche Art eine Gleichung zwischen x und y finden. Die Rechnung läßt sich zwar auf ähnliche Art weiter fortführen, wie im 114 §. für die catoptrische Brennlinie des Kreises, geschehen ist; nur ist zu bemerken, daß dorten derjenige Winkel α hies, der hier mit γ bezeichnet ist. Wer in der höhern Geometrie geübt ist, findet eine sehr gute und deutliche Anweisung dazu, wie man über die Natur der Brennlinien überhaupt Untersuchungen anstellen kann, in der oben im 114 §. schon angeführten Analyse des infiniment petits pour intelligence des lignes courbes par Mr. le Marquis de l'Hopital, Sect. VI. et VII. auch kann man **Smiths Lehrbegrif der Optick von H. Kästner übersetzt**, und zwar der Dioptrick 2. Buch 5 Cap. zu Rath ziehen. Ferner gehört hieher aus Io. Bernoulli Lect. Hospital. Lect. LVI — LIX. Operum Tom. III. pag. 546. sqq. **Tschirnhaus** hatte zwar der dioptrischen Brennlinien erwehnt, ihre Natur aber nicht untersucht: auch hatte **Huygen** im Tractatu de lumine die

dioptri-

dioptrische Brennlinie des Kreises nur in dem Fall, wenn die Strahlen mit der Axe parallel auffallen, einigermassen beschrieben. M. s. Hugenii Opera Reliqua Vol. I. pag. 88. sqq.) als Jacob Bernoulli anfieng, die ersten allgemeinen analytischen Untersuchungen darüber anzustellen. (M. s. Iacobi Bernoullii Opera Tom I. pag. 549. sqq.

Der XIII. Abschnitt.

Die Brechung des gleichartigen Lichts, wenn es durch eine Glaslinse fällt.

159. §.

Sind ein paar Kreisbogen BAD, BGD in einer Ebene so beschrieben, daß sie einander in B und D schneiden, und man ziehet die grade Linie zwischen ihren Mittelpuncten C und E; so halbirt diese ihre gemeinschaftliche Sehne BD in R senkrecht, (66 §. Geom.) Man stelle sich vor, die Figur werde um die Axe CE gedrehet, so entsteht ein körperlicher Raum, der aus zweenen Kugelabschnitten zusammen gesetzt ist, die gleiche Grundflächen haben, und zwar so, daß ihrer beyder Grundflächen zusammen fallen, und CE ihre gemeinschaftliche Axe ist, die zugleich die Axe des linsenförmigen Körpers heist, der solchergestalt zuwege gebracht wird. Giebt man einem 57 F.

Stück Glas durchs Abschleifen diese Gestalt, so heist es eine Glaslinse, wovon zugleich beyde Kugelflächen, damit das auffallende Licht hindurch dringen kann, gehörig polirt seyn müssen. Eine solche Glaslinse hat einen kreisförmigen Umfang, der durch B und D läuft in einer auf EC senkrechten Ebene: es ist der Umfang des Kreises, welcher die gemeinschaftliche Grundfläche der beyden Kugelstücke abgiebt, woraus die Linse zusammen gesetzt ist, BD ist der Durchmesser, RB = RD der Halbmesser dieses Kreises. Wenn man vom Umkreise des Glases redet, so versteht man diesen Kreis, und sein Durchmesser BD heist auch der **Durchmesser des Glases.**

160. §.

Wenn ein strahlender Punct P in der Axe des Glases befindlich ist, und sein Licht auf das Glas wirft, so leidet jeder Strahl PM beym Durchgang durch das Glas eine zweymahlige Brechung: einmahl nemlich in der Vorderfläche BAD aus der Lage MH in die Lage MN, und hiernächst in der Hinterfläche BGD, wenn er aus dem Glase wieder in die Luft fährt, aus der Lage NΠ in die Lage Np. Uebrigens ist die Ebene APM beydemahl die Ebene der Brechung, und der ganze zweymahl gebrochene Strahl PMNp bleibt in einerley Ebene APM. Denn das erste Einfallsloth ist CM, also liegt MN in der Ebene des Dreyecks CPM, oder der Ebene APM. In eben dieser Ebene liegt demnach das zweyte Einfalls-Loth EN, mithin auch der zum zweyten mahl gebrochene Strahl Np.

161. §.

Aus der gegebenen Lage des einfallenden Strahls PM durch den Winkel ACM = γ, oder APM, = π, nebst der Entfernung AP = δ und dem Verhältniß der Refraction $\mu : 1$, läßt sich die Lage des zum erstenmahl gebrochenen Strahls MN finden, (149. §.) Wenn nun derselbe verlängert die Axe der Linse in Π schneidet, so kann wiederum aus der Lage des Strahls MN im Glase, die vermittelst des Winkels GEN, und der Entfernung GΠ = AΠ — AG gegeben ist, die Lage des zum zweytenmahl gebrochenen Strahls Mp gefunden werden. (149. 155. §.) Wenn nun die beyden Kugelstücke BAD, BGD in Vergleichung mit der völligen Halbkugel sehr klein sind, mithin die Winkel ACM, GEN, nur wenige Grade fassen, wo auch die Puncte M und N hinfallen; so haben nicht allein die auf die Vorderfläche BAD fallenden Strahlen sehr nahe einerley Vereinigungspunct Π, (149. §.) sondern auch die auf die hintere Fläche BGD fallenden Strahlen haben aus demselben Grunde wiederum sehr nahe einerley Vereinigungspunct p, und machen daselbst ein Bild des Puncts P. Das Bild ist desto deutlicher, je kleiner die Winkel ACM und GEN sind; haben dagegen diese Winkel eine etwas beträchtliche Grösse, so wird das Bild undeutlich, wegen der Abweichung der gegen den Rand des Glases zu auffallenden Strahlen, die von der Kugelgestalt herrührt. Die Dioptrick wird von der Würkung dieser Abweichung wegen der Kugelgestalt, wenn das Licht durch Glaslinsen fällt, umständlicher handeln: hier werde ich nur die Stelle des deutlichen Bildes für die Strahlen suchen, die so nahe bey der Axe auffallen, daß ihre Abweichung beyseit gesetzt werden kann.

162. §.

57 F. Ein Punct P in der Axe der Glaslinse $BEDG$ wirft sein Licht auf ihre Vorderfläche BAD: man sucht die Stelle des Bildes p in der Axe, welches die zunächst bey der Axe auffallenden Strahlen nach ihrer zweymahligen Brechung verursachen.

Aufl. Es sey AP $= \delta$, CA $= r$, das Verhältniß der Refraction für Luft und Glaß $= m : n$; so ist im 149. 150. §. $\mu = \frac{m}{n}$, und man hat AΠ $= \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r} = \frac{m \delta r}{(m - n)\delta - nr}$. Die Dicke des Glases AG sey $= c$, und GΠ $= \Delta$, so hat man $\Delta =$ AΠ $- c$, oder $\Delta = \frac{m \delta r}{(m - n)\delta - nr} - c = \frac{m\delta r - (m - n)\delta c + ncr}{(m - n)\delta - nr}$. Ferner sey G$p$ $= x$, und EG $= \varrho$. Weil nun das Verhältniß der Refraction für Glaß und Luft $= n : m$ ist, 118. §., so hat man im 157. §. $\mu = \frac{n}{m}$, und $x = \frac{\mu \Delta \varrho}{(1 - \mu)\Delta + \varrho} = \frac{n \Delta \varrho}{(m - n)\Delta + m\varrho}$. Das giebt $(m - n)x \cdot \Delta + m\varrho x = n\varrho \cdot \Delta$, mithin $\Delta = \frac{m \varrho x}{n\varrho - (m - n)x}$. Beyde Werthe von Δ

gleich

gleich gesetzt geben eine Gleichung für x, die man abkürzt, wenn man $(m-n)\,\delta - nr = h$ setzt. Man erhält nemlich $\frac{m\varrho x}{n\varrho - (m-n)\,x} = \frac{mr\delta - h\,.\,c}{h}$, und daraus folgt $m\varrho h x = n\varrho\,(mr\delta - h\,.\,c) - (m-n)\,(mr\delta - hc)\,x$, mithin $x = \frac{n\varrho\,(mr\delta - hc)}{m\varrho h + (m-n)\,(mr\delta - hc)}$. Setzt man nun für h den angenommenen Werth $(m-n)\,\delta - nr$; so wird in dem gefundenen Werth von x

der Zähler $= n\varrho\,((mr - (m-n)\,c)\,\delta + nrc)$,

der Nenner

$= m\varrho\,(m-n)\,\delta - mn\varrho r + (m-n)\,mr\delta - (m-n)^2\,cd + (m-n)\,nrc$

$= (m-n\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho)\,\delta + (m-n)\,nrc - mnr\varrho$,

also $x =$

$$\frac{n\varrho\,((mr - (m-n)\,c)\,\delta + nrc)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho)\,\delta - (m\varrho - (m-n)\,c)\,nr}.$$

Gewöhnlich ist die Dicke des Glases c in Vergleichung mit den übrigen Linien so sehr klein, daß man die mit c multiplicirten Glieder ohne merklich zu fehlen, weglassen kann: alsdenn hat man $x = \frac{n\delta r\varrho}{(m-n)\,\delta\,(r+\varrho) - nr\varrho}$.

163. §.

Weil $m > n$, also $m > m - n$ ist, und überdem gewöhnlich $\varrho > c$, so ist $m\varrho > (m-n)\,c$, und $m\varrho - (m-n)\,c$ eine positive Grösse. Man dividire den Zähler und Nenner des für x gefundenen

denen Werths durch δ, so ist auch $x =$

$$\frac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c + nrc : \delta)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho) - (m\varrho - (m-n)\,c)\,nr : \delta}$$

Je grösser nun δ genommen wird, desto kleiner wird x, weil der Zähler abnimmt und der Nenner wächst. Würde δ unendlich groß, so erhielte man $x = \dfrac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho)}$. Nimmt dagegen δ ab, so wächst x, und in dem Fall $\delta = \dfrac{(m\varrho - (m-n)\,c)\,nr}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho}$ wird x unendlich groß, das heist, der zum zweyten mahl gebrochene Strahl liegt mit der Axe der Glaslinse parallel. Wird δ noch kleiner, so wird x negativ, und p fällt auf der Seite des Glases, wo P liegt. Weil übrigens die Formul von der Grösse des Winkels ACM $= \gamma$ nicht abhängt, so erhellet, daß alle gleichartige Strahlen, die von P auf das Glaß noch näher bey der Axe als PM auffallen, wie Pm, nach der zweyten Brechung ebenfals durch p laufen. Ja wenn das Glaß im Umfang nur so klein ist, daß der Sinus des Winkels ACD für den Halbmesser $= 1$ von seinem Bogen noch sehr wenig unterschieden ist; so werden alle Strahlen, die von P auf den Bogen AD, mithin auch diejenigen, welche auf AB fallen, nach der zweyten Brechung durch p gehen. Und weil dasselbe von allen Strahlen gilt, die in einerley durch die Axe EC geführte Ebene liegen, so gilt es von den gesammten Strahlen, die P auf die Vorderfläche BAD des Glases werfen kann, oder von dem ganzen auffallenden Strahlenkegel BPD: alle in demselben enthaltene

Strah-

Strahlen werden in der Linse so gebrochen, daß sie hinter dem Glase wiederum in dem Raum eines Kegels BpD liegen, und p ist ihrer aller Vereinigungspunct. Zugleich ist p ein Bild des Puncts P, denn ein Auge, das in der Gegend O stehet, empfängt die Strahlen so, als kämen sie von dem Punct p her, und P muß demselben in p zu stehen scheinen. Doch muß man hiebey die zum Grunde gelegte Voraussetzung nicht ausser Acht lassen, vermöge der alles auffallende Licht als gleichartig betrachtet wird, damit alle Strahlen nach einerley Gesetz gebrochen werden, oder das Verhältniß $m : n$ für alle einerley sey.

164. §.

Es sey F der Vereinigungspunct der Strahlen für den besondern Fall, wenn P vom Glase unendlich weit entfernt ist, oder wenn alle Strahlen mit der Axe des Glases parallel auf die Vorderfläche fallen; so ist GF =

$$\frac{n\varrho\,(mr - (m - n)\,c)}{(m - n)\,(mr - (m - n)\,c + n\varrho)};$$

und F heist der Brennpunct des Glases. (Focus). Wäre die Axe des Glases grade gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet, so würden alle daher auf das Glas fallende Strahlen mit der Axe parallel einfallen, und in F ihren Vereinigungspunct haben. Die vereinigten Kräfte der Sonnenstrahlen erzeugen alsdenn daselbst eine Hitze, die brennbare Sachen entzünden kann, und daher ist der Nahme Brennpunct entstanden. Von jedem andern Punct der Sonne fällt ebenfals ein Strahlen-Cylinder auf das

das Glas, ob aber, und wo die dazu gehörigen Strahlen einen Vereinigungspunct haben, muß noch weiter untersucht werden.

Der Abstand GF heist die **Brennweite**, oder **Focal-Distanz** des Glases, und wenn man diese $= f$ setzt, so ist $f = \frac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c)}{(m-n)\,(m\,(r+\varrho) - (m-n)\,c)}$.

Weil aber überhaupt der Abstand des Bildes vom Glase $x =$

$$\frac{n\varrho\,((mr - (m-n)\,c)\,\delta + nrc)}{(m-n)\,(m\,(r+\varrho) - (m-n)\,c)\,\delta - (m\varrho - (m-n)\,c)\,nr}$$

war, so kann man im Nenner $n\varrho\,(mr - (m-n)\,c) : f$ statt $(m-n)\,(m\,(r+\varrho) - (m-n)\,c)$ setzen, und man erhält $x =$

$$\frac{\varrho f\,((mr - (m-n)\,c)\,\delta + nrc)}{\varrho\,(mr - (m-n)\,c)\,\delta - (m\varrho - (m-n)\,c)\,rf}.$$

Um die Formuln noch mehr abzukürzen kann man $\frac{m}{m-n} = \mu$, $\frac{m}{m-n} = \nu$ setzen, so hat man $f =$

$$\frac{\nu\varrho\,(\mu r - c)}{\mu\,(r+\varrho) - c} = \frac{\nu r\varrho\,(1 - c : \mu r)}{r + \varrho - c : \mu}, \text{ und } x =$$

$$\frac{\nu\varrho\,((\mu r - c)\,\delta + \nu rc}{(\mu\,(r+\varrho) - c)\,\delta - (\mu\varrho - c)\,\nu r}, \text{ oder } x =$$

$$\frac{\varrho f\,((\mu r - c)\,\delta + \nu rc)}{\varrho\delta\,(\mu r - c) - rf\,(\mu\varrho - c)} =$$

$$\frac{f\left(\delta + \frac{\nu rc}{(\mu r - c)}\right)}{\delta - \frac{r\,(\mu\varrho - c)}{\varrho\,(\mu r - c)}\,f}.$$

In dem Fall, wenn die Dicke des Glases in Vergleichung mit den Halbmessern beyder Kugelflächen sehr klein ist, kann man c als verschwindend betrachten, und man erhält $f = \frac{\nu r \varrho}{r + \varrho} = \frac{n r \varrho}{(m - n)(r + \varrho)}$, und $x = \frac{\nu r \varrho \delta}{(r + \varrho)\delta - \nu r \varrho} = \frac{n r \varrho \delta}{(m - n)(r + \varrho)\delta - n r \varrho}$, oder $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

Fiele ein Strahlenkegel so auf die Linse, daß P′ seine Spitze wäre, oder alle auffallende Strahlen in dem Punct P′ hinter dem Glase zusammen liesen, so würden die Strahlen nach der Brechung in der Axe ebenfals einen Vereinigungspunct haben, dessen Stelle die für x gefundene Formul giebt, wenn man $-\delta$ statt δ schreibt, und alsdenn AP′ durch δ versteht. Das giebt $x = \frac{rf((\mu r - c)\delta - \nu r c)}{\varrho\delta(\mu r - c). + rf(\mu\varrho - c)}$, und wenn die Dicke des Glases beyseit gesetzt wird, $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$.

165. §.

Wenn beyde Kugelabschnitte, woraus die Glaslinse zusammen gesetzt ist, ein paar Halbkugeln von gleichen Halbmessern sind, so verwandelt sich die Linse in eine Kugel. Alsdenn hat man $r = \varrho$, $c = 2r$, und das giebt $f = \frac{r(2n - m)}{2(m - n)}$, und $x = \frac{r((2n - m)\delta + 2nr}{2(m - n)\delta + (m - 2n)r}$, oder auch $x =$

$f((2n$

$\frac{f((2n - m)\delta + 2nr)}{(2n - m)\delta - (2n - m)f}$. Bey der ganzen Kugel können übrigens nie alle Strahlen, die aus einerley Punct der Axe kommen, oder auch mit der Axe parallel auffallen, einen gemeinschaftlichen Vereinigungspunct haben: obgleich bey Linsen, wenn beyde Kugelflächen in Vergleichung der ganzen Kugelfläche, wozu jede derselben gehört, sehr klein sind, die auffallenden Strahlen sehr nahe wieder in einerley Punct vereiniget werden. Wie groß die Abweichung jedesmahl sey, darüber wird die Dioptrick umständlichere Untersuchungen anstellen.

166. §.

Im 149. §. ward $C\Pi =$
57 $\frac{F \cdot r(\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)})}{\mu^2\lambda^2 - 1}$ gefunden, und

es war $\lambda = \frac{PM}{CP} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\mu\sin\beta}$: demnach ist $\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} = \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma^2}{\sin\beta^2} - \sin\gamma^2\right)} = \frac{\sin\gamma\sqrt{(1 - \sin\beta^2)}}{\sin\beta} =$

$\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta}$, also $\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} =$

$\cos\gamma + \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta} =$

$\frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin\beta}$, und $\frac{\cos\gamma + \sqrt{(1 - \sin\beta^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} =$

sin

$\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\beta\,(\mu^2\lambda^2-1)}$. Weiter ist $\mu^2\lambda^2-1 = \frac{\sin\gamma^2}{\sin\beta^2}-1 = \frac{\sin\gamma^2-\sin\beta^2}{\sin\beta^2}$, also findet man auch $C\Pi = \frac{r\sin(\gamma+\beta)\sin\beta}{\sin\gamma^2-\sin\beta^2}$, und weil $\sin\gamma+\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, $\sin\gamma-\sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, (451. §. Geom.) so hat man $\sin\gamma^2-\sin\beta^2 = \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)$ (424 §. Geom.) mithin $C\Pi = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$. Eben diese Formul giebt sich auch unmittelbar aus Betrachtung des Dreyecks $C\Pi M$, woraus also erhellet, daß im 149. §. auch diese Formul $C\Pi = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$ hätte zum Grunde gesetzt, und jene dort angebene daraus hätte hergeleitet werden können. Denn man siehet leicht, daß jene aus dieser Folge, wenn man die eben vorgetragenen Schlüsse rückwärts fortführet.

Man setze nun den Winkel $CEN = \varepsilon$, den Neigungswinkel an der hintern Fläche der Glaslinse $ENM = KN\Pi = \eta$, den gebrochenen Winkel $KNp = \vartheta$; so sind $\varepsilon, \eta, \vartheta$, für die hintere Fläche der Linse, was γ, α, β für die Vorderfläche waren. Für eben diese Vorderfläche war $\alpha = \gamma + CPM$, und $E\Pi N$ ist für die hintere Fläche, was CPM für die Vorderfläche war, also ist $\eta = \varepsilon + E\Pi N$, wie auch die Figur ergiebt, aber ϱ und r sind einander entgegen gesetzt, mithin ist $Ep = -$

$\varrho\sin\vartheta$

$\frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\varepsilon - \vartheta)} = \frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\vartheta - \varepsilon)}$, wie auch aus Betrachtung des Dreyecks EpN folgt. Wie nun $\varepsilon = \eta -$ EΠN war, oder $\varepsilon = \eta -$ CΠM, und CΠM $= \gamma - \beta$, so ist $\varepsilon = \eta + \beta - \gamma$, also auch E$p$ = $\frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\vartheta + \gamma - \eta - \beta)}$.

167. §.

57 F. Die beyden Halbmesser CM und EN schneiden einander in S unter dem Winkel ESM $= \gamma + \varepsilon = \eta + \beta$, und wenn man durch M und N für die Kreisbogen BAD, BGD ein paar Tangenten ziehet, so schneiden diese einander unter dem Winkel MTN, und es ist auch MTN = 180 − MSN = ESM $= \gamma + \varepsilon$. Man nehme an, daß sich der Strahl MP um M gegen ML zu drehe, und zwar so, daß sich γ nicht ändert, mithin M derselbe Punct bleibt; so drehet sich MΠ gegen MC zu, N rückt gegen G, und der Winkel CEN $= \varepsilon$ nimmt zugleich mit α und β ab. Bevor nun MP in die Lage ML kommt, muß MP in die mit AC parallele Lage gekommen seyn, in welchem Fall Π in den Brennpunct der Vorderfläche gerückt ist. Beym fernern Umdrehen der Linie MP um M fällt P auf der andern Seiten von A, wie in P′, wenn MP in die Lage Mμ gekommen ist. Alsdenn ist der Winkel MP′A, was vorhin MPA war, mit entgegen gesetzter Lage, also nun $\alpha = \gamma -$ AP′M. Fällt endlich MP mit ML zusammen, so verschwinden α und β, der Strahl geht durch die Vorderfläche des Glases ungebrochen durch,

und es wird $AP'M = \gamma$, welches auch die Glei chung $\gamma - AP'M = \alpha = 0$ anzeigt.

Es drehe sich ferner der einfallende Strahl um M noch weiter über ML weg gegen MQ, so wird α negativ, und weil auch β negativ wird, so ist nun $\varepsilon = \eta - \beta - \gamma$, und ε verschwindet, wenn $\eta - \beta = \gamma$ ist: alsdenn läuft der zum ersten mahl gebrochene Strahl auf G zu, und N fällt in G: beyde Halbmesser CM, EN, so wie die Tangenten durch M und N schneiden einander nun unter dem Winkel $MTN = \gamma$. Wächst $-\alpha$ noch weiter, so rückt N über G hinaus, ε wird negativ, und man hat $MTN = \gamma - \varepsilon$; bis endlich, wenn nun auf der negativen Seite $\varepsilon = \gamma$ wird, MTN verschwindet, und beyde Tangenten parallel werden. Es sey also $CEN' = \gamma$, so werden, wie auch aus Betrachtung der Figur von selbst erhellet, die Tangenten durch M und N' parallel seyn. Erfolgt dies nun, wenn $\alpha = LMQ$ ist, so wird der in N' zum zweyten mahl gebrochene Strahl, nachdem er aus dem Glase wieder in die Luft gegangen ist, mit dem einfallenden QM parallel seyn. (117. §.) Wenn man sich nemlich durch M und N' ein paar Ebenen vorstellt, welche die Glaslinse berühren; so ist es für diesen besondern Fall einerley, ob der ganze Raum zwischen den parallelen Ebenen mit Glase angefüllt ist, oder nur der linsenförmige Raum. 58 F.

168. §.

Die Lage des einfallenden Strahls *MQ* zu finden, welche erfordert wird, damit der zum zweyten mahl gebrochene Strahl mit dem einfallenden parallel sey. 57 58 F.

Aufl. 1) Vermöge der allgemeinen Formuln des 166. §. ist allemahl $\varepsilon = \eta + \beta - \gamma$; und wenn man, wie im 162. § $G\Pi = \Delta$, $AG = c$ setzt, so ist $\sin\eta = \frac{(\Delta + \varrho)\sin(\gamma - \beta)}{\varrho}$, so wie

58 F. $\Delta = C\Pi + r - c = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)} + r - c$. In diesem besondern Fall hat $M\Pi$ die Lage $M\pi$, und man sucht eigentlich den Werth $\Delta = G\pi$: in eben diesem besondern Fall aber ist $\beta = -\eta$, also vermöge der ersten Gleichung $\varepsilon = \gamma$, wie erfordert wird. Man setze also auch in der zweyten und dritten Gleichung $\beta = -\eta$, so hat man aus der zweyten $\frac{\varrho\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \Delta + \varrho$, und aus der dritten $\Delta = r - \frac{r\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} - c$. Dieser Werth in der zweyten Gleichung gebraucht giebt $\frac{\varrho\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = r - \frac{r\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} - c + \varrho$, und daraus erhält man $\frac{(r + \varrho)\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = r + \varrho - c$, mithin

$$\frac{\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{\tan\eta}{\cos\gamma \,.\, \tan\eta + \sin\gamma} = \frac{r + \varrho - c}{r + \varrho},$$

oder $\cos\gamma + \cot\eta\sin\gamma = \frac{r + \varrho}{r + \varrho - c}$.

Das giebt $\cot\eta = \frac{r + \varrho - (r + \varrho - c)\cos\gamma}{(r + \varrho - c)\sin\gamma}$,

und

und $\tan\eta = \frac{(r + \varrho - c) \sin\gamma}{r + \varrho - (r + \varrho - c) \cos\gamma}$. Eben dieser Werth ist also $= \tan\beta$, und man kann von nun an, das Zeichen (—) vor β weglassen, weil man nur die Grösse dieses Winkels sucht, da dann ferner $\sin\alpha = \frac{m}{n} \sin\beta$ gefunden wird. Um aber eine Gleichung zwischen α und γ zu erhalten, nehme man die Gleichung $\sin\beta = \frac{n}{m} \sin\alpha$, woraus $\cos\beta = \frac{\sqrt{(m^2 - n^2 \sin\alpha^2)}}{m}$, und $\tan\beta = \frac{n \sin\alpha}{\sqrt{(m^2 - n^2 \sin\alpha^2)}}$ gefunden wird. Diesemnach erhält man $\frac{n \sin\alpha}{\sqrt{(m^2 - n^2 \sin\alpha^2)}} = \frac{(r + \varrho - c) \sin\gamma}{r + \varrho - (r + \varrho - c) \cos\gamma}$. Um abzukürzen, setze man den Ausdruck hinter dem Gleichheitszeichen $= G$, so ist $n^2 \sin\alpha^2 = m^2 G^2 - n^2 G^2 \sin\alpha^2$, und man findet $\sin\alpha^2 = \frac{m^2 G^2}{n^2 (1 + G^2)}$. Man setze $\frac{r + \varrho}{r + \varrho - c} = \lambda$, so ist $G^2 = \frac{\sin\gamma^2}{\lambda^2 - 2\lambda \cos\gamma + \cos\gamma^2}$, und $1 + G^2 = \frac{\lambda^2 - 2\lambda \cos\gamma + 1}{\lambda^2 2\lambda \cos\gamma + \cos\gamma^2}$, mithin $\sin\alpha =$

 $m \sin\gamma$

$\frac{m \sin\gamma}{n \sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda \cos\gamma + 1)}}$. Weil $\lambda > 1$ ist, so ist $\lambda^2 + 1 > 2\lambda$. Denn es sey $\lambda = 1 + \omega$, so ist $\lambda^2 + 1 = 2 + 2\omega + \omega^2$, und $2\lambda = 2 + 2\omega$: mithin ist $\sin\alpha$ allemahl möglich.

2) Setzt man den Werth $\frac{\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{r + \varrho - c}{r + \varrho}$ in die Gleichung $\Delta = r - c - \frac{r \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)}$, so erhält man $\Delta = r - c - \frac{r(r + \varrho - c)}{r + \varrho} = \frac{(r - c)(r + \varrho) - r(r + \varrho - c)}{r + \varrho}$, d. i. $\Delta = -\frac{c\varrho}{r + \varrho}$. Das Zeichen (—) zeigt die Lage an, daß $G\pi = \Delta$ negativ sey, oder π auf der Seite von G liege, wo A liegt. Wenn also die Grösse der Linie $G\pi$ allein in Betrachtung kommt, so hat man $G\pi = \frac{c \cdot r}{r + \varrho}$, woraus auch $A\pi = c - G\pi = \frac{c \cdot r}{r + \varrho}$ gefunden wird. Ferner hat man $C\pi = r - c + G\pi = r - c + \frac{c\varrho}{r + \varrho} = \frac{r(r + \varrho) - cr}{r + \varrho}$, oder $C\pi = \frac{r(r + \varrho - c)}{r + \varrho}$, und jede dieser drey Gleichungen bestimmt den Punct π, worin der zum ersten mahl gebrochene Strahl die Axe schneiden muß, damit der zum zwey=

zweyten mahl gebrochene mit dem einfallenden Strahl parallel sey.

3) Weil der Werth $G\pi = \frac{c\varrho}{r+\varrho}$ von γ nicht abhängt, so müssen alle Strahlen, die in der Linse so gebrochen werden, daß sie hinter derselben in die mit dem einfallenden Strahl parallele Lage kommen, nach der ersten Brechung durch einerley Punct π laufen. Und weil für jeden Winkel γ ein möglicher Werth für β und α gefunden wird, so kann auf jeden Punct M der Linse ein Strahl so fallen, wie diese Voraussetzung erfordert.

4) Wäre statt der Linse eine völlige Kugel gegeben, so hätte man $r = \varrho$, $c = 2r$, mithin $\tang\beta = 0$, also $\beta = 0$, $\alpha = 0$, und $G\pi = r$, wie der Natur der Kugel gemäß ist, weil jeder Strahl, der so auffällt, daß seine Richtung durch den Mittelpunct geht, ungebrochen durchdringt.

5) Der einfallende Strahl QM schneidet die Axe der Linse in P′ und es ist hier AP′, was im 162. §. das dortige δ war. Man hat aber auch im Dreyeck CP′M die Seite $CP' = \frac{r \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$, wodurch die Lage des einfallenden Strahls bestimmt wird, weil derselbe durch P′ gehen muß. Nachdem α aus γ gefunden ist, kann demnach auch CP′ gefunden werden.

169. §.

Von einem Punct *Q* ausserhalb der Axe *CE* der Linse fällt ein Strahl *QM* auf dieselbe: man sucht, was *QM* für eine Lage 59 F.

 haben

haben muß, damit die Lage des Strahls nach der zweyten Brechung mit der Lage des auffallenden Strahls parallel sey.

Aufl. 1) Man ziehe QC nach den Mittelpunct C der Vorderfläche der Linse, und QP sey auf ihrer Axe senkrecht. Der Strahl QM schneide die Axe in O und werde zum ersten mahl in die Lage $M\pi$ gebrochen, so ist $CMO = \alpha$, $CM\pi = \beta$, $ACM = \gamma$, $AOM = \alpha + \gamma$, und CO ist, was am Ende des vor. §. CP′ war. Weiter sey $CP = a$, $PQ = b$, $CO = y$, so ist $b = (a - y)\,\text{tang}\,(\alpha + \gamma)$.

Es war aber $y = \dfrac{r \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$, 168. §. n. 5.)

also erhält man $\left(a - \dfrac{r \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}\right) .\ \text{tang}\,(\alpha + \gamma) = b$, oder $a \sin(\alpha + \gamma) - r \sin\alpha = b \cos(\alpha + \gamma)$. Das giebt ferner $a \sin\alpha \cos\gamma + a \cos\alpha \sin\gamma - r \sin\alpha = b \cos\alpha \cos\gamma - b \sin\alpha \sin\gamma$, oder $a \cos\gamma\,\text{tang}\,\alpha + a \sin\gamma - r\,\text{tang}\,\alpha = b \cos\gamma - b \sin\gamma\,\text{tang}\,\alpha$, mithin $\text{tang}\,\alpha =$

$$\frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r},\ \sec\alpha =$$

$$\frac{\sqrt{(a \cos\gamma + b \sin\gamma - r)^2 + (b \cos\gamma - a \sin\gamma)^2}}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r\,(a \cos\gamma + b \sin\gamma))}}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r},$$

folglich $\sin\alpha = \dfrac{\text{tang}\,\alpha}{\sec\alpha} =$

$$\frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r\,(a \cos\gamma + b \sin\gamma))}}.$$

Wenn

Wenn nun der auffallende Strahl die verlangte Lage haben soll, so muß er nach der ersten Brechung die Axe in einem Punct π schneiden, dessen Stelle vermittelst der Gleichung $C\pi = \frac{r(r+\varrho-c)}{r+\varrho}$ gegeben ist, und das wird erfolgen, wenn $\sin\alpha = \frac{m \sin\gamma}{n\sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda \cos\gamma + 1)}}$ ist, vermöge des 168 §. n. 1. 2. woselbst $\lambda = \frac{r+\varrho}{r+\varrho-c}$ war. Wenn also $C\pi = h$ gesetzt wird, so hat man $h = r:\lambda$, und $\lambda h = r$. Man multiplicire den Zähler und Nenner des Bruchs, welcher $\sin\alpha$ ausdrückte mit h und nehme $\mu = \frac{m}{n}$ an, so hat man $\sin\alpha = \frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}}$, und dieser Werth dem vorigen gleich gesetzt, giebt für den Winkel γ die Gleichung

$$\frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}} = \frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(a \cos\gamma + b \sin\gamma))}}.$$

Um noch mehr abzukürzen, setze man $a^2 + b^2 + r^2 = p^2$, und $r^2 + h^2 = q^2$, so findet man

$$\frac{\mu^2 h^2 \tang\gamma^2}{q^2 \sec\gamma - 2rh} = \frac{(b - a \tang\gamma)^2}{p^2 \sec\gamma - 2r(a + b \operatorname{tg}\gamma)},$$

also $\mu^2 h^2 p^2 \operatorname{tg}\gamma^2 \sec\gamma - 2\mu^2 h^2 r (a + b \operatorname{tg}\gamma) \operatorname{tg}\gamma^2 = q^2 (a \operatorname{tg}\gamma - b)^2 \sec\gamma - 2rh (a \operatorname{tg}\gamma - b)^2$, und $(\mu^2 h^2 p^2 \operatorname{tg}\gamma^2 - q^2 (a \operatorname{tg}\gamma - b)^2) \sec\gamma = 2hr (\mu^2 h (a + b \operatorname{tg}\gamma) \operatorname{tg}\gamma^2 - a \operatorname{tg}\gamma - b)^2)$, oder

oder $(\mu^2h^2p^2-a^2q^2)\mathrm{tg}\gamma^2+2abq^2\mathrm{tg}\gamma-b^2q^2)\sec\gamma$ $=2hr(\mu^2hb\mathrm{tg}\gamma^3+(\mu^2ha-a^2)\mathrm{tg}\gamma^2+2ab\mathrm{tg}\gamma-b^2)$. Man setze $\mu^2\,h^2\,p^2-a^2\,q^2=A^4$, und $a-\mu^2\,h=f$, so hat man $(A^4\,\mathrm{tg}\gamma^2+2\,a\,b\,q^2\,\mathrm{tg}\gamma-b^2\,q^2)\sec\gamma=2\,hr\,(\mu^2\,hb\,\mathrm{tg}\gamma^3-af\,\mathrm{tg}\gamma^2+2\,ab\,\mathrm{tg}\gamma-b^2)$; ferner quadrire man auf beyden Seiten und ordne alles nach den Potenzen von $\mathrm{tg}\gamma$, so wird folgende Gleichung gefunden.

$$\left.\begin{matrix} A^8 \\ -4\mu^4b^2h^4r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma^6 \left.\begin{matrix} +4A^4\,ab\,q^2 \\ +8\mu^2abfh^3r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma^5$$

$$\left.\begin{matrix} +4a^2\,b^2\,q^4 \\ -2A^4\,b^2\,q^2 \\ +A^8 \\ -4a^2\,f^2\,h^2\,r^2 \\ -16\mu^2ab^2h^3r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma^4 \left.\begin{matrix} -4ab^3\,q^4 \\ +4A^4\,abq^2 \\ +16a^2\,bfh^2\,r^2 \\ +8\mu^2\,b^3\,h^3\,r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma^3$$

$$\left.\begin{matrix} +b^4\,q^4 \\ +4a^2\,b^2\,q^4 \\ -2A^4\,b^2\,q^2 \\ -16a^2\,b^2h^2\,r^2 \\ -8\,ab^2\,fh^2\,r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma^2 \left.\begin{matrix} -4ab^3\,q^4 \\ +16ab^3\,h^2\,r^2 \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\gamma$$

$$\left.\begin{matrix} +b^4\,q^4 \\ -4b^4\,h^2\,r^2 \end{matrix}\right\}=0.$$

Es lassen sich keine allgemeine Formuln für die sechs Wurzeln dieser Gleichung finden, mithin läßt sich auch die Auflösung der vorgelegten Aufgabe, so wie sie bisher in der grösten Allgemeinheit betrachtet ist, nicht weiter treiben. Wenn übrigens der Winkel γ gefunden ist, so hat man auch $CO=y=\dfrac{r\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$. Es ist nemlich

sinα

$\sin\alpha = \dfrac{\mu h \sin\gamma}{\surd\,(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma)}$, also $\cos\alpha =$
$\dfrac{\surd\,(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}{\surd\,(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma)}$,
und man findet $\sin(\alpha + \gamma) =$
$\dfrac{\mu h \sin\gamma\cos\gamma + \sin\gamma\surd\,(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}{\surd\,(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma)}$.
Demnach erhält man ferner $y =$
$\dfrac{\mu h r}{\mu h\cos\gamma + \surd\,(r^2 + h^2 - 2hr\cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}$.

170. §.

In dem besondern Fall, wenn das Glaß eine ganze Kugel ist, hat man $h = 0$, $q^2 = r^2$, $f = a$, also $\Lambda^4 = -a^2 r^2$, und die Gleichung verwandelt sich in folgende

$$a^4 r^4 . \mathrm{tg}\gamma^6 + 4a^3 br^4 . \mathrm{tg}\gamma^5 + \left.\begin{matrix} 4a^2 b^2 r^4 \\ + 2a^2 b^2 r^4 \\ + a^4 r^4 \end{matrix}\right\} . \mathrm{tg}\gamma^4$$

$$\left.\begin{matrix} -4ab^3 r^4 \\ -4a^3 br^4 \end{matrix}\right\} . \mathrm{tg}\gamma^3 \quad \left.\begin{matrix} + b^4 r^4 \\ + 4a^2 b^2 r^4 \\ + 2a^2 b^2 r^4 \end{matrix}\right\} . \mathrm{tg}\gamma^2$$

$-4ab^3 r^4 . \mathrm{tg}\gamma + b^4 r^4 = 0$, oder
$a^4 \mathrm{tg}\gamma^6 - 4a^3 b . \mathrm{tg}\gamma^5 + a^2 (a^2 + 6b^2)\, \mathrm{tg}\gamma^4$
$-4ab(a^2 + b^2) . \mathrm{tg}\gamma^3 + b^2 (b^2 + 6a^2)\, \mathrm{tg}\gamma^2$
$-4ab^3 . \mathrm{tg}\gamma + b^4 = 0$.

Diese Gleichung läßt sich auch so ausdrücken $(a^2 \mathrm{tg}\gamma^2 - 2ab\, \mathrm{tg}\gamma + b^2)^2 (\mathrm{tg}\gamma^2 + 1) = 0$, oder $(a\, \mathrm{tg}\gamma - b)^4 (\mathrm{tg}\gamma^2 + 1) = 0$, und so ergiebt sich gleich, daß entweder $a\, \mathrm{tg}\gamma - b = 0$, oder $tg\gamma^2 + 1 = 0$ seyn müsse. Letzteres ist unmöglich, also kann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Glas eine ganze Kugel ist, nur alsdenn ein Genüge geschehen, wenn $\tan g\gamma = \frac{b}{a}$ ist. Das heist, wenn QM mit QC zusammen fällt, und der Strahl QM durch der Kugel Mittelpunct gehet. Alsdenn geht, wie schon bekannt ist, der Strahl ungebrochen durch, und keiner von den übrigen aus Q einfallenden Strahlen kann so gebrochen werden, daß er nach der zweyten Brechung mit der ersten Lage parallel in die Luft fährt. Vier von den Wurzeln der Gleichung werden in diesem Fall gleich groß, jede $= \frac{b}{a}$, die beyden übrigen aber sind unmöglich.

171. §.

59 Ob nun gleich die gefundene allgemeine Glei-
60 F. chung allemahl sechs Wurzeln hat; so sind sie doch nicht allemahl insgesammt möglich, wie davon der eben angeführte besondre Fall eine Probe giebt. Selbst unter den möglichen Wurzeln muß noch eine jede geprüft werden, ob sie für $\sin\alpha$ einerley giebt, man mag diese Wurzel in der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(a \cos\gamma + b \sin\gamma))}},$$

$$= \frac{b - a \tan g\gamma}{\sqrt{(p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b\, tg\gamma) \sec\gamma)}},$$ oder in

der Gleichung $\sin\alpha = \frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}}$

=

$$= \frac{\mu h \tan\gamma}{\sqrt{(q^2 \sec\gamma^2 - 2rh \sec\gamma)}}$$ statt $\tan\gamma$ setzen.

Soll der Strahl, wie vorausgesetzt wird, aus Q auf das Glas fallen, so kann sich der Strahl QMF = CMS nur nach dem Gesetz mit γ ändern, welches die Gleichung $\sin CMS =$

$$\frac{b - a \tan\gamma}{\sqrt{(p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b \operatorname{tg}\gamma) \sec\gamma}}$$ ausdrückt.

Ich will nun um mehrerer Deutlichkeit willen diesen Winkel $= \zeta$ setzen, den Winkel aber, unter welchem der Strahl QM einfallen muß, damit derselbe nach der ersten Brechung durch π gehe, wie bisher $= \alpha$; so ist $\sin\alpha =$

$$\frac{\mu h \tan\gamma}{\sqrt{(q^2 \sec\gamma^2 - 2rh \sec\gamma)}},\ \sin\zeta =$$

$$\frac{b - a \tan\gamma}{\sqrt{p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b \operatorname{tg}\gamma) \sec\gamma}},$$ und die Aufgabe verlangt, daß $\zeta = \alpha$ seyn soll. Statt der Winkel werden ihre trigonometrischen Linien in Rechnung gebracht, und um die Wurzelzeichen wegzuschaffen, quadrirt man auf beyden Seiten; dadurch gewinnt die Gleichung selbst einen grössern Umfang als die vorgelegte Frage, und sie bestimmt denjenigen Werth, der statt γ gesetzt werden muß, damit $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werde. Weil nun $\sin\zeta^2$ positiv bleibt, wenn gleich $\sin\zeta$ negativ ist, so muß die Gleichung zugleich die Werthe von $\tan\gamma$ angeben, welche erfordert werden, wenn $(-\sin\zeta)^2 = \sin\alpha^2$ seyn soll. Hierin liegt nun schon ein Grund von der Mannigfaltigkeit der Wurzeln; wozu noch kommt, daß zum zweyten mahl quadrirt werden

werden muste, um $\sec\gamma$ durch $\operatorname{tang}\gamma$ rational auszudrücken. Diesemnach muß die Gleichung alle Werthe angeben, welche statt γ gesetzt werden können, damit die Winkel ζ und α gleiche Sinus und Cosinus erhalten, diese Sinus und Cosinus mögen übrigens der Lage nach verschieden seyn, oder nicht. Folgende Betrachtung der Figur wird es ins Licht setzen, warum die Anzahl der Wurzeln auf sechs steigen kann.

172. §.

60 F. 1) Zuerst betrachte man den Winkel $\zeta = QMF = CMS$, so erhellet, daß derselbe $= QAP$ sey, wenn $\gamma = ACM = 0$ genommen wird. Die Gleichung giebt alsdenn $\sin\zeta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2ar)}} = \frac{b}{\sqrt{(b^2 + (a-r)^2}}$, wie erfordert wird. Wächst γ, so nimmt ζ ab, und verschwindet, wenn $\gamma = ACQ$ oder $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b}{a}$ ist. Wird γ noch grösser, so wird ζ negativ, und erhält in Absicht des Einfallsloths die entgegen gesetzte Lage. Weil es aber hier nur auf die Grösse des Winkels oder vielmehr seines Sinus ankommt, ohne daß die Lage etwas ändert, so erwäge man, daß der Winkel ζ und mit ihm sein Sinus so lange wachse bis CM durch CN nach CG gerückt ist, und der auffallende Strahl QG den Kreis berührt, da dann $\zeta = CGQ = 90°$ und $\sin\zeta = 1$ ist.

Bevor

Bevor man die fernern Aenderungen in Erwägung ziehet, die mit ζ vorgehen, wenn γ noch weiter wächst, kehre man zuforderst zur Betrachtung des Winkels α zurück, der die Eigenschaft haben muß, daß sein Sinus $= \mu \sin CM\pi$ ist. Hiebey hat man zu bemerken, daß $C\pi$ eine durch die Gestalt der Linse bestimmte Linie, und $\mu = \frac{m}{n}$ eine gegebene Zahl ist, daß mithin μ und $C\pi = h$ sich nicht mit γ ändern. Demnach ändert sich $\sin\alpha$ allemahl in einerley Verhältniß mit $\sin CM\pi = \sin\beta$. Man ziehe also $M\pi$, und nehme CMR so groß an, daß $\sin CMR = \mu \sin CM\pi$ sey, so ist $CMR = \alpha$, so wie nun $CM\pi$ durch β verstanden wird. Nun erhellet, daß β also auch α mit γ verschwinde, und daß jene beyden Winkel β und α mit γ anfangs zugleich wachsen. Es ist aber $\sin\beta = \frac{h \sin(\beta + \gamma)}{r}$, mithin kann $\sin\beta$ nur so lange wachsen, bis $\beta + \gamma = 90°$, oder $\beta = 90° - \gamma$ ist. Alsdenn hat man $\sin\beta = \frac{h}{r}$, und weil $C\pi M = 180° - (\beta + \gamma)$ ist, so wird nun $C\pi M = 90°$; auch ist $\cos\gamma = \sin\beta = \frac{h}{r}$. Man setze πK auf $C\pi$ senkrecht, so erhellet, daß M nach K gerückt seyn müsse, wenn $\beta = CM\pi$ am grösten ist, daß mithin $CK\pi$ der gröste Werth des Winkels β sey. Wie nun in eben diesem Fall $\sin\gamma = \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$ ist, so erhellet, daß β und α, so

wie

wie ihre Sinus wieder abnehmen, wenn $\sin\gamma >$ $\frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$ wird.

2) Vergleicht man diese Aenderungen des Winkels α mit den Aenderungen des Winkels ζ so erhellet nun soviel, daß ζ zweymahl $= \alpha$ werden müsse, indem γ von o bis zur Grenze ACG wächst. Indem nemlich der Punct M von A bis m rückt, nimmt α zu von o bis zur Grösse Cmr, und ζ war anfangs $=$ QAP, nimmt aber bis auf o ab, wenn M nach m rückt, also muß es einen Winkel γ zwischen o und ACm geben, dem gleiche Werthe von ζ und α zugehören. Indem M nach m rückt, drehet sich MS bis in MC, und MR drehet sich gegen MS zu, also muß es einen Fall geben, wo MS mit MR zusammen fällt. Gesetzt, dies trage sich zu, wenn M bis μ gerückt ist, so ist tg. $AC\mu$ eine Wurzel der Gleichung im 169. §. Zugleich ist dies eine Wurzel, welche die Aufgabe, so wie sie dort vorgetragen ist, auflöset, weil $Q\mu$ ein Strahl ist, der aus Q auf die Linse fällt. Drehet sich CM weiter gegen CG in die Lage CN, so ist CNs der Winkel ζ; ob nun gleich derselbe in Absicht des vorigen negativ ist, so kommt es hier doch nur auf die Grösse nicht auf die Lage seines Sinus an. Deswegen ist nur zu bemerken, daß ζ von 0° bis 90° wachse, wenn sich CM von der Lage Cm bis in die Lage CG drehet. Zugleich wächst $Cmr = \alpha$, und zwar so lange, bis πm sich in die Lage πK gedrehet hat, die auf $C\pi$ senkrecht ist, und alsdenn hat man $\sin\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{r} = \sin$ CKT. Die-

ser Ausdruck kann nicht grösser als 1 werden, mithin muß h nicht grösser als $\frac{n}{m}\, r$ seyn, wenn α diese Gränze erreichen soll. Dies also vorausgesetzt, wird es möglich seyn, daß ζ aufs neue $= \alpha$, werde, bevor noch $\gamma =$ ACK wird, oder Cm in die Lage CK kommt. Es ist nemlich sin ACK $= \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$, und sin CKT $= \frac{mh}{nr}$: nachdem also $\frac{m^2\, h^2}{n^2\, r^2} > = < 1 - \frac{h^2}{r^2}$ ist, oder

$$\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right) \frac{h^2}{r^2} > = < 1, \text{ oder auch } h^2$$

$> = < \frac{n^2}{m^2 + n^2} \cdot r^2$, nachdem ist sin CKT $> = <$ sin ACK. In der 60. Figur ist angenommen, daß $PQ = b < \pi K$ sey, wenn also QW durch K gezogen wird, so ist CKW für diese Stelle $= \zeta$, und zugleich CKW $>$ ACK. Ist also $h =$ oder $< \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \cdot r$, so ist CKW $>$ CKT, mithin nun schon $\zeta > \alpha$, und es muß vorher $\zeta = \alpha$ gewesen seyn. Wofern dies erfolgt, wenn Cm in die Lage CN gekommen ist; so ist tang ACN die zweyte Wurzel der Gleichung des 169. §. aber diese Wurzel ist nicht eigentlich die gesuchte, weil der in der Richtung $N\varrho$ auffallende Strahl nicht von dem gegebenen Punct Q auffallen kann. Für die Strahlen welche von Q auf die Linse fallen können, muß der Winkel α eine Lage haben,

haben, die der Lage des Winkels $CN\varrho$ wie CNs entgegen gesetzt ist.

3) Die Aenderungen, welche mit ζ vorgehen, wenn γ Aenderungen leidet, hängen ausser dem Halbmesser r des Kreises von den Linien $CP = a$, und $PQ = b$ ab, weil $\sin\zeta =$

$$\frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(b \sin\gamma + a \cos\gamma))}}$$ war.

Um also zu finden, wie groß γ seyn muß, damit $\zeta = 90°$ werde, setze man $\sin\zeta = 1$, so wird erfordert, daß $a^2 + b^2 + r^2 - 2r(b \sin\gamma + a \cos\gamma) = (b \cos\gamma - a \sin\gamma)^2$ sey. Man setze $ACQ = \omega$, also $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\omega$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \sin\omega$;

$\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \cos\omega$; überdem sey ε der scheinbare Halbmesser des Kreises oder der Kugel aus Q gesehen: so ist $\frac{r}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon =$

$\frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - r^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, und man erhält $1 + \sin\varepsilon^2 - 2\sin\varepsilon(\sin\omega \sin\gamma + \cos\omega \cos\gamma) = (\sin\omega \cos\gamma - \cos\omega \sin\gamma)^2$, oder $1 + \sin\varepsilon^2 - 2\sin\varepsilon \cos(\gamma - \omega) = \sin(\gamma - \omega)^2 = 1 - \cos(\gamma - \omega)^2$, mithin $\cos(\gamma - \omega)^2 - 2\sin\varepsilon \cos(\gamma - \omega) + \sin\varepsilon^2 = 0$, das giebt $\cos(\gamma - \omega) = \sin\varepsilon$, also $90° - \gamma + \omega = \varepsilon$, oder $\gamma = \omega + 90° - \varepsilon$, wie auch aus Betrachtung der Figur sogleich erhellet. Man erhält also $\sin\gamma = \cos(\varepsilon - \omega) = \cos\varepsilon \cos\omega + \sin\varepsilon \sin\omega$

$$= \frac{a\sqrt{(a^2 + b^2 - r^2)} + rb}{a^2 + b^2} = \sin ACG,$$ und

oben

oben war $\sin ACK = \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$: je grösser also r in Vergleichung mit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ und in Vergleichung mit h ist, desto kleiner ist ACG, aber ACK desto grösser, welches ebenfals aus Betrachtung der Figur klar ist. Demnach kann ACG kleiner als ACK seyn, so daß G zwischen m und K fällt, und alsdenn wird $\zeta = 90°$, bevor noch α den grösten Werth CKT erreicht hat.

4) Gesetzt G fiele in g, wie wenn der Strahl aus q auffiele; so ist $\zeta = 90°$, wenn Cm bis Cg gerückt ist, aber noch ist alsdenn α nicht am grösten. Rückt also Cg weiter gegen CK, so nimmt ζ schon wieder ab, aber α wächst noch, mithin könnten wohl beyde Werthe von ζ und α von neuen so zusammen treffen, daß $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ würde, und alsdenn würde der dazu gehörige Werth γ die dritte Wurzel der Gleichung des 169. §. geben, wiewohl diese Wurzel eben so wenig, wie die zweyte, die Aufgabe des 169. §. eigentlich auflößt, weil ζ und α einander noch entgegen gesetzt sind. Erfolgt dies würklich, und zwar noch vorher, ehe γ bis zu dem grösten Werth ACK gewachsen ist, so muß zum vierten mahl $\sin\alpha = \sin\zeta$ werden, bevor $\gamma = 180°$ wird. Wenn nemlich $\gamma >$ ACG wird, so wird zwar ζ stumpf, wie z. E. $\zeta =$ QDO für den Werth $\gamma =$ ACD: weil es aber bey dieser Untersuchung nur auf den Sinus des Winkels ζ ankommt, so kann man CDQ als die Ergänzung des Winkels QDO zu 180° dafür annehmen, weil beyde einerley Sinus haben. Für $\gamma = 180° =$ ACB verschwindet α, wenn M oder N den Halb-

kreis beschrieben hat und in B fällt, aber ζ verschwindet noch nicht, sondern hat von 90° bis zum Winkel CBQ abgenommen, indem CG den Winkel GCB beschrieben hat. Gab es nun eine Stelle zwischen g und K, wo $\alpha = \zeta$ war, so muß gleich nach dieser Stelle $\alpha > \zeta$ werden, weil α noch wachsend und ζ schon abnehmend einander gleich wurden, für den Werth $\gamma =$ ACK ist also nun $\alpha > \zeta$ und für den Werth $\gamma = 180$, schon $\alpha = 0$, aber noch $\zeta =$ CBQ, obgleich ζ mit α zugleich abgenommen hat, indem CK den Winkel KCB beschrieben hat: mithin muß es zwischen K und B eine Stelle geben, wo zum vierten mahl $\sin\alpha = \sin\zeta$ wird, und für diese Stelle giebt der dazu gehörige Werth $\tan g\gamma$ die vierte Wurzel der Gleichung des 169. §., welche aber noch weniger als die zweyte und dritte die Aufgabe in dem Verstande, wie sie vorgetragen ist, aufzulösen dient, weil kein Strahl aus Q unter einem stumpfen Neigungswinkel auf die Glaßlinse fallen kann.

5) Für $\gamma = 180°$ war $\alpha = 0$ und $\zeta = 180°$ — CBQ, oder $\sin\alpha = 0$, $\sin\zeta = \sin$ CBQ. Man verlängere QC nach E, so erhellet, daß α von 0 bis zum Winkel CEX wachse, wenn CB nach CE rückt, aber ζ wächst zugleich bis zu 180° oder $\sin\zeta$ nimmt bis auf 0 ab: also giebt es zwischen B und E zum fünften mahl eine Stelle wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ wird, woraus die fünfte Wurzel der Gleichung des 169. §. entspringt, die aber eben so wenig, wie alle vorigen, die erste ausgenommen, zur eigentlichen Auflösung der Aufgabe dient. Beym fernern Fortrücken des Halbmessers aus der Lage CE nach CH, wachsen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ wieder

der beyde zugleich, $\sin\zeta$ wird $= 1$, wenn der Halbmesser in H anlangt, aber $\sin\alpha$ erreicht den ganzen Sinus nicht, mithin ist in der Stelle H $\sin\zeta^2 > \sin\alpha^2$, und in der Stelle E war $\sin\zeta^2 < \sin\alpha^2$: also müssen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ zwischen E und H zum sechsten mahl gleich groß werden, und daher muß die sechste Wurzel der Gleichung des 169. §. ihren Ursprung haben; wiewohl sie die Aufgabe, so wie sie vorgelegt ist, wiederum nicht auflößt; weil auf keine der Stellen zwischen E und H aus Q ein Strahl fallen kann.

6) So wie in der Figur die data angenommen sind, ist α schon wieder im Abnehmen, wenn $\sin\zeta^2 = 1^2$ wird, oder der Halbmesser in die Lage CH gekommen ist. Drehet sich CH weiter gegen CA so nehmen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ beyde ab, $\sin\alpha^2$ verschwindet früher, als $\sin\zeta^2$, und es giebt nun weiter keine Stelle mehr zwischen H und A, wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werden könnte. Uebrigens ist $AG = Am + mG$, $AH = mH - Am$, und $mG = mH$, also $AG - AH = 2Am$, so wie $AH = AG - 2Am$. Aber $AG = AK + KG = AL + KG$, mithin $AH = AL + KG - 2Am$. Wäre $AG < AK$, so wäre KG negativ, (wie wenn G in g fiele, wie im n. 4. angenommen ward) alsdenn ist allemahl $AH < AL$, und $\sin\zeta^2$ alsdenn allerst $= 1$, wenn $\sin\alpha^2$ schon wieder abnimmt: mithin kann es bey dieser Voraussetzung nicht mehr als sechs Fälle geben, die der Gleichung $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ genügen. Wäre dagegen $KG > 2Am$ und positiv, so wäre $AH > AL$. Nun würde es zwar in dem Bogen NGDB keine Stelle geben, wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werden könnte: fiele aber H etwa in h, so

würde $\sin\zeta^2$ abnehmen, und $\sin\alpha^2$ noch wachsen, wenn Ch gegen CL rückte, und das könnte nun zum fünftenmahl $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ geben, da dann derselbe Fall zum sechsten mahl eintreten müste, bevor Ch in die Lage CA fiele. Gesetzt aber, dies erfolgte auch würklich, wenn CH in die Lage Cn gekommen ist; so würde doch der auf n fallende Strahl, wenn er nach der ersten Brechung durch π gehen sollte, in der Lage nt einfallen müssen, und könnte mithin nicht aus Q kommen. Diesemnach löset unter allen sechs Fällen, welche die Wurzeln der Gleichung des 169. §. anzeigen, nur derjenige die vorgelegte Aufgabe eigentlich auf, wenn der Strahl aus Q auf μ fällt.

173. §.

Wenn ein strahlender Punct Licht auf eine Glaslinse wirft, so ist unter allen auffallenden Strahlen gewiß einer, der nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit der Lage parallel ist, worin er auffiel; dieser Strahl liegt in der Ebene durch den strahlenden Punct und die Axe der Linse: von den übrigen auf die Linse fallenden Strahlen aber, die in eben dieser Ebene liegen, kann keiner eben die Eigenschaft haben.

Beweis. Wenn der strahlende Punct in der Axe der Linse liegt, so erhellet die Richtigkeit des Satzes zwar für sich schon ohne alle Rechnung indessen leitet auch die Gleichung des 169. §. auf eben die Folge. In dem erwehnten Fall muß man $b = 0$ setzen, so verwandelt sich die dortige

Glei-

Gleichung in folgende;
$A^8 \operatorname{tg}\gamma^6 + (A^8 - 4a^2 f^2 h^2 r^2) \operatorname{tg}\gamma^4 = 0$;
mithin sind vier von den Wurzeln der Gleichung $= 0$, und man hat zugleich $A^4 = \mu^2 h^2 (a^2 + r^2) - a^2 (h^2 + r^2)$, so wie $f = a - \mu^2 h$. Die übrigen beyden Wurzeln giebt alsdenn die Gleichung

$$\operatorname{tang}\gamma = \pm \frac{\sqrt{(4a^2 f^2 h^2 r^2 - A^8}}{A^4},$$ und beyde

sind nur möglich, wennn $4a^2 f^2 h^2 r^2 > A^8$ ist. Gesetzt aber, daß auch beyde möglich sind, so erhellet doch leicht in Rücksicht auf die im vor. §. vorgetragenen Schlüsse, daß derjenige Werth von γ, welcher erfordert wird, wenn der einfallende Strahl die verlangte Eigenschaft haben soll, unter den vier verschwindenden Wurzeln begriffen sey.

Liegt der strahlende Punct ausser der Axe, so ist die Richtigkeit des Satzes ebenfals ausser Zweifel gesetzt, sobald nur erwiesen ist, daß die Wurzeln der Gleichung des 169. §. nie alle sechs zugleich unmöglich seyn können. Die Schlüsse des vorigen §. beweisen, daß unter den sechs Wurzeln nur diejenige den gesuchten Winkel γ bestimme, welche $\operatorname{tang}\gamma < \frac{b}{a}$ giebt. Aber eben diese Schlüsse beweisen auch, (ebendas. n. 2.) daß zwischen den Gränzen $\operatorname{tg}\gamma = 0$ und $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b}{a}$ nothwendig ein Winkel γ falle, dem gleiche Winkel ζ und α zugehören. Demnach ist eine solche Wurzel der Gleichung, welche $\operatorname{tang}\gamma < \frac{b}{a}$ giebt,

giebt, gewiß allemahl möglich, und unter den Strahlen welche von Q auf die Linse fallen, ist gewiß einer, der die verlangte Eigenschaft hat. Eben die Schlüsse des vor. §. beweisen übrigens, daß in der Ebene durch Q und die Axe der Linse nur ein Strahl liegen könne, der nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit derjenigen parallel ist, worin er einfiel: vorausgesetzt, daß der Strahl von Q ausgehen soll.

174. §.

61 F. Wenn der strahlende Punct Q so nahe bey der Axe CP der Linse liegt, daß seine scheinbare Entfernung PAQ von dieser Axe aus dem Pol A der Vorderfläche des Glases gesehen wenige Grade beträgt, so ist auch PCQ $= \omega$ sehr klein: mithin auch derjenige Winkel AC$m = \gamma$, welcher die Stelle bestimmt, wo der Strahl auffallen muß, wenn der aus dem Glase in die Luft fahrende Strahl dem einfallenden parallel seyn soll. Ueberdem ist AO$m = \alpha + \gamma <$ PAQ, also auch α ein kleiner Winkel, wenn es PAQ ist, folglich sind es β, und O$mn = \alpha - \beta$ ebenfals. Weil ferner wegen der parallelen Lage des einfallenden und ausfahrenden Strahls Enm = nmC $= \beta$, also knq = CmO $= \alpha$, mithin K$nq = \alpha - \beta$, gleichfals ein kleiner Winkel ist; so wird der Strahl Qmnq bey m und n nur so wenig gebrochen, daß man ihn beynahe für eine grade Linie nehmen kann, die durch π gehet. Ich werde ihn künftig den mittlern unter denjenigen Strahlen nennen, die von Q auf das Glas fallen können, und vermöge der vorgetragenen Gründe berechtiget seyn, anzunehmen,

men, daß dieser mittlere Strahl ungebrochen durchgehe, wenn der Winkel PAQ nur klein ist.

Weil für den mittlern Strahl $\gamma < \omega$ ist, so ist in eben diesem Fall auch γ sehr klein, also beynahe $\cos\gamma = 1$. Wenn demnach was in $\sin\gamma^2$ multiplicirt ist, weggelassen wird, so findet man am Ende des 169. §. $y = \dfrac{\mu h r}{\mu h + r - h} = CO$. Es ist aber $r - h = A\pi$, weil $h = C\pi$ war, also $h = r - A\pi$, und $y = \dfrac{\mu r (r - A\pi)}{\mu (r - A\pi) + A\pi}$. Ferner ist $AO = r - y$, also $AO = \dfrac{r \,.\, A\pi}{\mu (r - A\pi) + A\pi}$, oder $AO = \dfrac{r \,.\, A\pi}{\mu r - (\mu - 1) \,.\, A\pi}$, da dann $\mu = \dfrac{m}{n}$ ist, und $A\pi = \dfrac{cr}{r + \varrho}$: (168. §. n. 2.) Demnach ist

$$AO = \frac{n \,.\, cr^2}{mr (r + \varrho) - (m - n)\, cr}.$$

Der zum zweytenmahl gebrochene Strahl nq schneide die Axe der Linse in ω, so ist das Dreyeck $En\omega \backsim CmO$; also $Cm : CO = En : E\omega$, und $Cm : Cm - CO = En : En - E\omega$, (189. §. Geom. n. II.) oder $r : AO = \varrho : G\omega$. Das giebt $G\omega = \dfrac{\varrho \,.\, AO}{r} = \dfrac{n c r \varrho}{mr (r + \varrho) - (m - n)\, cr}$.

175. §.

Wenn *PQ* eine grade auf *CP* senkrechte Linie und der Winkel *PAQ* nur klein ist; so lau-

laufen alle Strahlen, die aus dem Punct Q nahe bey der Axe QC der Vorderfläche BAD auf die Linse fallen, nach der zweyten Brechung beynahe in einerley Vereinigungspunct q zusammen, der in dem mittlern Strahl $Q\pi$ beynahe eben soweit hinter der Linse liegt, als das Bild p des Puncts P in der Axe der Linse PC.

61 F. Beweis. Alle Strahlen, die von Q auf die Vorderfläche BAD fallen, laufen nach der ersten Brechung in einerley Vereinigungspunct K zusammen, der in der Axe QC liegt, und wenn man bemerkt, daß im 153. §. $g = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$ das sey, was hier AΠ ist; so hat man $A\Pi = \frac{\mu . AP . r}{(\mu - 1) . AP - r}$, und eben so auch $aK = \frac{\mu . aQ . r}{(\mu - 1) . aQ - r}$. Nun ist sehr nahe CQ = CP, wenn PAQ und PCQ sehr klein sind, also auch $AP = aQ$, mithin beynahe $aK = A\Pi$, und $CK = C\Pi$. Man ziehe KE, so werden CEK, CKE sehr kleine Winkel seyn, wenn ΠCK = PCQ sehr klein ist, und es ist beynahe EC + CK oder EΠ = EK, mithin auch beynahe $G\Pi = gK$. Weil nun alle Strahlen nach der ersten Brechung gegen den Punct K in der Axe EK der hintern Fläche BGD der Linse laufen, so haben sie nach der zweyten Brechung in CK einen Vereinigungspunct q. Was im 157. §. n. 2. $g = \frac{\mu \delta r}{(1 - \mu)\delta + r}$ war,

war, das ist hier Gp, wenn man ϱ statt r und $G\Pi$ statt δ schreibt: also $Gp = \frac{\mu . Gp . \varrho}{(1 - \mu) Gp + \varrho}$, und eben so $gq = \frac{\mu . gK . \varrho}{(1 - \mu) gK + r}$. Demnach ist beynahe $Gp = gq$ und $Ep = Eq$. Noch war vermöge der Voraussetzung qnk ein kleiner Winkel, also sind es auch nEq und Eqn, und es ist beynahe $En + nq = Eq = Eg + gq$, folglich beynahe $nq = gq = Gp$, oder auch $\pi q = \pi p$.

Ist das Glaß eine ganze Kugel, wie in der 80. Fig. so fallen die Mittelpuncte C und E in einerley Punct zusammen, der mittlere Strahl geht durch C oder E, und wird würklich gar nicht gebrochen. So lange nun CQ nicht sehr merklich grösser, als CP ist, so lange werden auch die aus Q nahe bey der Axe QC auffallenden Strahlen, in einem Vereinigungspunct q nach der zweyten Brechung zusammen laufen, der beynahe eben so weit hinter der Kugel liegt, als das Bild p des Puncts P, und es wird beynahe $Cq = Cp$ seyn, oder $Gp = gq$.

176. §.

Der Vereinigungspunct q aller aus Q auf die Linse fallenden Strahlen ist in eben dem Verstande ein Bild von Q, in welchem p ein Bild von P war. (163. §.) Wenn also PQ eine grade auf der Axe der Linse senkrechte Linie ist, so hat jeder Punct S von ihr sein Bild s hinter der Linse in dem mittlern Strahl $S\pi$, so daß πs beynahe $= \pi p$ ist, und die Bilder aller Puncte zwischen P und Q lie- 61 F.

gen in einem kleinen Kreisbogen *pq*, dessen Halbmesser *πp* ist. Eben dieser kleine Bogen *pq* wird von seiner Tangente nicht merklich verschieden seyn, und man kann auch *pq* als eine grade auf *πp* senkrechte Linie betrachten, die also ein Bild von PQ ist.

Es sey die Axe der Linse gegen die Mitte eines sichtbaren Objects QR gerichtet, so daß P den mittlern Punct desselben vorstellet, der scheinbare Halbmesser desselben aus der Mitte A des Glases gesehen, sey sehr klein; so werden alle Puncte des Objects, welche auf das Glas Strahlen werfen können, sehr nahe gleich weit von A, oder auch von dem Mittelpunct C der Vorderfläche, entfernt, mithin so zu betrachten seyn, als wenn sie alle in einerley auf der Axe PC senkrechten Ebene lägen. Jeder Punct wird also hinter dem Glase sein Bild haben, und diese Bilder werden in einem kleinen Stück *qr* einer Kugelfläche liegen, deren Mittelpunct *π* ist, das auch als eine kleine ebene Fläche betrachtet werden kann, welche auf der Axe der Linse senkrecht ist. Alle Bilder derjenigen Puncte des Objects zusammen genommen, welche auf die Linse Strahlen werfen können, machen das Bild des Objects selbst aus, mithin wird *qr* das Bild von QR seyn.

Fängt man das durch die Glaslinse fallende Licht in der Entfernung G*p* vom Glase mit einem weissen Papier oder einer andern weissen Ebene senkrecht auf; so zeigt sich auf derselben deswegen ein deutliches Bild des Objects, weil auf jeden Punct der weissen Fläche nur Licht von einem und demselben Punct des Gegenstandes fällt, nicht von mehrern. Entfernt man aber die weisse Fläche

weiter

weiter als um den Abstand Gp vom Glase, oder rückt man sie dem Glase näher, so schneidet sie alle Lichtkegel, deren Spitzen in qr liegen, das von jedem Punct des Objects kommende Licht ist über der Fläche eines solchen Kreises verbreitet, und weil alle diese Kreise einander schneiden, so fällt auf jeden Punct der weissen Fläche Licht von mehrern Puncten des Gegenstandes: deswegen ist nun das Bild undeutlich.

Die Betrachtung der Figur ergiebt von selbst, daß das deutliche Bild in Ansehung der Axe der Linse eine umgekehrte Lage erhalte. Der Punct q, welcher Q abbildet, liegt nicht mit Q auf einerley Seite der Axe der Linse, sondern auf der andern Seite gegen über. Was im Object selbst oben liegt, bildet sich unten ab, und was im Object zur Rechten liegt, bildet sich zur Linken ab.

Daß und wie dies alles auch bey der ganzen Kugel seine Anwendung finde, ist aus der dem vor. §. schon beygefügten Anmerkung leicht abzunehmen. Liegen die Puncte R, P, S, Q, (80. Fig.) in einer Kugelfläche, die mit der gläsernen Kugel einerley Mittelpunct hat; so liegen ihre Bilder ebenfals in einer Kugelfläche, die mit der gläsernen Kugel concentrisch ist.

177. §.

Wenn die Dicke der Glaslinse in Vergleichung mit den Entfernungen des Objects und des Bildes von der Linse sehr klein auch die scheinbare Ausdehnung des Objects aus der Mitte des Glases gesehen nicht beträchtlich groß ist; so verhalten sich die Halbmes-

ser oder Durchmesser des Objects und des Bildes, beyde in der Ebene durch die Axe der Linse genommen, gegen einander, wie die Entfernungen des Objects und des Bildes von der Linse.

61 F. **Beweis.** Weil der Strahl nq mit Qm parallel ist, so ist das Dreyeck $OPQ \backsim \omega pq$, und man hat $AP + AO : G\omega + Gp = PQ : pq$. Es ist aber $AO = \frac{ncr^2}{mr(r+\varrho) - (m-n)cr} = \frac{nc}{m(1 + (\varrho : r) - (m-n)c : r}$, und $G\omega = \frac{ncr\varrho}{mr(r+\varrho) - (m-n)cr} = \frac{nc}{m(1 + r : \varrho) - (m-n)c : \varrho}$: wenn also c in Vergleichung mit r und ϱ sehr klein ist, so ist nicht allein AO sondern auch $G\omega$ noch kleiner als c, mithin ebenfals sehr klein, und man hat sehr nahe $AP : Gp = PQ : pq$. Aus eben dem Grunde hat man auch $AP : Gp = PR : pr$, folglich $PQ + PR : pq + pr = AP : Gp$, (191. §. G.) oder $QR : qr = AP : Gp$.

Ist das Glaß eine ganze Kugel, so hat man $r = \varrho$, und $c = 2r$, also $AO = r$, und $G\omega = r$, wie der Natur der Kugel gemäß ist. Demnach verhalten sich die Durchmesser des Objects und des Bildes wie ihre Entfernungen vom Mittelpunct der Kugel. (80. Fig.)

Wird der durch P auf der Axe AP senkrechte Schnitt des Objects $= E^2$ die Fläche des Bildes

=

$= \varepsilon^2$ gesetzt; so hat man $\frac{E^2}{OP^2} = \frac{\varepsilon^2}{\omega p^2}$, und beym Glase dessen Dicke sehr klein ist $\frac{E^2}{AP^2} = \frac{\varepsilon^2}{Gp^2}$, also die Fläche des Bildes $\varepsilon^2 = \frac{\omega p^2}{OP^2} . E^2$. Für die ganze Kugel (81. Fig.) hat man $\varepsilon^2 = \frac{Cp^2}{CP^2} . E^2$. Liegen die Puncte R, P, S, Q, in einer mit dem Glase concentrischen Kugelfläche, so ist RPQ ein zu dieser Kugelfläche gehöriger gröster Kreisbogen, und *rpq* stellt ebenfals einen Kreisbogen vor. Beyde Bogen sind einander ähnlich und verhalten sich wie ihre Halbmesser. Das ganze Bild des Objects ist nun ein Stück von einer mit dem Halbmesser ωp^2 beschriebenen Kugelfläche. Wenn also dieses nun ε^2 gesetzt wird, und das Stück einer mit dem Halbmesser OP zwischen den Gränzen des Pyramidenförmigen Raums QOR beschriebenen Kugelfläche $= E^2$, so ist wie vorhin $\varepsilon^2 = \frac{\omega p^2}{OP^2} . E^2$.

Der

Der XIV. Abschnitt.

Die verschiedenen Arten der linsenförmigen Gläser.

178. §.

Beym Glase ist das Verhältniß der Refraction für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit $= 31 : 20$, und wenn eben nicht die gröste Schärfe verlangt wird, so nimmt man es $= 3 : 2$ an. Demnach hat man in den Formuln des XIII. Abschnitts $m : n = 3 : 2$, und das giebt im 164. §. $\mu = \frac{m}{m - n} = 3$, $\nu = \frac{n}{m - n} = 2$: mithin die Brennweite eines auf beyden Seiten erhaben geschliffenen Glases $f = \frac{2\varrho(3r - c)}{3(r + \varrho) - c}$, und den Abstand des Bildes $x = \frac{2\varrho((3r - c)\delta + 2rc)}{(3(r + \varrho) - c)\delta - 2(3\varrho - c)r}$, oder $x = \frac{\varrho f((3r - c)\delta + 2rc)}{\varrho\delta(3r - c) - rf(3\varrho - c)}$. Für die Lage des aus Q auffallenden mittlern Strahls hat man (174. §.) $G\pi = \frac{c\varrho}{r + \varrho}$, oder $A\pi = \frac{cr}{r + \varrho}$, und $AO = \frac{2r \cdot A\pi}{3r - A\pi}$, oder $AO =$

$2r^2 c$

$\frac{2r^2 c}{3r(r+\varrho)-cr}$. Für die Lage des zum zweyten mahl gebrochenen Strahls ist $G\omega =$ $\frac{2cr\varrho}{3r(r+\varrho)-cr}$; und beyde Formuln lassen sich auch so ausdrücken $AO = \frac{2c}{3(1+\varrho:r)-c:r}$,

$G\omega = \frac{2c}{3(1+r:\varrho)-c:\varrho}$.

Gewöhnlich ist die Dicke des Glases c in Vergleichung mit beyden Halbmessern so klein, daß man sie in den Formuln für f und x als verschwindend betrachten kann, da dann $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$, und $x = \frac{2r\varrho\delta}{(r+\varrho)\delta - 2r\varrho}$, oder $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ gefunden wird. Allemahl bezeichnet r den Halbmesser der vordern gegen das Object gekehrten, und ϱ den Halbmesser der hintern Fläche. Ist also c sehr klein, so leidet die Brennweite, und der Abstand des Bildes bey einerley Entfernung des Objects, keine merkliche Aenderung, man mag welche Seite man will dem Object zu kehren. Sind beyde Halbmesser gleich groß, so ist $f = r$, und $x = \frac{\delta r}{\delta - r}$.

Für die ganze Kugel hat man $f = \frac{1}{2}r$ und $x = \frac{r(\delta + 4r)}{2\delta - r}$. (165. §.) oder $x = \frac{f(\delta + 4r)}{\delta - f}$.

179. §.

179. §.

Wenn die Strahlen, nachdem sie in der Vorderfläche die erste Brechung gelitten haben, in einerley durchsichtigen Masse blieben, so würden die-
61 F. jenigen, welche von einem Punct P der Axe kommen, und zunächst bey der Axe auffallen, in dem Vereinigungspunct Π zusammen laufen, und man hätte $A\Pi = \frac{mr\delta}{(m-n)\delta - nr}$. (153. §.) Dieser Ausdruck wächst mit r, wird unendlich groß, wenn $r = \frac{m-n}{n}\delta$ ist, und negativ, wenn r diesen Werth übertrift. Je grösser aber r wird, desto weniger krümmt sich die Kugelfläche BAD, und wenn r unendlich groß würde, so würde sich
62 F. BAD gar nicht mehr krümmen, sondern eine ebene Fläche werden. Alsdenn hat man $A\Pi = -\frac{m}{n}\delta$, welches mit dem 120. §. übereinstimmt. Die Linse verwandelt sich nun in ein Planconvex-Glaß, wie es die 62. Fig. vorstellt, der Strahl PM wird zum erstenmahl in die Lage MN gebrochen, so daß er rückwärts verlängert die Axe in Π schneidet: nach der zweyten Brechung in N aber läuft er auf den Punct p der Axe zu, und man hat $Gp = x = \frac{\nu\varrho(\mu\delta + \nu c)}{\mu\delta - \nu(\mu\varrho - c)}$, die Brennweite $f = \nu\varrho$, oder auch $x = \frac{\varrho f(\mu\delta + \nu c)}{\mu\varrho(\delta - f) + cf}$, (164. §.) und wenn man c weglassen kann $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

Wird

Wird also das Verhältniß der Refraction $= 3 : 2$ angenommen, so ist $f = 2\varrho$, und $x = \frac{2\varrho(3\delta + 2c)}{3\delta - 2(3\varrho - c)}$, oder die Dicke des Glases $= 0$ gesetzt, $x = \frac{2\varrho\delta}{\delta - 2\varrho}$.

180. §.

Es sey Q ein Punct ausserhalb der Axe des Plan-convex-Glases, so wird es unter den aus Q auffallenden Strahlen auch hier einen mittlern Strahl geben, der beynahe ungebrochen durchgehet. Wäre das Glaß auf beyden Seiten erhaben, so müste der Strahl nach der ersten Brechung durch einen Punct π der Axe durchgehen, den die Formul $G\pi = \frac{c\varrho}{r + \varrho}$ giebt, (178. §.) und dieser Werth verschwindet, wenn r unendlich groß wird, das heist, wenn sich die Vorderfläche in eine ebene Fläche verwandelt. Also hat man $G\pi = 0$, und π fällt mit G zusammen, oder der Strahl muß nach der ersten Brechung durch G gehen. Daß dies der Sache gemäß sey, erhellet daraus, weil sonst kein Element der gebogenen Hinterfläche mit der ebenen Vorderfläche parallel ist, das einzige in G ausgenommen, weswegen also der zum erstenmahl gebrochene Strahl in G die Hinterfläche treffen muß. Der auffallende Strahl Qm selbst muß durch einen Punct O der Axe laufen, der gefunden wird, wenn man $AO = \frac{2r \cdot A\pi}{3r - 2A\pi}$ nimmt, und $A\pi$ =

62 F. 61 F. 62 F.

$= \frac{cr}{r + \varrho}$, (178. §.) hier also $A\pi = c$, und AO $= \frac{2}{3}c$, weil r unendlich groß ist. Es bleibt nemlich allemahl die Voraussetzung zum Grunde, daß PQ in Vergleichung mit AP nur klein, mithin PAQ, also auch AOQ, welches hier der Neigungswinkel α ist, ein kleiner Winkel sey. Nun ergiebt die Betrachtung der Figur, daß hier AO : $A\pi$ = $\cot\alpha : \cot\beta$ seyn müsse, und weil für kleine Winkel die Cotangente und Cosecante beynahe gleich groß sind, so hat man beynahe AO : $A\pi$ = $\operatorname{cosec}\alpha : \operatorname{cosec}\beta$, oder AO : $A\pi = \sin\beta : \sin\alpha = n : m$,

folglich AO $= \frac{n}{m} c = \frac{2}{3}c$, weil hier $A\pi = c$ ist,

$\operatorname{tg}\beta = \frac{e}{c}$, also $\sec\beta = \frac{\sqrt{(c^2 + e^2)}}{c}$ und $\sin\beta$

$= \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sec\beta} = \frac{e}{\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, mithin $\sin\alpha =$

$\frac{me}{n\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, und das bestimmt schon die gesuchte Lage des Strahls.

Uebrigens hat man AO $= e \cdot \cot\alpha$, und $\cos\alpha =$ $\frac{\sqrt{(n^2(c^2 + e^2) - m^2 e^2)}}{n\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, $\operatorname{tang}\alpha =$

$\frac{me}{\sqrt{(n^2 c^2 - (m^2 - n^2) e^2)}}$, also AO $=$

$\sqrt{\left(\frac{n^2 c^2}{m^2} - \frac{m^2 - n^2}{m^2} e^2\right)}$.

181. §.

Man ziehe nun die Axe Qa für die aus Q auf die Vorderfläche fallenden Strahlen; so ist vermöge der Voraussetzung der Winkel aQm für alle auffallende Strahlen sehr klein: mithin werden sie in der Vorderfläche so gebrochen werden, als kämen sie aus dem Punct K her, und man hat $A\Pi = \mu . AP$, $aK = \mu . aQ$ (120. §.) also $aK = A\Pi$, weil $aQ = AP$ ist: zugleich ist beynahe $A\Pi = aK = AE + EK$, mithin beynahe $EK = E\Pi$. Man ziehe also KE, so ist KE eine Axe der hintern Fläche, wie es ΠG war, alle aus K kommende Strahlen werden so gebrochen, daß sie sich in einem Punct q der Axe KE vereinigen, und weil beynahe $EK = E\Pi$ ist, so hat man auch beynahe $Eq = Ep$, also beynahe $gq = Gp = Gq$. 62 F.

Was also von einer auf beyden Seiten erhaben geschliffenen Linse im 176. und 177. §. bewiesen ist, findet auch beym Planconvex-Glase seine Anwendung, pq ist ein Bild von PQ, das aber in Ansehung der Axe des Glases eine Lage hat, die der Lage des Objects PQ entgegen gesetzt ist; auch verhalten sich die Durchmesser des Bildes und des Objects, wie ihre Entfernungen vom Glase, denn es ist hier $AO = \frac{n}{m} c$ kleiner als c, und $G\omega = 0$.

182. §.

Eben das behält noch seine Richtigkeit, wenn man gleich das Planconvex-Glas umkehrt, so daß die erhabene Fläche dem Object zugekehrt ist. Es war nemlich für die Linse im 164. §. die Brenn- 63 F.

weite $f = \frac{\nu\varrho(\mu r - c)}{\mu(r+\varrho) - c} = \frac{\nu(\mu r - c)}{\mu - c:(r+\varrho)} \cdot \frac{\varrho}{r+\varrho}$, und dieser Ausdruck wächst mit ϱ, weil $\frac{\varrho}{r+\varrho}$ wächst, und $\frac{c}{r+\varrho}$ sich sehr wenig ändert. Ferner war der Abstand des Bildes $Gp = x = \frac{\varrho f((\mu r - c)\delta + \nu rc)}{\varrho\delta(\mu r - c) - rf(\mu\varrho - c)} = \frac{f((\mu r - c)\delta + \nu rc}{\delta(\mu r - c) - rf(\mu - c:\varrho)}$, und dieser Ausdruck wächst ebenfals mit ϱ, weil f mit ϱ wächst. Nimmt man ϱ unendlich groß an, so heist das, die hintere Fläche der Linse soll sich in eine ebene Fläche verwandeln, und man erhält $f = \nu r - \frac{\nu c}{\mu}$, woraus $f = \nu r$ wird, wenn c sehr klein ist. In dem zuletzt erwehnten Fall also ist die Brennweite einerley, man mag die ebene oder erhabene Seite dem Object zukehren. (179. §.) Ferner hat man, $\varrho = \infty$ gesetzt, $Gp = x = \frac{f((\mu r - c)\delta + \nu rc}{\delta(\mu r - c) - \mu rf}$, und wenn man $c = 0$ setzen kann, $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

183. §.

63 F. Soll nun aus einem Punct Q ausserhalb der Axe des Glases ein Strahl so auffallen, daß er nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit derjenigen parallel ist, worin er auffiel; so muß

muß er nach der ersten Brechung durch einen Punct π der Axe laufen, der vermittelst der Formul $G\pi$

$$= \frac{c\varrho}{r+\varrho}$$ gefunden wird. (168. §. n. 2.) Weil nun in dem jeßt zu betrachtenden Fall ϱ unendlich groß ist, so muß $G\pi = c$ seyn, das heist, der Strahl muß in A auf das Glas fallen, wie auch der Natur der Sache nach nicht anders seyn kann, da dann zugleich $C\pi = h = \frac{r(r+\varrho-c)}{r+\varrho} = r$ wird. (168. §. n. 2.) Im 169. §. war das letzte Glied der daselbst gefundenen Gleichung $= b^4(q^4 - 4h^2 r^2)$ und $q^2 = r^2 + h^2$, also das erwehnte letzte Glied $= b^4(r^2 - h^2)^2$. Weil nun hier $h = r$ ist, so verschwindet dasselbe, und eine Wurzel der dortigen Gleichung ist $\text{tg}\gamma = 0$. Der Coefficient des nächstlezten Gliedes $-4ab^3(q^4 - 4h^2 r^2)$ verschwindet ebenfals, und das giebt noch eine Wurzel $= 0$. Dieser Werth $\gamma = 0$, in der für y im 169. §. gefundenen Formul angenommen giebt $y = CO = r$ wie erfordert wird. Eben so giebt im 178. §. die Voraussetzung $\varrho = \infty$ den Werth $A\pi = 0$, also auch $AO =$

$$\frac{2r \,.\, A\pi}{3r - A\pi} = 0.$$

Man kann demnach den Strahl $Qmnq$ wie im 174. §. als den mittlern betrachten. Ziehet man ferner QC, so haben alle aus Q auffallende Strahlen nach der ersten Brechung einen Vereinigunspunct K in QC, und es ist beynahe CK = CH, weil beynahe CQ = CP ist. Von K falle Kg auf die hintere ebene Fläche des Glases senkrecht, so

ist

ist auch beynahe $gK = G\Pi$, und es haben alle aus Q auffallende Strahlen nach der ersten Brechung eine solche Lage, daß sie auf K zulaufen, so wie die aus P auffallenden nach der ersten Brechung in Π laufen. Demnach kommen sie nach der zweyten Brechung in eine Lage, vermöge welcher jene in q diese in p laufen, (120. §. n. 4.) und es ist beynahe $gq = Gp$, weil beynahe $gK = G\Pi$ ist. Diesemnach bildet sich PQ in pq umgekehrt ab, auch verhalten sich die Durchmesser des Bildes und des Gegenstandes wiederum, wie ihre Entfernungen vom Glase. (177 §.) Denn es ist

$AO = 0$, und $G\omega = \frac{n}{m} c$ kleiner als c.

184. §.

Im 179. §. wurden die Aenderungen betrachtet, welche die Eigenschaften der Glaslinse leiden, wenn der Halbmesser r der Vorderfläche wächst, und zuletzt unendlich groß wird. Der Abstand

$A\Pi$ (61 Fig.) $= \frac{mr\delta}{(m-n)\delta - nr}$ wird negativ,

wenn $r > \frac{m-n}{n}\delta$ wird, und wenn r unendlich

groß wird, so hat man $A\Pi = -\frac{m}{n}\delta$. Nach

dem bekannten Gesetz der Stetigkeit kann nun auch r negativ werden, und hiernächst wieder abnehmen: alsdenn hat man $A\Pi = -$

$\frac{mr\delta}{(m-n)\delta + nr}$, (155. §.) und dieser Ausdruck

nimmt

nimmt mit r wieder ab, und bleibt so lange negativ, als es r ist. Das heist nun annehmen, der Mittelpunct C der Vorderfläche falle auf der Seite des Glases, wo das Object befindlich ist, und die Vorderfläche kehre dem Object eben so, wie die Hinterfläche, die hohle Seite zu, wie es die 64. Fig. vorstellt. Ein Glas, dem man durch Schleifen und poliren diese Gestalt gegeben hat, heist ein Concav-convex-Glas, oder Meniscus.

Der Strahl PM wird zum ersten mahl in die 64 F. Lage MN gebrochen, so daß er rückwärts verlängert die Axe in Π schneidet: nach der zweyten Brechung aber läuft er auf den Punct p zu. Wenn man nun in den Formuln des 164. §. den Halbmesser r negativ nimmt, so findet man die Dicke des Glases, wie gemeiniglich geschehen kann, beyseit gesetzt, $Gp = x = \frac{-\nu r \varrho \delta}{(\varrho - r)\delta + \nu r \varrho}$, oder $x = \frac{\nu r \varrho \delta}{(r - \varrho)\delta - \nu r \varrho}$, und die Brennweite $f = \frac{-\nu r \varrho}{\varrho - r} = \frac{\nu r \varrho}{r - \varrho}$. Für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit ist sehr nahe $\nu = 2$, also $f = \frac{2 r \varrho}{r - \varrho}$, und $x = \frac{\delta f}{\delta - f} = \frac{2 r \varrho \delta}{(r - \varrho)\delta - 2 r \varrho}$. So lange $r > \varrho$ ist, so lange ist die Brennweite positiv, und die auf das Glas mit der Axe parallel fallenden Strahlen haben nach der zweyten Brechung hinter demselben einen würklichen Vereinigungspunct. Zugleich bleibt x positiv, so lange $\delta > f$ ist. In dem Fall $r = \varrho$, wird f

 unend-

unendlich groß, und $x = - \delta$. In dem Fall $r < \varrho$ ist allemahl f negativ, und $x = - \frac{\delta f}{\delta + f}$ ebenfals. In diesen Fällen, wenn f und x negativ werden, giebt es hinter dem Glase keinen Vereinigungspunct, worin die Strahlen zusammen laufen: sie gehen vielmehr hinter dem Glase immer weiter aus einander und haben eine solche Lage, als kämen sie aus einem Punct der Axe der vor dem Glase liegt. Derselbe ist also wenigstens als ein geometrischer Vereinigungspunct anzusehen, worin die Strahlen zusammen laufen würden, wenn man sie rückwärts verlängerte. Uebrigens ist noch zu bemerken, daß die angegebenen Formuln nur gebraucht werden können, wenn c in Vergleichung mit r, ϱ, und δ sehr klein ist.

Genauer hat man für den Meniscus $f = - \frac{\nu r \varrho (1 + c : \mu r)}{\varrho - r - c : \mu}$, oder $f = \frac{\nu r \varrho (1 + c : \mu r)}{r - \varrho + c : \mu}$, und $x =$

$$\frac{f \left(\delta + \frac{\nu r c}{(\mu r - c)} \right)}{\delta - \frac{r (\mu \varrho - c)}{\varrho (\mu r + c)} f}.$$

Mithin ist in dem Fall $r = \varrho$ eigentlich $f = \frac{\nu r \varrho}{c} \left(\mu + \frac{c}{r} \right)$, und es wird erstlich f unendlich groß, wenn $r = \varrho - c$

$- c : \mu$ ist, zugleich aber ist $x = - \frac{\varrho(\mu r + c)}{r(\mu\varrho - c)}$ $\left(\delta + \frac{\nu r c}{\mu r + c}\right)$. Ueberhaupt muß man auch beständig in Erinnerung behalten, daß die Formuln nur so lange richtig sind, als beyde Flächen des Glases solche Kugelstücke bleiben, die in Vergleichung mit der ganzen oder halben Kugelfläche sehr klein sind, da sie denn noch wenig gekrümmt sind. Eben daher kommt es, daß hier f unendlich groß wird, wenn man $r = \varrho$, oder richtiger $r = \varrho - c : \mu$ annimmt. Beyde Flächen sind nemlich nun beynahe ein paar ebene parallele Flächen, mithin sind parallel auffallende Strahlen auch nach der zweyten Brechung beynahe parallel.

185. §.

Von dem Punct Q ausserhalb der Axe des Gla- 64 F.
ses falle ein Strahl Qm auf die Vorderfläche, so kann derselbe nach der zweyten Brechung in eine Lage kommen, die mit Qm parallel ist, wenn der Strahl nach der ersten Brechung durch einen Punct π der Axe läuft, den die Formul G$\pi = \frac{c\varrho}{r + \varrho}$ bestimmt. (168. §. n. 3.) Demnach muß hier G$\pi = \frac{c\varrho}{\varrho - r}$ seyn, wenn solches erfolgen soll. So lange nun $r > \varrho$ ist, mithin so lange die aus P auffallenden Strahlen hinter dem Glase einen würklichen Vereinigungspunct haben; so lange ist Gπ negativ, und π liegt nicht im Glase selbst.

So lange indessen $r > 2\varrho$ ist, so lange bleibt $G\pi < c$, und π liegt sehr nahe bey G, da dann wie bisher Qm als der mittlere von dem aus Q auffallenden Strahlen betrachtet werden kann, der beynahe ungebrochen durchgehet. Weil übrigens auch $A\pi = \frac{cr}{r + \varrho}$ war (168. §. n. 2.) so hat man hier $A\pi = -\frac{cr}{\varrho - r} = \frac{cr}{r - \varrho}$: mithin $A\pi > c$, so lange $r > \varrho$ ist, welches mit dem vorigen überein stimmet.

Die aus Q auf die Fläche BAD fallenden Strahlen werden in derselben in die Lage gebrochen, als kämen sie aus dem Punct K her, (156. §.) und es ist beynahe $aK = A\Pi$, weil beynahe $aQ = AP$ ist, also auch beynahe $EK = E\Pi$. Wenn man also KE zieht, so fallen die Strahlen nach der zweyten Brechung auf die Fläche bGd so, als kämen sie aus dem Punct K der Axe KE, deswegen haben sie in derselben einen Vereinigungspunct q, (157. §.) und es ist beynahe $Eq = Ep$, weil $EK = E\Pi$ war. So lange demnach $r > \varrho$ ist, und die Strahlen hinter dem Glase einen würklichen Vereinigungspunct haben, so lange bildet sich PQ eben so, wie hinter einer eigentlichen Glaslinse umgekehrt ab. So lange ferner $r > 2\varrho$ bleibt, so lange findet auch noch der Satz des 177. §. seine Anwendung, vermöge dessen beynahe die Durchmesser des Bildes und Gegenstandes sich wie ihre Entfernungen vom Glase verhalten. Es ist nemlich hier AO (178. §.) $= \frac{2c}{3(1-\varrho:r)+c:r}$ und

und $G\omega = -\frac{2c}{3(r:\varrho - 1) + c:\varrho}$, also $G\omega$ negativ, so lange $r > \varrho - \frac{1}{3}c$ ist, und es ist vermöge des 177. §. eigentlich $AP + AO : Gp - G\omega = PQ : pq$. Sind nun $\frac{c}{r}$ und $\frac{c}{\varrho}$ sehr kleine Brüche, so ist beynahe $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{r - \varrho} \cdot c$, und $G\omega = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\varrho}{r - \varrho} \cdot c$. So lange $r > 2\varrho$ ist, so lange wird AO nicht grösser als $\frac{4}{3}c$, und $G\omega$ nicht grösser, als $\frac{2}{3}c$, mithin noch ohne merklichen Fehler $AP : Gp = PQ : pq$. Wird aber $r < 2\varrho$, und nähert sich dem Werth ϱ, so werden $1 - \frac{\varrho}{r}$ und $\frac{r}{\varrho} - 1$ sehr klein, und man kann $\frac{c}{r}$, $\frac{c}{\varrho}$ nicht mehr weglassen. Also nähert sich AO dem Werth $= 2r$, und $G\omega$ dem Werth $= -2\varrho$. Demnach wird der Satz des 177. §. desto unrichtiger, je mehr sich r dem Haibmesser ϱ nähert. Indessen wird bey eben dieser Voraussetzung auch $f = \frac{2r\varrho}{r - \varrho}$ sehr groß, also r und ϱ gegen f sehr klein, so wie auch gegen δ, so lange $\delta > f$ und der Abstand x des Bildes positiv bleibt. Weil nun $\delta = AP$, $x = Gp$ ist; so hat man noch immer ziemlich nahe $AP : Gp = PQ : pq$.

186. §.

186. §.

Aendert sich ϱ, so bleibt der Abstand An (61. Fig.) $= \frac{m r \delta}{(m-n)\delta - nr}$ (179. §.) ungeändert, aber die Brennweite der Glaslinse $f = \frac{\nu r \varrho}{r + \varrho}$, mithin auch der Abstand des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, (die Dicke des Glases sehr klein angenommen, (178. §.) leiden Aenderungen. Es wächst nemlich $f = \frac{\nu r}{1 + (r : \varrho)}$, wenn ϱ wächst, und man hat $f = \nu r$, wenn ϱ unendlich groß wird, wie im 182. §. Wird nun ϱ negativ, so hat man $f = -\frac{\nu r \varrho}{r - \varrho} = \frac{\nu r \varrho}{\varrho - r}$, und dieser Ausdruck bleibt positiv, so lange $\varrho > r$ ist, mithin auch x so lange $\delta > f$ ist. Man ersiehet aus diesen Formuln in Vergleichung mit dem 184. §. sogleich, daß der Meniscus Bild und Brennpunct gleich weit hinter sich werfe, man mag welche Seite man will dem Gegenstande zukehren, vorausgesetzt, daß die Dicke des Glases sehr klein, und der Halbmesser der hohlen Fläche des Glases grösser als der Halbmesser der erhabenen sey. Ist $\varrho < r$, so ist f negativ, mithin auch $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ negativ, wie groß übrigens δ seyn mag.

187. §.

Aus Q falle der Strahl Qm auf die Vorderflä- 65 F.
che, so wird derselbe nach der zweyten Brechung wieder in die mit Qm parallele Lage kommen, wenn derselbe nach der ersten Brechung die Axe in π schneidet, $G\pi = -\dfrac{c \cdot \varrho}{r-\varrho} = \dfrac{c \cdot \varrho}{\varrho - r}$ genommen, weil hier ϱ negativ ist. (168. §. n. 2.) So lange $\varrho > r$ ist, so lange ist dieser Ausdruck positiv, und $G\pi > c$: also fällt π ausserhalb des Glases, auf der Seite, wo das Object liegt, wie denn auch $A\pi = \dfrac{cr}{r-\varrho} = -\dfrac{cr}{\varrho - r}$ (168 §. n. 2.) negativ wird. Man ziehe QC als die Axe der Vorderfläche für den Punct Q, so laufen alle aus Q auffallende Strahlen nach der ersten Brechung in einem Punct K dieser Axe zusammen, so daß CK beynahe $= C\Pi$ ist, weil beynahe $CQ = CP$ ist. Weil ferner beynahe $CE = C\Pi + E\Pi$ $= CK + EK$, so ist auch beynahe $EK = E\Pi$, und $gK = G\Pi$. Man ziehe EK, so ist EK eine Axe der hintern Fläche, und alle aus Q kommende Strahlen liegen nach der ersten Brechung so, daß sie auf K zu laufen. Mithin haben sie in der Axe EK einen Vereinigungspunct q, und es ist beynahe $Eq = Ep$, weil $gK = G\Pi$ war: mithin ist auch beynahe $gq = Gp$, und PQ bildet sich in pq umgekehrt ab, wie denn auch beynahe $nq = gq = Gp$ ist.

Noch hat man $AO = \dfrac{2c}{3(1-\varrho : r) - c : r}$,

und $G\omega = \dfrac{2c}{3(1 - r : \varrho) + c : \varrho}$. Es ist also

AO

$AO = -\frac{2c}{3(\varrho : r - 1) + c : r}$ negativ, so lange $\frac{3\varrho}{r} + \frac{c}{r} > 3$ oder $3\varrho + c > 3r$, oder $\varrho > r - \frac{1}{3}c$ ist. Demnach ist im 177 §. $AP - AO : Gp + G\omega = PQ : pq$. So lange nun $\varrho > 2r$ bleibt, so lange wird AO nicht grösser als $\frac{2}{3}c$, und $G\omega$ nicht grösser als $\frac{4}{3}c$, mithin ist noch sehr nahe $AP : Gp = PQ : pq$. Nähert sich ϱ dem Werth r, so nähert sich AO dem Werth $-2r$, und $G\omega$ dem Werth 2ϱ. Aber auch $f = \frac{2r\varrho}{\varrho - r}$ wird sehr groß, so wie $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, so lange $\delta > f$ ist, deswegen weicht die Proportion $AP : Gp = PQ : pq$ auch alsdenn nicht sehr von der Wahrheit ab.

188. §.

Um die Würkung der Strahlenbrechung, wenn das Licht durch den Meniscus fällt, vollständig kennen zu lernen, muß man auf den im 184. §. betrachteten Fall nochmahl zurück gehen, wenn die hohle Seite der beyden Kugelflächen desselben dem Object zugekehrt ist. So lange $r > \varrho$ war, so lange war die Brennweite $f = \frac{2r\varrho}{r - \varrho}$ positiv, so wie der Abstand des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, wenn nur $\delta > f$ bleibt. War dagegen $r < \varrho$, so war $f = -\frac{2r\varrho}{\varrho - r}$ negativ, mithin auch $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ alle=

allemahl negativ. Diesen Fall stellt die 66 Figur vor. Der Strahl PM kommt nach der ersten Brechung in die Lage MN, worin er rückwärts verlängert die Axe in Π schneidet, die auf die hintere Fläche *bGd* fallenden Strahlen liegen demnach so, als kämen sie aus Π her, und werden in N von neuen so gebrochen, daß sie rückwärts verlängert die Axe vor dem Glase in *p* schneiden. Demnach ist *p* kein **würklicher** sondern nur ein **geometrischer Vereinigungspunct**. Die Strahlen fahren hinter dem Glase immer weiter aus einander, ihre Lage ist indessen so, als kämen sie aus dem Punct *p* her, und um die Aehnlichkeit mit den bisher betrachteten Eigenschaften linsenförmiger Gläser, die entweder auf beyden Seiten erhaben, oder nur auf der einen erhaben, auf der andern platt sind, beyzubehalten, nennt man *p* das **geometrische Bild** von *p*, und dies wird der **geometrische Brennpunct**, wenn AP unendlich groß ist. 66 F.

Eben der Punct *p* heist auch der **Zerstreuungspunct** des Glases, so wie er bey den bisher betrachteten Gläsern ein **Vereinigungs-** oder **Sammlungspunct** war. Wenn demnach beym Concav-convex-Glase der hohlen Fläche Halbmesser kleiner als der Halbmesser der erhabenen Fläche ist; so kann das Glas ein **Zerstreuungs-Meniscus** heissen, so wie es im umgekehrten Fall ein **Sammlungs-Meniscus** ist, wenn der hohlen Fläche Halbmesser grösser ist, als der Halbmesser der erhabenen Fläche. Der Meniscus der leztern Art wirft bey einerley Entfernung des strahlenden Puncts das Bild gleich weit hinter sich, man mag die hohle oder erhabene Seite gegen das

Object

Object kehren, (186. §.) vorausgesetzt, daß das Glas eine sehr geringe Dicke habe: es wird sich aber bey fernerer Betrachtung der Eigenschaften des Zerstreuungs-Meniscus ergeben, daß derselbe, wenn die erhabene Seite gegen das Object gekehrt wird, nicht allein ebenfals die Strahlen zerstreue, und deswegen in allen Fällen der ihm beygelegte Nahme der Sache angemessen sey, sondern auch seinen Zerstreuungspunct bey gleicher Entfernung des Objects, wenn das Glas eine geringe Dicke hat, in gleicher Entfernung vor dem Glase behalte. Hier verbindet man am besten mit dem bisherigen zugleich folgende Anmerkung.

Für den Zerstreuungs-Meniscus, die hohle Seite gegen das Object gekehrt, ist $f = -\frac{2r\varrho}{\varrho - r}$, und $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$, oder $f = -\frac{2r}{1 - r:\varrho}$. Demnach ist f allemahl grösser, als $2r$, weil $1 - \frac{r}{\varrho}$ ein eigentlicher Bruch ist. Weil aber $1 - \frac{r}{\varrho}$ mit ϱ wächst, so nimmt f ab, wenn ϱ wächst, und man erhält $f = -2r$, wenn ϱ unendlich groß wird, das heist, wenn die erhabene Fläche, sich
67 F. in eine ebene Fläche verwandelt, wie es die 67. Fig. vorstellt. Das Glas heist nun ein einfaches **Hohlglas, ein Plan-concav-Glaß.** Dasselbe ist also ebenfals ein Zerstreuungsglas und hat seinen Zerstreuungspunct in der Entfernung $x = \frac{2\delta r}{\delta + 2r}$ vor dem Glase.

189. §.

189. §.

Ist Q ein Punct ausserhalb der Axe des Zer- 66
streuungsglases, so giebt es unter den aus Q auf- 67 F.
fallenden Strahlen noch wie bisher einen mittlern, der beynahe ungebrochen durchgeht. Er muß in der Lage auffallen, daß er durch den Punct O der Axe läuft, dessen Stelle die allgemeine Formul $AO = \frac{2c}{3(1+\varrho:r)-c:r}$ bestimmt. Nach der ersten Brechung läuft er durch π und man hat $A\pi = \frac{cr}{r+\varrho}$; nach der zweyten Brechung aber durch ω und man hat überhaupt $G\omega = \frac{2c}{3(1+r:\varrho)-c:\varrho}$ (178. §.) Weil nun hier r negativ und kleiner als ϱ ist, so ist $A\pi = -\frac{cr}{\varrho-r}$ negativ. Weiter ist $AO = \frac{2c}{3(1-\varrho:r)+c:r}$ so lange negativ als $\frac{3\varrho}{r} > 3 + \frac{c}{r}$, oder $3\varrho > 3r + c$, oder so lange $r < \varrho - \frac{1}{3}c$ ist. Also ist auch $AO = -\frac{2c}{3(\varrho:r-1)-c:r}$, und $G\omega = \frac{2c}{3(1-r:\varrho)-c:\varrho}$. Demnach liegen die Puncte O, π, nicht innerhalb des Glases, sondern auf der Seite, wo das Object befindlich ist.

67 F. Für das Planconcav-Glas ist ϱ unendlich groß, also verschwinden $A\pi$ und AO, und der mittlere Strahl muß in A auffallen, wie denn auch hier kein andres Element der Kugelfläche BAD mit bd parallel seyn kann, das einzige in A ausgenommen. Der zum zweyten mahl gebrochene Strahl geht durch ω, wenn man $G\omega = \frac{2}{3}c$ nimmt.

Man ziehe nun die Axe Q C a der Vorderfläche, so haben alle aus Q auffallende Strahlen einen Vereinigungspunct in K, auch ist beynahe $aK = A\Pi$, mithin $CK = C\Pi$, wenn beynahe $CQ = CP$ ist. Weiter ziehe man die Axe E K g der hintern Fläche, die beym Planconcavglase mit der Axe PC parallel liegt, weil E von A oder G unendlich weit entfernt ist, so ist auch beynahe $gK = G\Pi$, und weil aus Q die auf die hintere Fläche bGd fallenden Strahlen so liegen, als kämen sie aus dem Punct K her, so haben sie in gK einen Vereinigungspunct q, und es ist beynahe $gq = Gp$, weil $gK = G\Pi$ war. Indessen ist hier q kein Sammlungs- sondern ein Zerstreuungspunct: er ist ein **geometrisches Bild** von Q, wie p ein geometrisches Bild von P. Eben so hat jeder Punct zwischen P und Q ein geometrisches Bild zwischen p und q. Die ganze Reihe der Bilder von p bis q ist ein **geometrisches Bild** von PQ, welches hier mit dem Object einerley Stellung nicht wie beym Sammlungsglase die umgekehrte Stellung hat.

Die Regel des 177. §. findet übrigens auch hier ihre Anwendung: nur ist zu bemerken, weil beym Zerstreuungsglase nicht der zum zweytenmahl gebrochene, sondern der auffallende Strahl Qm selbst durch

durch q läuft, daß eigentlich $AP - AO : Ap - AO = PQ : pq$ sey, vorausgesetzt, daß O wie in der 66 Fig. vor dem Glase liegt. Beym Planconcav-Glase, wenn $\varrho = \infty$ ist, hat man $AO = 0$, (67. Fig.) also ist die Regel des 177. §. hier völlig richtig. Beym Zerstreuungs-Meniscus ist beynahe AO 66 F.
$= -2r$, wenn r noch sehr nahe $= \varrho$ ist. Indessen ist alsdenn $f = -\dfrac{2r\varrho}{\varrho - r}$ sehr groß, so wie $x = -\dfrac{\delta f}{\delta + f}$, wenn $\delta > f$ ist; also ist doch AO in Vergleichung mit AP und $Ap = x$ nur klein. Je kleiner übrigens r gegen ϱ ist, desto kleiner werden AO, wie denn beynahe $AO = -\frac{2}{3}c$ ist, wenn $r = \frac{1}{2}\varrho$ genommen wird. Demnach behält die Regel des 177. §. ihre Richtigkeit.

190. §.

Es sey nun die erhabene Seite des Zerstreuungs- 68
Meniscus dem Object zugekehrt, so daß r positiv 69 F.
bleibt, aber ϱ negativ, und überdem $\varrho < r$ ist, so hat man aus dem 178. §. $f = -\dfrac{2r\varrho}{r - \varrho}$ und $x = -\dfrac{\delta f}{\delta + f}$, woraus also erhellet, daß der Brennpuncts Abstand, so wie der Abstand des Bildes, wiederum negativ sey. Für das Planconcav-Glaß wird $f = -2\varrho$, wenn r unendlich groß wird, und $x = -\dfrac{2\delta\varrho}{\delta + 2\varrho}$, alles in der Voraussetzung, daß die Dicke des Glases in Ver-

gleichung mit den Halbmessern sehr klein sey. Der Abstand des Zerstreuungspuncts und des geometrischen Bildes sind also in der erwehnten Voraussetzung einerley, man mag welche Seite man will dem Object zukehren. Zugleich rechtfertiget sich nun der Nahme des Zerstreuungsglases. (188. §.)

Fällt aus Q seitwärts der Axe ein Strahlenkegel auf das Glas; so giebt es unter denselben einen mittlern, dessen ganze Lage aus dem 178. §. (ϱ negativ genommen), die Formuln AO $= \frac{2c}{3(1-\varrho:r)-c:r}$, $A\pi = \frac{cr}{r-\varrho}$, und $G\omega = \frac{2c}{3(1-r:\varrho)+c:\varrho}$ oder $G\omega = -\frac{2c}{3(r:\varrho-1)-c:\varrho}$ bestimmen. Weil nun $\varrho < r$ angenommen wird, so ist $A\pi > c$ und π fällt hinter das Glas.

Für das Planconcav-Glaß, r unendlich groß angenommen, ist $A\pi = c$ und $G\omega = 0$, also fallen π und ω in G zusammen. Weiter ist AO $= \frac{2}{3}c$, also sehr nahe AP : Ap = PQ : pq. Der Regel des 177. §. gemäß.

Für den Zerstreuungs-Meniscus ist zwar beynahe AO $= -2r$, wenn ϱ sehr nahe $= r$ ist. Doch ist alsdenn $f = -\frac{2r\varrho}{r-\varrho}$ sehr groß, und $x = Ap = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ ebenfals, wenn $\delta > f$ ist; mithin noch beynahe AP : Ap = PQ : pq. Je

kleiner

kleiner ϱ gegen r ist desto kleiner wird AO, und die Voraussetzung $\varrho = \frac{1}{2}r$ würde $AO = \frac{4}{3}c$ geben.

191. §.

So wie der Zerstreuungs-Meniscus sich in ein Planconcav-Glas verwandelt, wenn der Halbmesser der erhabenen Fläche unendlich groß wird; so kann eben dieser Halbmesser hiernächst in den entgegen gesetzten Zustand übergehen. Auf solche Art erhält man ein **doppelt Hohlglas**, wovon beyde Seitenflächen hohl sind. Auch dies behält die Natur eines Zerstreuungsglases. Wenn nemlich in der Formul für die Brennweite, die Dicke des Glases sehr klein angenommen, (178. §.) beyde Halbmesser r und ϱ negativ angenommen werden; so hat man $f = -\frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ allemahl negativ, mithin ist auch der Abstand des Bildes $x = \frac{-\delta f}{\delta + f}$ allemahl negativ, und das Bild p des Puncts P liegt vor dem Glase. Aus dem Punct Q seitwärts der Axe falle ein Strahlenkegel auf das Glas, so geht der mittlere Strahl Qm durch O, wenn man $AO = \frac{2c}{3(1+\varrho:r)+c:r}$ nimmt; der zum erstenmahl gebrochene Strahl geht durch π, wenn $A\pi = \frac{cr}{r+\varrho}$ genommen wird, so wie der zum zweytenmahl gebrochene durch ω geht, $G\omega = \frac{2c}{3(1+r:\varrho)+c:\varrho}$ genom-

70 F.

genommen. Demnach ist allemahl AO $< \frac{2}{3}c$, so wie auch $G\omega < \frac{2}{3}c$, und alle drey Puncte O, π, ω, liegen innerhalb des Glases.

Durch Q ziehe man die Axe QCa der Vorderfläche, so haben alle aus Q auffallende Strahlen in derselben einen Vereinigungspunct K, und es ist beynahe CK = CΠ, weil beynahe aQ = AP ist. Durch K sey die Axe KE der hintern Fläche gezogen, so fallen die zum ersten mahl gebrochenen Strahlen auf die hintere Fläche so, als kämen sie aus K her: mithin haben sie in gK einen Vereinigungspunct q, und weil beynahe EK = EΠ, oder gK = GΠ ist, so hat man auch beynahe gq = Gp, und pq ist ein geometrisches Bild von PQ. Zugleich ist, wie im 177. §. AP : Ap = PQ : pq, weil AO in Vergleichung mit AP und Ap verschwindet.

192. §.

Wenn der Abstand des Objects vom Glase kleiner ist, als die Brennweite, so nimmt die auf beyden Seiten erhabene Linse ebenfals die Natur eines Zerstreuungsglases an. Die Brennweite $f = \dfrac{2r\varrho}{r+\varrho}$ ist allemahl positiv, aber der Abstand des Bildes $x = \dfrac{\delta f}{\delta - f}$ negativ, wenn $\delta < f$

71 F. ist. Diesen Fall stellet die 71. Fig. vor, wo AP $< f$ genommen ist: der aus P auffallende Strahl PM wird in die Lage MN gebrochen, worin er rückwärts verlängert die Axe in Π schneidet: und wenn man das Einfallsloth EN ziehet, so siehet man

man, daß der Strahl zum zweyten mahl in die Lage Nν gebrochen werde, so daß er rückwärts verlängert die Axe in p schneidet, da dann p kein Sammlungs sondern ein Zerstreuungspunct ist. Wird aus Q der mittlere Strahl Q$m\pi n$ gezogen, imgleichen die Axe QC der Vorderfläche; so liegen alle aus Q auffallende Strahlen nach der ersten Brechung so, als kämen sie aus K her, und haben nach der zweyten Brechung einen Vereinigungspunct q in der Axe KEg der hintern Fläche, und dieser Punct q liegt zugleich im mittlern Strahl Qm. Das Object, PQ aber hat sein geometrisches Bild in pq, auch ist dem 177. §. gemäß AP : Ap = PQ : pq.

Die übrigen Sammlungsgläser haben mit der auf beyden Seiten erhabenen Linse die eben erwehnte Eigenschaft gleichfals gemein. Ihre Brennweite ist allemahl positiv, so wie im Gegentheil die Brennweite der Zerstreuungsgläser allemahl negativ ist. Für die Sammlungsgläser ist also $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$ negativ, wenn $\delta < f$ ist: im Gegentheil bleibt für die Zerstreuungsgläser $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ allemahl negativ. Noch unterscheidet sich das Sammlungsglas vom Zerstreuungsglase darin, daß bey jenem $x = -\frac{\delta f}{f - \delta}$ ($\delta < f$ genommen) allemahl grösser als δ, bey diesem $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ allemahl kleiner als δ ist. Das heist beym Sammlungsglase, wenn das Object dem Glase näher liegt, als der Brennpunct, ist die Entfernung des geometrischen Bildes vom Glase grösser, als die Entfernung des Objects; beym Zerstreuungsglase aber ist die Entfernung des geometrischen Bildes vom Glase kleiner; als die Entfernung des Objects. Eben deswegen ist auch beym Sammlungsglase, wenn es ein Zerstreuunsglas wird, des Bildes Durchmesser grösser als des Objects Durchmesser, beym Zerstreuungsglase hingegen ist jener Durchmesser allemahl kleiner, als dieser:

denn es ist in allen Fällen $pq = \frac{x}{\delta} \cdot PQ.$

193. §.

Alle Sammlungsgläser sind zugleich Brenngläser. Wenn die Axe eines solchen Glases gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet ist, so verursachet das deutliche Bild der Sonne hinter dem Glase, wenn man es auf eine brennbare Masse fallen läßt, eine solche Hitze, daß eine Entzündung erfolgt, weil in jedem Punct des Bildes soviele Strahlen zusammen gebracht sind, als von einem damit zusammengehörigen Punct der Sonnenfläche auf das Glas fallen, und sich über dessen Vorderfläche verbreiten. Was bey einem solchen Glase der focus heist, und gewöhnlich Brennpunct, besser aber der Brennraum genannt wird, das ist eigentlich das Bild der Sonne hinter dem Glase: es ist ein kleiner Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{x}{\delta}$ PQ, oder hier $= \frac{f}{\delta}$ PQ, weil

wegen

wegen der sehr grossen Entfernung der Sonne von der Erde δ als unendlich groß, und $x = f$ (178. §.) angenommen werden kann. Richtiger heist nur der Mittelpunct des Bildes der Brennpunct. Weil übrigens in diesem Fall $\frac{PQ}{\delta}$ die Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne ist, den man $= 16'$ annehmen kann, so ist der Halbmesser des Brennraums oder des Sonnenbildes $= 0,0046542 \,.\, f$. Wäre demnach die Brennweite 1 Fuß, so wäre dieser Halbmesser $=$ 0,6702048 Duodecimal-Linien.

194. §.

Wenn man die Halbmesser beyder Kugelflächen einer Glaslinse unendlich groß setzt, so verwandelt sich die Linse in ein Plan-Glas. Ein solches Planglas gehört in die Classe der Zerstreuungsgläser, und die Formuln $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$, $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, geben f unendlich groß, so wie $x = - \delta$ Man siehet leicht, daß der Natur der Plangläser gemäß Strahlen, die auf das Glaß in paralleler Lage auffallen, nach der zweyten Brechung hinter dem Glase wieder in die parallele Lage kommen müssen; daß mithin der Vereinigungspunct solcher Strahlen, die von einem unendlich weit entlegenen Punct auf das Glaß fallen, ebenfals vom Glase unendlich weit entfernt sey. Vermöge der zweyten Gleichung $x = - \delta$ ist die Stelle des Bildes mit der Stelle des Objects einerley, jedoch nur alsdenn, wenn die Dicke des Glases c in Vergleichung mit der

der Entfernung δ des Objects sehr klein ist, welches die Formuln $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ und $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ voraussetzen. Richtiger ist $f = \frac{2\varrho\,(3r-c)}{3\,(r+\varrho)-c}$, und $x = \frac{\varrho f\,((3r-c)\,\delta + 2rc)}{\varrho\delta\,(3r-c) - rf\,(3\varrho - c)}$, und für das Planglas giebt zwar die erste Formul ebenfals f unendlich groß, dagegen aber erhält man $x = -$
72 F. $\delta - \frac{2}{3}c$, oder $Gp = -(\delta + \frac{2}{3}c)$. Es ist nemlich dies x die Entfernung Gp des Bildes p von der hintern Fläche bd des Glases, und $\delta = AP$ die Entfernung des Objects P von der vordern Fläche BD. Ferner ist die Dicke des Glases $AG = c$, mithin die Entfernung des Bildes von der vordern Fläche BD, oder $Ap = Gp - AG = \delta + \frac{2}{3}c - c$, d. i. $Ap = \delta - \frac{1}{3}c$. Mithin liegt das Bild p der Vorderfläche um $\frac{1}{3}$ der Dicke des Glases näher, als das Object P.

Uebrigens sind diese Sätze dahin eingeschränkt, daß der Winkel APM nur klein seyn muß. So lange diese Voraussetzung zum Grunde liegt, wird der Punct Π, worin der zum erstenmahl gebrochene Strahl MN die Axe AP schneidet, vermittelst der Formul $A\Pi = \frac{m}{n}\,\delta$ (120. §.) gefunden. Auf die hintere Fläche bd also fällt der Strahl MN so, als käme er von dem Punct Π der Axe her in einer Entfernung $G\Pi = \frac{m}{n}\,\delta + c$ von der Fläche bd; mithin schneidet er nach der Brechung die

die Axe in einem Punct p, dessen Entfernung Gp
$= \frac{n}{m} \cdot G\pi = \delta + \frac{n}{m} c$ ist, (120. §. n. 2.)
oder $Gp = \delta + \frac{2}{3}c$, $m : n = 3 : 2$ angenommen: und dies ist eben der Ausdruck, welchen die allgemeine Formul für die Glaslinse gab.

Der XV. Abschnitt.

Theorie der Erleuchtung des Bildes linsenförmiger Gläser und sphärischer Hohlspiegel.

195. §.

Ein Sonnenstrahl AB der im finstern Zimmer 73 F.
mit einer ebenen Glastafel RPQS aufgefangen wird, stellet folgende Erscheinungen dar. Wenn derselbe in B auffält, so wird ein Theil der gesammten Lichtmenge, die den Strahl AB ausmacht, von der Vorderfläche PQ nach B b den Gesetzen des 81. §. gemäß zurück geworfen, der übrige Theil aber in die Lage BC, wie es den Gesetzen des 115. u. f. §. gemäß ist, gebrochen. Man kann im finstern Zimmer nicht allein den einfallenden Strahl AB, sondern auch den zurück geworfenen Bb, deutlich sehen; denn gewöhnlich werden sich in dem ganzen Raum AB, so wie in Bb, unzählig viele erleuchtete Stäubchen zeigen. Ferner wird

wird nicht allein die Stelle B, wo der Strahl auffällt, sondern auch in der Glaßtafel selbst der Raum BC, durch welchen das gebrochene Licht durchdringt, überal, von welcher Seite man ihn auch betrachtet, zu sehen seyn. Bey C erfolgt, wie bekannt ist, die zweyte Brechung, wenn daselbst das Licht aus dem Glase wieder in die Luft gehet, jedoch so, daß wiederum nicht alles in C auffallende Licht nach D durchgehet, sondern ein Theil nach D zurück geworfen wird.

Wenn PQ die Fläche eines stillstehenden klaren in einem Gefäß befindlichen Wassers ist, welche den Lichtstrahl auffängt; so wird ebenfals ein Theil des in B auffallenden Lichts nach B*b* zurück geworfen, ein Theil aber dringt nur in die durchsichtige Masse Wasser hinein. Soviel bisher bekannt ist, kennt man noch keine durchsichtige Masse in der Natur, die gar nichts von dem auffallenden Licht zurück schickte: man muß vielmehr allemahl den gebrochenen Theil des Lichts, der in die Masse hinein dringt, von dem zurück geworfenen unterscheiden. Weil ferner der ganze Raum BC von allen Seiten betrachtet sichtbar ist; so muß ein Theil des in B gebrochenen und in die Masse hineindringenden Lichts von den Theilchen der Masse zwischen B und C nach allen Seiten zerstreuet werden. Diesemnach leidet das Licht, welches der auffallende Strahl AB enthält, bevor es bis zur hintern Fläche RS durchgedrungen ist, einen zwiefachen Abgang, einmahl wegen der Zurückwerfung nach B *b*, und hieher gehört nur alles dasjenige, was unter einerley Winkel nach dem Gesetz des 81. §. zurück strahlet, in Ansehung dessen

also

also die Fläche PQ als Spiegelfläche zu betrachten ist, denn selbst die Stelle B zerstreuet etwas Licht um sich her: zweytens wird von demjenigen, welches in die Masse selbst hinein dringt, noch ein Theil nach allen Seiten zerstreuet, und diesen Theil mit demjenigen zusammen genommen, welches die Stelle B nach allen Seiten und nicht mit dem übrigen unter einerley Winkel zurück sendet, kann man das zerstreuete Licht nennen.

196. §.

Je kleiner der zerstreuete Theil des Lichts ist, desto durchsichtiger ist die Masse: wenn gar kein Licht zerstreuet würde, und alles bey B in die Masse eindringende Licht auf C fiele, so wäre die Masse vollkommen durchsichtig. Es giebt nemlich gar keine durchsichtige Massen, die schlechthin alles auffallende Licht durchlassen, und gar nichts zurückwerfen. Deswegen können nur diejenigen Massen hieselbst als vollkommen durchsichtig betrachtet werden, die gar nichts von dem hineindringenden Licht zerstreuen. Ob es in diesem Verstande vollkommen durchsichtige Massen in der Natur gebe? ist eine Frage, deren völlig bestimmte Entscheidung hier eben nicht nothwendig ist. Bisher kennet man keine dergleichen vollkommen durchsichtige Masse. Man kann indessen diesen Begrif einer vollkommen durchsichtigen Masse zum Grunde legen, und einer jeden andern Masse desto mehr Durchsichtigkeit zuschreiben, je kleiner die Menge des zerstreueten Lichts ist; im Gegentheil aber desto weniger Durchsichtigkeit, und desto mehr Undurchsichtigkeit, je grösser die Menge des

zer-

zerstreueten Lichts in Vergleichung mit dem durchfallenden ist.

Gesetzt aber die Masse RPQS wäre auch in dem
73 F. eben erklärten Verstande vollkommen durchsichtig, so würde doch der zum ersten mahl gebrochene Strahl BC bey der zweyten Brechung in der Fläche RS einen neuen Abgang leiden. Denn in C, wo der zum ersten mahl gebrochene Strahl auf die Fläche RS fällt, erfolgt ausser der Brechung in die Lage C*c* eine neue Zurückstrahlung nach CD, und dies auf D fallende Licht wird abermahl zum Theil in D*d* gebrochen, zum Theil nach DE zurückgeworfen. Was auf E fällt, leidet eine neue Brechung in E*e* und ein Theil davon strahlt nach EF zurück. Auch dieser auf F fallende Theil wird nach F*f* gebrochen, ein Theil davon aber strahlt nach FG zurück, leidet in G eine neue Brechung in G*g*, jedoch so, daß abermahl ein Theil nach GH zurück strahlt. Die Stellen B, C, D, E, F, G, H, I, u. s. f. sind sehr kenntlich, auch ist der gebrochene Weg des Lichts BCDEFGHI u. s. f. im finstern Zimmer ganz wohl wahrzunehmen, wenn RPQS eine etwas dicke Glastafel ist, fängt man die Strahlen, welche zu beyden Seiten aus der Glastafel in die Luft fahren, mit einem weissen Papier auf, so zeigen sich auf demselben eben so viele kleine Sonnenbilder. Das erste, welches von dem zurückgeworfenen Strahl B*b* herrührt, ist schwächer als dasjenige, welches der zum zweyten mahl gebrochene Strahl C*c* auf das Papier wirft. Die folgenden Bilder, welche die Strahlen D*d*, E*e*, F*f*, G*g*, H*h*, I*i*, u. s. f. auf das Papier werfen, werden nach der genannten Ordnung

immer

immer schwächer, bis endlich das zehnte oder zwölfte kaum mehr merklich bleibt. Vergrössert man den Einfallswinkel PBA, so rücken diese kleinen Sonnenbilder näher zusammen, und verlieren sich desto früher in einander, je geringer die Dicke der Glastafel, und je grösser die Oefnung ist, durch welche das Sonnenlicht einfällt.

197. §.

Diese Erfahrungen bestättigen soviel, daß nie alles Licht, was auf ein Stück Glaß, oder sonst eine durchsichtige Masse fällt, hindurch gehe. Es wäre sehr interessant, in jedem besondern Fall genau zu wissen, in welchem Verhältniß das zurück geworfene und das zerstreuete Licht gegen das hindurch gehende stehe, und in wiefern dies Verhältniß sowohl von der Beschaffenheit der durchsichtigen Massen selbst, als auch von der Grösse des Einfallswinkels, abhänge. Was insbesondre das zerstreuete Licht betrift, so ist leicht zu erachten, daß die Menge desselben bey einer und eben derselben durchsichtigen Masse von der Tiefe abhängen werde, um welche das Licht hineindringt. Eine dickere Glaßtafel wird mehr Licht zerstreuen, als eine dünnere, wenn das Licht unter einerley Winkel auffällt. Wenn dagegen zwey Glaßtafeln gleiche Dicke haben, und das Licht unter einerley Winkel auffällt, so muß die Menge des zerstreueten Lichts in beyden gleich groß seyn, fals beyde gleich durchsichtig sind: wäre aber die eine durchsichtiger, als die andre, so würde in der ersten die Menge des zerstreueten Lichts nicht so groß, als in der andern seyn. Doch

könn=

könnten wohl beyde bey ungleicher Durchsichtigkeit gleich viel Licht, das unter einerley Winkel auffiele, zurück werfen. Weitere Untersuchungen hierüber werden unten vorkommen: hier war es genug, der Sache vorläufig zu erwehnen. Weil nemlich nunmehro die Theorie von der Erleuchtung desjenigen Bildes vorgetragen werden soll, das ein linsenförmiges Glaß wegen der Strahlenbrechung darstellet, so ist leicht zu erachten, daß eigentlich nicht alles dasjenige Licht dabey in die Rechnung gezogen werden müste, was auf die Vorderfläche des Glases fällt, sondern dasjenige, was nach Abzug des zurück geworfenen und zerstreueten Lichts würklich hindurch gehet. Hier aber wird beydes sowohl die Zurückwerfung, als auch die Zerstreuung des Lichts noch beyseit gesetzt, und die Sache so betrachtet werden, als wenn alles Licht, das von dem Object auf die Vorderfläche des Glases fällt, durch die Linse hindurch gienge, und im Bilde wieder vereiniget würde.

198. §.

74 F. Es sey also ADGB ein Schnitt durch die Axe AP eines linsenförmigen Sammlungs-Glases; die Axe desselben sey gegen die Mitte P eines Objects gerichtet, das aus der Mitte des Glases betrachtet, eine kreisförmig scheinende Gränze hat, deren Ebene auf der Axe des Glases senkrecht ist, und PQ = PR sey der Halbmesser des Objects. Ferner sey KB = KD der Halbmesser des kreisförmigen Umfangs der Linse, der hier kurz der Halbmesser des Glases heissen soll, und von den Halbmessern, der vordern und hintern Fläche der Linse

unter-

unterschieden werden muß. Auf die Ebene des kreisförmigen Umfangs der Linse würde das Object QR eben soviel Licht werfen, als es auf die Vorderfläche des Glases wirft, und man weis nun, daß es mit der Brechung des Lichts im Glase, fals nichts davon zurück geworfen oder zerstreuet würde, folgende Bewandniß hätte. Von jedem Punct P, Q, R, des Objects, es mag für sich leuchtend seyn, oder das anderswoher empfangene Licht auf das Glas zurück werfen, fällt auf das Glas ein Strahlenkegel PBD, QBD, RBD, alle zu einerley Kegel gehörige Strahlen werden durch die zweymahlige Brechung im Glase in die Lage gebracht, daß sie einen Kegel zusammen gehender Strahlen BpD, BqD, BrD ausmachen, wovon die Spitzen p, q, r, wieder beynahe in einerley Ebene liegen, die auf der Axe der Linse senkrecht ist. Jede Spitze eines dieser Kegel zusammengehender Strahlen ist das Bild der Spitze des dazu gehörigen Kegels aus einander fahrender Strahlen vor dem Glase, und alle Bilder zusammen machen das Bild des Objects aus, wovon pq, $= pr$ den Halbmesser, qr den Durchmesser vorstellt.

Man setze nun, wie im 178. §. den Halbmesser der Vorderfläche $= r$, den Halbmesser der Hinterfläche $= \varrho$, AP $= \delta$, Gp $= g$, so ist g, was im 178. §. x war, und man hat $g =$

$\frac{2r\varrho\delta}{(r+\varrho)\,\delta - 2r\varrho}$, wenn vorausgesetzt wird, daß die Dicke des Glases in Vergleichung mit δ und r, ϱ, sehr klein sey, wie ich bey den folgenden Untersuchungen allemahl annehmen werde: nur versteht es sich von selbst, daß der Fall nicht hieher gehört, wenn das Glas eine ganze Kugel ist. Noch setze man PQ $=$ PR $= p$, $pq = pr = q$, so ist $\delta : p = g : q$ (177. §.) also $q = \frac{g \cdot p}{\delta}$,

oder $q = \frac{2r\varrho \cdot p}{(r+\varrho)\,\delta - 2r\varrho}$.

199. §.

74 F. Der Glanz einer kreisförmigen Ebene QR ist bekannt, nebst ihrer Entfernung von der Linse BD, deren Axe den leuchtenden Kreis in seinem Mittelpunct senkrecht trift: auch ist des letztern Halbmesser nebst den Abmessungen der Linse gegeben: man soll die mittlere Klarheit des deutlichen Bildes qr finden.

Aufl. 1) Nimmt man den Glanz des Objects QR $= 1$ an, und die von demselben auf die Linse fallende Lichtmenge $=$ M, so hat man M aus dem 77. §. wenn man bemerkt, daß daselbst a, r, diejenigen Linien waren, die hier δ, p, heissen, und daß ϱ daselbst der Halbmesser des erleuchteten Kreises war, der hier KB $=$ KD ist. Es sey also hier KB $= b$, so hat man M $= \frac{1}{2}\pi^2 (\delta^2 + p^2 + b^2 - \surd((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4p^2 b^2))$. Weil nun mit Beyseitsetzung der Zurückwerfung und Zerstreuung des Lichts eben diese Lichtmenge sich in dem Bilde pq hinter dem Glase wieder vereinigen muß, dessen Fläche $= \pi q^2$ ist, so findet man die mittlere Erleuchtung des Bildes Y $= \frac{M}{\pi q^2} = \frac{1}{2}\pi \cdot$

1

$\frac{1}{g^2} . (\delta^2 + p^2 + b^2 - \surd ((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4 b^2 p^2))$.

2) Das Dreyeck BQD stellet einen Schnitt durch die Axe eines der äussersten auf die Linse fallenden Strahlenkegel vor, der zugleich auf seiner Grundfläche BD senkrecht ist, und BQ, DQ sind die in diesem Schnitt liegenden Seitenlinien des Kegels QBD. Es ist aber $BQ = \surd (\delta^2 + (p+b)^2)$, $DQ = \surd (\delta^2 + (p-b)^2)$, folglich $\frac{1}{2} (BQ^2 + DQ^2) = \delta^2 + p^2 + b^2$, und $BQ^2 . DQ^2 = (\delta^2 + p^2 + b^2) - 4p^2 b^2$, also $M = \pi^2 (\frac{1}{4} (BQ^2 + DQ^2) - \frac{1}{2} BQ . DQ)$, oder $M = \frac{1}{4}\pi^2 (BQ - DQ)^2$, und man hat auch $Y = \frac{1}{4}\pi (BQ - DQ)^2 : q^2$.

3) Vermöge der im 78. §. n. 2. erwiesenen Eigenschaft des Trapezii BDQR hat man $DQ^2 + QR . BD = BQ^2$, und $BQ^2 - DQ^2 = QR . BD = 4pb$, also $BQ - DQ = \frac{4pb}{BQ + DQ}$, und man erhält auch $M = \frac{\pi^2 p^2 b^2}{\frac{1}{4} (BQ + DQ)^2}$, so wie die mittlere Klarheit des Bildes $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2}$, oder auch $Y = \frac{\pi \delta^2 b^2}{\frac{1}{4} g^2 (BQ + DQ)^2}$, und weil $\frac{b}{g} = \text{tang } KpD$, so ist auch $Y = \frac{\pi \delta^2 \text{ tang } KpD^2}{\frac{1}{4} (BQ + DQ)^2}$.

4) Wenn das Object sehr weit entlegen ist, und der Bruch $\frac{b}{\delta}$ als verschwindend betrachtet

werden kann; so hat man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + p^2)}$, und $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 (\delta^2 + p^2)}$, oder auch $Y = \frac{\pi \delta^2 b^2}{g^2 (\delta^2 + p^2)}$. Weil ferner $\frac{b}{g} = \text{tang } GpD$, und $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + p^2}} = \cos PAQ$, so erhält man $Y = \pi \cdot \cos PAQ^2 \cdot \text{tang } GpD^2$.

80 F. 5) Ist das Sammlungsglaß eine ganze Kugel, wie ADGB, (80. Fig.) und $BAD = 2AD = 2AB$, dasjenige Segment der Kugel, welche das von QR auffallende Licht auffängt, den übrigen Theil der Kugel bedeckt angenommen; so hat man ebenfals $M = \frac{\pi^2 \cdot p^2 \cdot b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$, wenn $KD = KB = b$ gesetzt wird, und $Y = \frac{\pi \cdot p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2}$, oder $Y = \frac{\pi \cdot CP^2 \cdot KD^2}{\frac{1}{4} Cp^2 \cdot (BQ + DQ)^2}$. Man verzeichne das Rechteck CKDE, und ziehe Ep, so ist $\frac{CE}{Cp} = \frac{KD}{Cp} = \text{tang } CpE$, und man hat $Y = \frac{\pi \cdot CP^2 \text{ tg} \cdot CpE^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$: wenn demnach b so klein ist, daß man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + p^2)}$ annehmen kann, so wird $Y = \pi \cdot \cos PCQ^2 \cdot \text{tg } CpE^2$, weil hier $\delta = CP$, $g = Cp$ ist.

6) Es sey m ein Element der leuchtenden Fläche, die ihr Licht auf die Linse wirft, und n dasjenige

nige Element der Fläche des Bildes, woselbst das aus m ausgehende Licht sich wieder vereiniget. Verstehet man alsdenn durch p den unbestimmten Halbmesser Pm, so ist unbestimmt $pn = q = \frac{g}{\delta} \cdot p$. Wächst $Pm = p$ um das Differential $m\mu = dp$, so wächst $pn = q$ um das Differential $n\nu = dq = \frac{g}{\delta} \cdot dp$. Von allen gleichen Elementen des Ringes zwischen den Kreisen durch m und μ fällt gleich viel Licht auf die Linse, und die dazu gehörigen Elemente des Bildes liegen in dem Ringe zwischen den Kreisen durch n und ν. Demnach ist der Ring, dessen Breite $n\nu$ vorstellt, gleichförmig erleuchtet, wenn man annimmt, daß das Object QR in allen Elementen einen gleichen eigenen oder anders woher entlehnten Glanz habe.

200. §.

Wenn man sich an die Lehren von der Wirkung desjenigen Lichts erinnert, das von den Kugelspiegeln, und besonders von sphärischen Hohlspiegeln zurück geworfen wird, und dabey in Erwägung ziehet, daß das Licht, welches der Hohlspiegel zurück wirft, ein ähnliches Bild mache, wie dasjenige, was im Sammlungsglase gebrochen wird; so nimmt man leicht war, daß die Sätze des 198. und 199. §. nur mit geringer Aenderung auch beym Hohlspiegel ihre Anwendung finden. Es sey nemlich BAD ein Schnitt durch die Axe AP eines sphärischen Hohlspiegels, und diese Axe sey 33 F.

gegen die Mitte P eines Objects gerichtet, das aus der Mitte A des Spiegels gesehen eine kreisförmige Gränze hat, deren Ebene auf der Axe AP senkrecht ist, und PQ = PR sey der Halbmesser des Objects. Ferner sey KD = KB der Halbmesser vom kreisförmigen Umfange des Spiegels, der hier der Halbmesser der Oefnung des Spiegels heissen soll, und dieser Halbmesser KD sey in Vergleichung mit dem Halbmesser AC des Spiegels selbst sehr klein. Auf diese Ebene der Oefnung des Spiegels würde das Object QR eben soviel Licht werfen, als es auf die Fläche des Spiegels wirft, und man weis aus dem VIII. Abschnitt, daß es mit der Zurückwerfung des Lichts von der Spiegelfläche, wenn nichts davon verlohren gienge, folgende Bewandniß hätte. Von jedem Punct P, Q, R des Objects, (es mag übrigens dies Object kreisförmig seyn, oder sonst eine andre Gestalt haben,) fällt auf den Spiegel ein Strahlenkegel, wie PBD, QBD, RBD, und alle zu einerley Kegel gehörige Strahlen werden durch die Zurückwerfung in die Lage gebracht, daß sie einen Kegel zusammen gehender Strahlen BπD, BkD, BrD, ausmachen, wovon die Spitzen π, k, r wieder beynahe in einerley Ebene liegen, die auf der Axe des Spiegels senkrecht ist. Jede Spitze eines dieser Kegel zusammen gehender Strahlen ist das Bild der Spitze des dazu gehörigen Kegels auseinander fahrender Strahlen, und alle Bilder zusammen machen das Bild des Objects aus, wovon $\pi k = \pi r$ den Halbmesser, kr den Durchmesser in der Ebene PAQ genommen vorstellet. Wenn nun A$\pi = g$, AP $= \delta$, AC $= r$, PQ = PR $= p$,

πk

$\pi k = \pi r = q$ gesetzt wird; so ist $q = \frac{g \cdot p}{\delta}$, oder

$q = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} \cdot p$ (109. §.) weil dorten $f = \frac{1}{2}r$

war, so wie $g = \frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{\delta r}{2\delta - r}$.

201. §.

Der Glanz eines überal gleichförmig leuchtenden Körpers, der sein Licht auf einen sphärischen Hohlspiegel, oder ein linsenförmiges Sammlungsglas wirft, ist gegeben; nebst den Abmessungen des Hohlspiegels, oder der Linse: man soll die mittlere Klarheit des Bildes, welches die vom Spiegel zurückgeworfenen, oder in der Linse gebrochenen Strahlen darstellen, wenigstens in solchen Fällen finden, wenn die scheinbare Ausdehnung des leuchtenden Objects aus der Mitte des Spiegels, oder der Mitte der Linse gesehen, nicht beträchtlich groß ist.

Aufl. Die Auflösung dieser Aufgabe in ihrer völligen Allgemeinheit erfordert, daß man diejenige Lichtmenge, welche das leuchtende Object auf die Spiegelfläche, oder die Vorderfläche des Glases wirft, den Gründen gemäß finden könne, welche im IV. und V. Abschnitt umständlich sind auseinander gesetzt worden. Wenn das Object nicht kreisförmig ist, und dabey eine etwas beträchtliche scheinbare Grösse hat, so erfordert es gewöhnlich eine ziemlich weitläuftige Rechnung, um diese

Lichtmenge genau zu finden: die Aufgabe findet aber in den optischen Wissenschaften am meisten nur in solchen Fällen ihre Anwendung, wenn die scheinbare Grösse des leuchtenden Objects nicht sehr beträchtlich ist, mithin jeder scheinbare Durchmesser oder Halbmesser des Objects, wie PAQ (33. 74. Fig.) nur wenige Grade beträgt, gesetzt auch, daß für eine andre Lage der Ebene PAQ die Grösse dieses scheinbaren Halbmessers nicht wie bey kreisförmig scheinenden Objecten einerley wäre. Wird in Fällen dieser Art mit dem Halbmesser AP aus A eine Kugelfläche beschrieben, so kommt das Stück dieser Kugelfläche, was zwischen den scheinbaren Gränzen des leuchtenden Objects enthalten ist, einer in P auf AP senkrechten ebenen Fläche sehr nahe. Es sey QPR dies Kugelstück, so würde dasselbe bey einerley Glanz eben soviel Licht auf den Spiegel, oder das Sammlungsglas senden, als die dagegen scheinende Fläche des leuchtenden Objects dahin sendet. Die Oefnung des Spiegels oder des Glases ist, gewöhnlich in Vergleichung mit δ sehr klein, mithin würde das Licht, was die Fläche QPR dahin schickt, insgesammt beynahe unter einem rechten Winkel aus allen Elementen dieser Fläche QPR ausfliessen. Wäre die Fläche des Spiegels oder des Glases leuchtend, und eben so stark glänzend als RPQ, so würde sie nach QPR eben so viel Licht werfen, als sie selbst von QPR empfängt, und das Licht würde auf alle Elemente von QPR beynahe senkrecht fallen. Demnach kann man die senkrechte Erleuchtung suchen, welche der Kreis BD nach P schicken würde, und diese mit der Fläche QR multipliciren, so giebt

das

das wenigstens beynahe die Lichtmenge, welche QPR auf den Spiegel oder das Glas wirft. Diese Lichtmenge sey $= M$, die Fläche des Bildes $kr = \varepsilon^2$, und die gesuchte mittlere Erleuchtung $= Y$, so hat man $Y = \frac{M}{\varepsilon^2}$.

Der Glanz der leuchtenden Fläche sey $= 1$, so weis man, wenn das kreisförmige Object BD den Glanz $= 1$ hätte, daß es nach P die senkrechte Erleuchtung $\pi \sin APD^2 = \frac{\pi KD^2}{PD^2}$ schicken würde. Es sey also $KD = b$, die Fläche $QPR = E^2$, so ist die Lichtmenge, welche BD nach QR schicken würde, beynahe $= \frac{\pi E^2 \cdot b^2}{\delta^2}$, und eben so groß kann die gesuchte Lichtmenge M angenommen werden, so wie die gesuchte Erleuchtung $Y = \frac{\pi E^2 \cdot b^2}{\varepsilon^2 \delta^2}$ gefunden wird.

In dem Fall, wenn das leuchtende Object kreisförmig, und $PQ = PR = p$ dessen Halbmesser, so wie q des Bildes Halbmesser ist; hat man $\frac{E^2}{\varepsilon^2} = \frac{p^2}{q^2}$, also $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 \delta^2}$. Diese Formul kommt mit derjenigen überein, welche im 199. §. n. 4. für den Fall des kreisförmigen Objects, wenn es vom Glase weit entlegen ist, bereits ist gefunden worden. Es ist nemlich der Voraussetzung gemäß auch δ in Vergleichung mit p ziemlich groß,

 also

also $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 (\delta^2 + p^2)}$, wie a. a. O. gefunden ward, beynahe $= \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 \delta^2}$.

Will man für den Fall, wenn das Object kreisförmig ist, schärfer rechnen, so dient jede von den Formuln, welche im 199. §. für das Sammlungsglas sind entwickelt worden, auch für den Hohlspiegel. Auf den Spiegel fällt die Lichtmenge M $= \frac{\pi^2 p^2 b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$, und es ist die gesuchte mittlere Erleuchtung des Bildes $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2}$, oder $Y = \frac{\pi \delta^2 b^2}{\frac{1}{4} g^2 (BQ + DQ)^2}$.

Will man das Bild *kr* (33. Fig.) mit einer undurchsichtigen Fläche auffangen, so fängt eben diese Fläche auch einen Theil desjenigen Lichts auf, welches QR gegen den Spiegel wirft. Es sey diese Lichtmenge, welche solchergestalt aufgefangen wird, $= m$, so ist nun die Erleuchtung, welche der Spiegel dem Bilde zuschickt, $Y = \frac{M - m}{g^2}$, und man muß m noch besonders berechnen. Nimmt man an, daß diese undurchsichtige Fläche grade so groß sey, als die Fläche des deutlichen Bildes; so hat man in dem Fall, wenn jeder Halbmesser p in Vergleichung mit δ sehr klein ist, $m = \frac{E^2}{(\delta - g^2)} \cdot \varepsilon^2$, also $M - m = \left(\frac{\pi b^2}{\delta^2} - \frac{\varepsilon^2}{(\delta - g)^2}\right) \cdot E^2$,

$. E^2$, und $Y = \left(\frac{\pi b^2}{\varepsilon^2 \delta^2} - \frac{1}{(\delta - g)^2} \right) E^2$.

Wenn QR kreisförmig ist, so hat man schärfer

$m = \frac{\pi^2 p^2 . q^2}{\frac{1}{4}(kQ + rQ)^2}$, und $Y = \frac{\pi p^3 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ+DQ)^2}$
$- \frac{\pi p^2}{\frac{1}{4}(kQ + rQ)^2}$. Wie nun bey Anwendung dieser Formuln auf das Sammlungsglas noch angenommen ward, daß alles auf das Glas fallende Licht hindurch gehe, so wird auch bey der Anwendung auf den Spiegel noch vorausgesetzt, daß alles auffallende Licht zurück strahle. So wenig das eine, als das andre erfolgt in der Natur würklich, deswegen muß man die auffallende Lichtmenge M, oder $M - m$ noch in dem Verhältniß des auffallenden zum würklich zurückstrahlenden Licht vermindern, worüber im folgenden weitere Untersuchungen vorkommen werden. Wie übrigens aus diesen Schlüssen erhellet, daß einerley allgemeine Formuln dienen die Erleuchtung des Bildes zu finden, es mag das Licht im Sammlungsglase gebrochen, oder vom sphärischen Hohlspiegel zurück geworfen werden; so werde ich bey den folgenden Untersuchungen Kürze halber vornemlich nur des Sammlungsglases erwehnen, mit der Voraussetzung, daß alles auch auf den Hohlspiegel anzuwenden sey, was aus dem Umstand folgt, daß sich die Kegel der auffallenden Strahlen in soviele Kegel zusammengehender Strahlen verwandeln, davon die Spitzen das deutliche Bild ausmachen. Ich erinnere also nur kürzlich noch dieses, daß die im 199. §. n. 6. beygefügte Folgerung auch für das

Bild des Hohlspiegels gelte. Wenn das leuchtende Object kreisförmig ist, und überal einerley Glanz hat; so läßt sich das kreisförmige Bild aus seinem Mittelpunct in concentrische Ringe von unendlich kleiner Breite eintheilen, und jeder von diesen Ringen für sich ist alsdenn gleichförmig erleuchtet. Weil man übrigens in den optischen und astronomischen Wissenschaften die meiste Veranlassung dazu hat, diese Lehren auf kreisförmige Objecte anzuwenden; so werde ich im folgenden allemahl ein kreisförmiges Object verstehen, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt wird.

202. §.

74 F. **Das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Erleuchtung des Bildes in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunct ändert.**

Aufl. Wenn der unbestimmte Halbmesser Pm $= p$, der damit zusammengehörige Halbmesser des Bildes $pn = q$, und die Lichtmenge, welche der zum Halbmesser Pm gehörige Kreis auf die Linse wirft, = M gesetzt wird, so hat man aus dem 199. §. n. 1.

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2(\delta^2 + p^2 + b^2 - \surd((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2p^2)).$$

Wird hievon das Differential so genommen, daß man allein p als veränderlich betrachtet, so giebt dM diejenige Lichtmenge, welche der Ring, dessen Breite $m\mu$ vorstellt, auf die Linse wirft, und diese Lichtmenge ist im Bilde über dem Ringe, dessen Breite $n\nu$ vorstellt, gleichförmig ausgebreitet. Die Differentialrechnung giebt

$$dM = \tfrac{1}{2}\pi^2\left(2pdp - \frac{(\delta^2 + p^2 + b^2)2pdp - 2b^2.2pdp}{\surd((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2p^2)}\right),$$

oder

oder $dM = \pi^2 p dp \left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2 p^2)}} \right)$.
Nun sey die Erleuchtung des Ringes dessen Breite nv vorstellt, $=$ I, so giebt jene gefundene Lichtmenge durch die Fläche dieses Ringes $2\pi q dq$ dividirt die gesuchte Erleuchtung I. Vorläufig ist dabey zu bemerken, daß $\frac{p}{q} = \frac{\delta}{g} = \frac{dp}{dq}$ sey, weil $p = \frac{\delta}{g} \cdot q$ war: demnach findet man I $=$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2} \left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2 p^2)}} \right).$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist $=$ $(\delta^2 + p^2)^2 + 2\delta^2 b^2 - 2p^2 b^2 + b^4 =$ $(\delta^2 + p^2 - b^2)^2 + 4\delta^2 b^2$, also auch I $=$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2} \left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 - b^2)^2 + 4\delta^2 b^2)}} \right).$$

Der von 1 abgezogene Bruch wird $= 1$ wenn p unendlich groß genommen wird, in allen andern Fällen ist er kleiner als 1; und weil man ihn auch so ausdrücken kann: $\frac{1}{\sqrt{(1 + 4\delta^2 b^2 : (\delta^2 + p^2 - b^2)^2)}}$, so erhellet, daß derselbe beständig abnehme, wenn p abnimmt, mithin hat er seinen kleinsten Werth, wenn p verschwindet. Daraus aber folgt, daß I wachse, wenn p abnimmt, und umgekehrt I abnehme, wenn p wächst. Mithin sind die Ringe des Bildes desto mehr erleuchtet, je kleiner die da-

zuge-

zugehörigen Halbmesser sind, und in der Mitte des Bildes ist die Erleuchtung am grösten.

203. §.

Die Erleuchtung in der Mitte des Bildes soll künftig die centrale Klarheit oder Erleuchtung des Bildes heissen. Sie wird gefunden, wenn man in der gefundenen Formul $p = 0$ setzt, und man erhält $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2}\left(1 - \frac{\delta^2 - b^2}{\delta^2 + b^2}\right) = \frac{\pi\,\delta^2\,b^2}{g^2\,(\delta^2 + b^2)}$. Weil nun $\frac{b}{g}$ = tang GpD, und $\frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$ = cos APD, so ist auch die centrale Klarheit des Bildes $I = \pi$. cos APD^2 . tang GpD^2.

In dem besondern Fall $\delta = g$, hat man $I = \frac{\pi\,b^2}{g^2 + b^2} = \pi$. sin GpD^2. Wäre die Glaslinse ein eben so stark leuchtendes Object, als PR selbst, so würde sie die Stelle p grade eben so stark erleuchten.

Für die ganze Kugel ADGB (51. Fig.) hat man die centrale Erleuchtung $I = \pi$ cos APD^2. tang CpE^2, und wenn der Kugel Halbmesser $= r$ gesetzt wird, so ist $Cp = r + \frac{r\,(\delta + 4r)}{2\delta - r}$ (178. §.) Für ein sehr weit entlegenes Object aber $Cp = \frac{3}{2}r$, da dann p der eigentliche Brennpunct ist. Zugleich wird $I = \pi$ tang $CpE^2 = \frac{\pi\,b^2}{\frac{9}{4}\,r^2}$, oder

I =

$I = \frac{4}{9}\pi b^2 : r^2$. Würde das hintere Segment DGB von der Kugel abgeschnitten, damit allein das Planconvex Glas ADKB übrig bliebe, so wäre die Centrale-Erleuchtung im Brennpunct I $= \pi$ tang KpD^2 und $Kp = 2r$ (179. §.) mithin I $= \frac{\pi\ b^2}{4r^2}$. Für ein auf beyden Seiten gleich viel erhabenes Glaß aber hätte man $Kp = r$ (178. §.) also $I = \frac{\pi\ b^2}{r^2}$. Für diese drey Fälle also verhalten sich die Centrale Erleuchtungen im Brennpunct wie die Zahlen $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{4}$, 1, oder 16, 9, 36.

204. §.

1) Die Klarheit des Bildes an einer gegebenen Stelle, deren Abstand vom Mittelpunct $= q$ ist, wird gefunden, wenn man $p = \frac{\delta}{g}\ q$ nimmt, da dann die gesuchte Erleuchtung $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\ \delta^2}{g^2}$

$$\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 + b^2 - 2b^2}{\sqrt{\left((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2\ p^2\right)}}\right)$$

gefunden wird. (202. §.) Es ist aber

$$Bm^2 = \delta^2 + p^2 + 2bp + b^2$$
$$Dm^2 = \delta^2 + p^2 - 2bp + b^2$$

und das giebt

$$\tfrac{1}{2}(Bm^2 + Dm^2) = \delta^2 + p^2 + b^2$$
$$Bm^2 . Dm^2 = (\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2\ p^2;$$

also $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\ \delta^2}{g^2} \cdot \left(1 - \frac{(Bm^2 + Dm^2) - 4b^2}{2 . Bm . Dm}\right)$.

Es

Es ist ferner $BD = 2b = \sqrt{(Bm^2 - 2Bm \,.\, Dm \cos BmD + Dm^2)}$ also $\cos BmD = \frac{Bm^2 + Dm^2 - 4b^2}{2Bm \,.\, Dm}$, 453. §. Geom.) und $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2}(1 - \cos BmD) = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2} \sin v \,.\, BmD$, oder $I = \frac{\pi\, \delta^2}{g^2}(\sin \frac{1}{2} BmD)^2$. (434. §. Geom.

2) So lange $Pm = p$ in Vergleichung mit δ sehr klein ist, hat man beynahe $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2}\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 + b^2}{\delta^2 + p^2 + b^2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2} \,.\, \frac{2b^2}{\delta^2 + b^2 + p^2}$, oder $I = \frac{\pi\, \delta^2\, b^2}{g^2\,(\delta^2 + b^2 + p^2)}$. Es ist aber $\frac{1}{\delta^2 + b^2 + p^2} = \frac{1}{\delta^2 + b^2} - \frac{p^2}{(\delta^2 + b^2)(\delta^2 + b^2 + p^2)}$, folglich erhält man $I = \frac{\pi\, \delta^2\, b^2}{g^2\,(\delta^2 + b^2)}\left(1 - \frac{p^2}{\delta^2 + b^2 + p^2}\right)$. Der Factor vor der Parenthese ist die centrale Erleuchtung, und wenn b in Vergleichung mit δ sehr klein ist, so hat man beynahe $\frac{\delta^2}{\delta^2 + b^2} = \cos APD^2 = 1$, und $\frac{p^2}{\delta^2 + p^2 + b^2} = \frac{p^2}{\delta^2 + p^2} = \sin PAm^2$, also $I = \pi \tan GpD^2\, (1 - \sin PAm^2)$.

3) Weil

3) Weil das Auge eine sehr geringe Verschiedenheit der Klarheit in verschiedenen Stellen des Bildes nicht unterscheidet; so wird das Bild überal einerley Klarheit zu haben scheinen, wenn der scheinbare Halbmesser PAQ des Objects sehr klein ist: am allerwenigsten nimmt das Auge die Verschiedenheit der Klarheit leicht war, wenn selbige durch unmerkliche Stuffen in solchen Elementen einer Fläche, die an einander gränzen, allmählig wächst, oder abnimmt. Deswegen könnte die Klarheit des Bildes gegen den Umfang zu wohl bis auf den 20sten Theil abgenommen haben, ohne daß das Auge diesen Unterscheid der Klarheit empfände. Gesetzt also es hätte die Klarheit in einer gewissen Entfernung vom Mittelpunct schon um den 20sten Theil abgenommen, so ist $\sin PAm^2 = \frac{1}{20}$, $= 0,05$, also $\sin PAm = 0,2236$, und dazu gehört ein Winkel von $12° \; 55'$. Wenn also der scheinbare Halbmesser des Objects nur nicht 13 Grade übertrift, so wird das Auge in der Klarheit des Bildes gegen den Umfang zu keine merkliche Verschiedenheit von der Klarheit des Mittelpuncts warnehmen.

205. §.

Die leuchtende Kugel *QWR* wirft ihr Licht auf die Glaslinse *BD*, und die Axe der letztern ist gegen den Mittelpunct der Kugel gerichtet: man sucht die Erleuchtung des Bildes *qr*.

Aufl. 1) Wenn O der Kugel Mittelpunct ist, und man ziehet DO, so ist die auf das Glas fallende Lichtmenge $M = 2\pi^2 r^2 \sin v . AOD$ (62. §.)

KD $= b$ gesetzt, und den Halbmesser der Kugel OW $= r$. Ferner ist $\sin v \,.\, AOD =$ $\frac{\sin AOD^2}{1 + \cos AOD}$, $\sin AOD = \frac{b}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$, $\cos AOD = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$, KO $= \delta$ gesetzt, also

$$\sin v \,.\, AOD = \frac{b^2}{\delta^2 + b^2 + \delta\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}.$$

Noch sey wie bisher der Halbmesser des Bildes $pq = q$, der Abstand K$p = g$, die mittlere Erleuchtung $= Y$, so hat man KQ : OQ $=$ Kp : pq, also $q = \frac{gr}{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}$, und Y $=$

$$\frac{2\pi b^2 (\delta^2 - r^2)}{g^2 (\delta^2 + b^2 + \delta\sqrt{(\delta^2 + b^2)})}.$$

Es ist aber $\frac{b}{g} = \text{tang } KpD$, $\frac{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}{\delta} = \cos PKQ$, $\frac{b}{\delta} = \text{tang } KOD$: wird also PKQ $= \alpha$, KOD $= \omega$ gesetzt, so ist $Y = \frac{2\pi \cos\alpha^2 \text{ tg} \,.\, KpD^2}{\sec KOD^2 + \sec \,.\, KOD}$, oder $Y = \frac{2\pi \cos\alpha^2 \text{ tg} \,.\, KpD^2}{\sec\omega (1 + \sec\omega)}$.

Ist b in Vergleichung mit δ sehr klein, so hat man $Y = \pi \cos\alpha^2 \text{ tg } KpD^2$, wie im 199. §., weil alsdenn $\sec\omega$ sehr nahe $= 1$ ist.

2) Um die centrale Erleuchtung des Bildes zu finden, erwäge man folgendes. Die Strahlen welche das Element W in der Mitte der dem Glase

zuge-

zugekehrten Halbkugel auf das Glas sendet, vereinigen sich in dem mittlern Element p des Bildes. Man setze, jenes Element der Kugel sey ein Kreis, dessen Halbmesser $= w$, das mittlere Element des Bildes aber ein Kreis, dessen Halbmesser $= u$, beyde unendlich klein angenommen; so ist $\delta - r : g = w : u$, oder $\frac{w}{u} = \frac{\delta - r}{g}$. Wäre nun die Glasscheibe BD leuchtend und eben so stark glänzend, als das Element W, so fiele auf W die Lichtmenge $\pi w^2 . \pi \sin KWD^2$, (50. §. n. 1.) Eben so groß ist auch die Lichtmenge, welche das Element W auf das Glas wirft, (42. §.) mithin die centrale Erleuchtung des Bildes I $=$

$$\frac{\pi w^2 \sin KWD^2}{u^2} = \frac{\pi (\delta - r)^2 \sin KWD^2}{g^2}.$$

Noch hat man $\sin KWD = \frac{b}{\sqrt{((\delta - r)^2 + b^2)}}$, mithin wird $I = \frac{\pi (\delta - r)^2 b^2}{g^2 ((\delta - r)^2 + b^2)}$ gefunden.

Wie nun $\frac{b}{g} = \text{tang } KpD$, und

$\frac{\delta - r}{\sqrt{((\delta - r)^2 + b^2)}} = \text{cos} . KWD$ ist, so hat man auch $I = \pi \cos KWD^2 \text{ tang } KpD^2$.

3) In solchen Fällen, wenn b in Vergleichung mit $\delta - r$ sehr klein ist, erhält man $I = \pi \text{ tang } KpD^2$.

3) Wird eben diese Voraussetzung, daß b in Vergleichung mit δ und $\delta - r$ sehr klein sey, beybehalten; so läßt sich auf folgende Art die Erleuchtung des Bildes in gegebener Entfernung vom

Mittelpunct finden. Es sey Zz ein Element des grösten Kreisbogens QWR, woraus durch Umdrehung der Figur um die Axe KO eine unendlich kleine Zone wird. Man ziehe ZKn, und ZV auf KO senkrecht, setze den Winkel $WOZ = \varphi$, $WKZ = \psi$, so ist $pn = g \text{ tg} . \psi$ und die Fläche des Kreises, wozu dieser Halbmesser gehört, $= \pi g^2 \text{ tg} \psi^2$. Ueber diesen Kreis verbreitet sich das Licht, so das Segment ZWY auf das Glas wirft, und wenn dies Segment um die Zone $ZzYy$ wächst, so wächst jener Kreis um den Ring $n\nu = 2\pi g^2 \text{ tg} \psi \, d . \text{tg} . \psi$; auf diesen Ring also wirft die Zone $ZzYy$ ihr Licht. Nun stelle Zz ein Element der Zone $ZzYy$ vor, so ist vermöge der Voraussetzung beynahe für alle auf das Glas fallende Strahlen der Ausflußwinkel $90° - KZX$, so wie der Einfallswinkel $90° - OKZ$ einerley, mithin die Lichtmenge, welche Zz auf das Glas schickt $= \frac{Zz \, . \, \pi b^2 \, . \cos KZX \cos\psi}{KZ^2}$. (36. §.)

Alle Elemente der Zone schicken gleichviel Licht auf das Glas, weil für sie alle Ausfluß- und Einfallswinkel einerley bleiben, und die Fläche der Zone ist $2\pi r^2 \, d\varphi \sin\varphi$; mithin die gesammte Lichtmenge, welche die Zone auf das Glas schickt,

$$= \frac{2\pi^2 r^2 b^2 \cos(\varphi + \psi) \cos\psi \, d\varphi \sin\varphi}{KZ^2}, \text{ und}$$

die Erleuchtung des Ringes $n\nu$ findet man $=$

$$\frac{\pi r^2 b^2 \cos(\varphi + \psi) \cos\psi \, d\varphi \sin\varphi}{KZ^2 \, . \, g^2 \, . \text{tang}\psi \, . \, d \, . \text{tg}\psi}.$$ Es ist aber

$$\text{tang}\psi = \frac{r \sin\varphi}{\delta - r \cos\varphi}, \text{ also } d \, . \text{tg}\psi =$$

(δ − r

$$\frac{(\delta - r\cos\varphi)\, r d\varphi \cos\varphi - r^2 \sin\varphi^2\, d\varphi}{(\delta - r\cos\varphi)^2} =$$

$\dfrac{r d\varphi\,(\delta\cos\varphi - r)}{(\delta - r\cos\varphi)^2}$; setzt man also die gesuchte Erleuchtung $= y$, so findet man $y =$
$\dfrac{\pi b^2 \cos(\varphi + \psi)\cos\psi^2\,(\delta - r\cos\varphi)^2}{KZ\,.\,g^2\,.\,(\delta\cos\varphi - r)}$. Weiter ist $\cos(\varphi + \psi) = \dfrac{\delta\cos\varphi - r}{KZ}$, und $KZ\cos\psi$ $= \delta - r\cos\varphi$; also $\dfrac{(\delta - r\cos\varphi)^2}{KZ^2} = \cos\psi^2$, und es wird $y = \dfrac{\pi\, b^2 \cos\psi^4}{g^2}$.

Hieraus wird die centrale Erleuchtung eben so, wie vorhin $= \pi$ tang KpD^2 gefunden. Weil übrigens $\cos\psi^4 = (1 - \sin\psi^2)^2 = 1 - \sin\psi^2(2 - \sin\psi^2)$ ist, so hat man beynahe $y = \dfrac{\pi\, b^2}{g^2}\,(1 - \sin\psi^2$ $(2 - \sin\psi^2))$. Vergleicht man diese Formul mit derjeninigen, welche im 161. §. n. 2. gefunden ward, so findet man einerley centrale Erleuchtung, wenn $\psi = 0$ gesetzt wird. Das Bild einer in W auf KO senkrechten leuchtenden Ebene würde im Mittelpunct p eben so, wie das Bild der Kugel erleuchtet seyn. In gleichen scheinbaren Entfernungen vom Mittelpunct aber ist das Bild der Kugel schwächer als das Bild der Ebene erleuchtet, weil für einerley scheinbare Entfernung ψ von der Mitte W die Elemente der Kugel das Licht unter einem kleinen Ausflußwinkel auf das Glas senden, als es von den Elementen der Ebene ausgehet. Die Abnahme der Erleuchtung gegen den Umfang des Bildes der Kugel würde noch weit grösser seyn, wenn nicht gleiche Elemente des Bildes mit desto grössern Elementen der Kugel zusammen gehörten, je grösser ψ wird, wogegen die Elemente der Ebene nicht so schnell wachsen.

Wenn der scheinbare Durchmesser der Kugel nur klein ist, so wird wiederum die Klarheit des Bildes beynahe überal einerley seyn, und weil das Auge geringe Verschiedenheiten der Klarheit nicht unterscheidet, so kann man wie im vor. §. suchen, wie groß der scheinbare Halbmesser der Kugel seyn könne, wenn das Auge die Klarheit des Bildes noch für gleichförmig halten wird. Man nehme wie vorhin an, daß diese Klarheit bis auf den 20sten Theil abnehmen könne, ohne daß es dem Auge bemerklich wird, und setze $\sin\psi^2 (2 - \sin\psi^2) = \frac{1}{20}$, also $\sin\psi^4 - 2 \sin\psi^2 = - 0{,}05$, so findet man $\sin\psi^2 = 1 - \sqrt{(1 - 0{,}05)} = 0{,}0253206$, und $\sin\psi = 0{,}15862$, also $\psi = 9^\circ\, 8'$. Wenn demnach der scheinbare Halbmesser der Kugel nicht über 9° beträgt, so scheint das Bild der Kugel noch überal einerley Klarheit zu haben.

206. §.

74 Alle von der Linse auf das Bild fallende Kegel
33 F. zusammen gehender Strahlen BDp, BDq, BDr, u. s. f. auch eben so alle von dem Hohlspiegel BAD (33. Fig.) auf das Bild $k\pi r$ fallende Kegel BDk, $BD\pi$, BDr, haben den conischen Raum BHD mit einander gemein, und die Länge desselben KH findet

findet man vermittelst der Proportion (74. Fig.) $pr : KD = pH : KH$, woraus $pr + KD : KD = pH + HK : KH$, also $KH = \frac{KD \cdot Kp}{pr + KD}$, oder $KH = \frac{b \cdot g}{b + q}$ gefunden wird: also $pH = g - \frac{bg}{b+q} = \frac{gq}{b+q}$. Für den Hohlspiegel (33 Fig.) ist ebenfals $KH = \frac{b \cdot g}{b + q}$, und $\pi H = \frac{q \cdot g}{b + q}$. Wenn man also mit einer auf der Axe der Linse senkrechten Ebene EF das durch die Linse fallende Licht in einer Entfernung $KC < \frac{b}{b + q} \cdot g$ auffängt, so ist der Kreis IL, als der solchergestalt zuwege gebrachte Schnitt des Kegels BHD in allen Elementen gleich stark erleuchtet. Die Schnitte aller nach dem Bilde zu zusammen gehender Strahlenkegel breiten sich in den Raum EF aus, und sie haben den Theil IL dieses Raums mit einander gemein; mithin ist der Kreis IL gleichförmig, und dabey stärker als der übrige ihn umgebende ringförmige Raum erleuchtet, dessen Klarheit von I nach E und von L nach F abnimmt, bey E und F aber verschwindet: oder wie man sich eben die Sache auch vorstellen kann, der eben erwehnte Ring liegt im Halbschatten, der sich bey I und L in die Klarheit des Kreises IL, bey E und F aber in den vollen Schatten verliert. Wenn demnach alle Kegel in dem einzigen BpD zusammen fielen, so wäre der Schnitt ST des Kegels BpD eben so stark, als der Schnitt IL des Kegels BHD erleuchtet; und wenn man die ganze durch die Linse fallende Lichtmenge = M setzt, so wäre die Klarheit des Kreises ST bey der angenommenen Voraussetzung $= \frac{M}{\pi \cdot CS^2}$, mithin ist die Klarheit des Kreises IL eben so groß: und wenn man die Entfernung KC $= a$ annimmt, so ist CS $= \frac{(g-a)\,b}{g}$, und die Erleuchtung des Raums IL $= \frac{g^2\,M}{\pi \cdot (g-a)^2\,b^2}$.

Es war aber M $= \frac{\pi^2\,p^2\,b^2}{\frac{1}{4}\,(BQ + DQ)^2}$. (199. §. n. 3.), also ist die Erleuchtung des Raums IL $= \frac{\pi\,p^2\,g^2}{\frac{1}{4}\,(g-a)^2\,(BQ+DQ)^2}$. Beym Hohlspiegel finden diese Formuln ebenfals ihre Anwendung, so wie alles übrige, was ich, noch weiter aus Betrachtung der in den Puncten des deutlichen Bildes zusammengehenden Lichtkegel herleiten werde, welches ich Weitläuftigkeit zu vermeiden hier ein für allemahl erinnere. Aus Vergleichung der 33. Fig. mit der 74sten wird alles von selbst einleuchtend, woselbst auch, um die Vergleichung zu erleichtern größtentheils, bis auf ein paar Ausnahmen, einerley Buchstaben gebraucht sind.

207. §.

75 F. Die 75ste Fig. stellt die Ebene EF, welche das durch die Linse fallende Licht auffängt, mit den merkwürdigsten der eben beschriebenen Kreise besonders

sonders vor. Man vergleiche damit die 74. Figur, und stelle sich zuerst alle von jedem Punct des kreisförmigen Objects auf die Linse fallenden Strahlenkegel BQD, BPD, BRD vor; so erhellet, daß die Axen KQ, KP, KR aller dieser auffallenden Strahlenkegel in dem conischen Raum KRQ enthalten sind, dessen Grundfläche der kreisförmige Gegenstand selbst ist, und dessen Spitze im Mittelpunct K der Linse liegt. In dem conischen Raum Krq hinter der Linse, welcher dem vorigen entgegen gesetzt ist, liegen die Axen Kr, Kp, Kq, aller nach der Brechung hinter der Linse wieder zusammen gehender Strahlenkegel BDp, BDq, BDr, und das deutliche Bild qr ist ein Schnitt dieses conischen Raums auf seiner Axe Kp senkrecht. Jede andre auf eben der Axe Kp senkrechte Ebene EF schneidet den Kegel Krq gleichfals, der Schnitt ist ein Kreis πk, und in dem Raum dieses Kreises liegen die Mittelpuncte aller kreisförmigen Schnitte der nach dem deutlichen Bilde zu convergirender Strahlenkegel mit der Ebene EF. In dem Raum eines jeden dieser kreisförmigen Schnitte EL, ST ist das Licht verbreitet, welches auf einen einzigen Punct r oder p des deutlichen Bildes fallen würde. Aus dem Kreise πk wird das deutliche Bild qr, wenn die Ebene EF um den Abstand Kp vom Glase entfernt wird; wäre EF eine perspectivische Tafel und K die Stelle des Auges, so wäre πk die Projection des Bildes qr; es soll also der Kreis πk das projicirte Bild heissen, um ihn von den übrigen Kreisen zu unterscheiden. In der 33. Fig. welche dies alles für den Hohlspiegel vorstellt, ist das projicirte Bild mit pq, so wie das deutliche Bild mit den Buchstaben kr bezeichnet. Bey den übrigen Kreisen findet man eben die Buchstaben, wie in der 74. Figur. Jeder von den Kreisen wie EL, ST, IF, in dessen Raum das Licht zerstreuet ist, so sich in einem einzigen Punct r, p, q, des deutlichen Bildes (oder r, π, k, in der 33. Fig.) sammlen würde, soll ein **Zerstreuungskreis** heissen, und man bemerkt dabey leicht aus Betrachtung der 74. Fig. daß nicht allein alle diese Zerstreuungskreise gleich groß sind, sondern auch einer von ihnen, derjenige nemlich, dessen Licht sich im Mittelpunct p des deutlichen Bildes sammlen würde, mit dem projicirten Bilde πk einerley Mittelpunct habe. Setzt man wie bisher KC $= a$, K$p = g$, KD $= b$, $pq = pr = q$; so ist der Halbmesser Cπ des projicirten Bildes $=$

$\frac{a \cdot q}{g}$, der Halbmesser CS des Zerstreuungskreises

$$= \frac{(g - a) \cdot b}{g}.$$

208. §.

Diese Betrachtungen vorausgesetzt zeichnet man die 75ste Fig. leicht auf folgende Art. Aus dem Mittelpunct C verzeichnet man das projicirte Bild πk, und den damit concentrischen Zerstreuungskreis ST. Man nehme ferner einen Punct π im Umfang des projicirten Bildes für den Mittelpunct eines neuen Zerstreuungskreises EL, so ist dies einer der äussersten, und CE ist der Halbmesser des ganzen undeutlichen Bildes. Ein Kreis EF

EF aus C mit dem Halbmesser CE beschrieben, berührt den Zerstreuungskreis EL von aussen, und ein Kreis IL mit dem Halbmesser CL beschrieben, berührt ihn von innen. Jeder Punct der Fläche des Kreises IL liegt in allen Zerstreuungskreisen zugleich, oder alle Zerstreuungskreise haben den kreisförmigen Raum IL mit einander gemein: also siehet man, wie im vor. §. daß die Erleuchtung des Kreises IL eben so groß sey, als sie seyn würde, wenn alle Zerstreuungskreise mit dem mittelsten ST zusammen fielen; daß mithin diese Erleuchtung $= \frac{M}{\pi \cdot CS^2}$ sey. Um auch den Kreis IL von den übrigen zu unterscheiden, soll derselbe das falsche Bild heissen.

Es sey der Halbmesser des projicirten Bildes $C\pi = SI = r$, des Zerstreuungskreises $CS = \varrho$, und des falschen Bildes Halbmesser $CI = s$, so ist $s = \varrho - r$, die Breite des ringförmigen Halbschattens $IE = LF = 2r$, und des ganzen undeutlichen Bildes Halbmesser $CE = \varrho + r$. Die Erleuchtung des falschen Bildes sey $= Y$, so ist $Y = \frac{M}{\pi \varrho^2}$. Es war aber $C\pi = r = \frac{aq}{g}$ und $CS = \varrho = \frac{(g-a)\,b}{g}$: also ist des falschen Bildes Halbmesser $s = \frac{(g-a)\,b - aq}{g} = b - \frac{a\,(b+q)}{g}$, und die Breite des Halbschattenringes

ges $= \frac{2aq}{g}$. Die Erleuchtung Y $=$
$\frac{g^2 M}{\pi (g-a)^2 b^2}$, wie im 206. §.

209. §.

75 F. Das Gesetz zu finden, nach welchem die Erleuchtung des Halbschattenringes in grössern Entfernungen vom Mittelpunct abnimmt.

Aufl. Es sey P ein Element des Ringes, und aus P als dem Mittelpunct sey ein Kreis beschrieben, dessen Halbmesser so groß als der Halbmesser der Zerstreuungskreise ist; so wird derselbe den Umfang des projicirten Bildes in M und N schneiden, weil CP $< r + \varrho$ ist. Weil nun der Abstand eines jeden Puncts Q in der mondförmigen Figur MNO von P kleiner als der Halbmesser ϱ der Zerstreunngskreise ist, so liegt P innerhalb der Fläche aller Zerstreuungskreise, deren Mittelpuncte in der Lunula MNO liegen, und empfängt mithin Licht von allen diesen Zerstreuungskreisen. Wie nun jedes Element des falschen Bildes von allen Zerstreuungskreisen Licht empfängt, so verhält sich die Erleuchtung des falschen Bildes zur Erleuchtung der Stelle P des Ringes, wie die Fläche des projicirten Bildes zur Lunula MNO.

210. §.

74 F. Wenn die Entfernung KC $= a$ wächst, so nimmt $s = b - \frac{a(b+q)}{g}$ ab, und verschwindet,

wenn

wenn $a = \frac{bg}{b+q} =$ KH ist; (206. §.) zugleich wächst die Erleuchtung des falschen Bildes $\frac{M}{\pi \varrho^2} = \frac{g^2 M}{\pi (g-a)^2 b^2}$, und sie wird $= \frac{(b+q)^2 M}{\pi b^2 q^2}$ in dem Fall $a = \frac{bg}{b+q}$, mithin grösser, als die Erleuchtung des deutlichen Bildes. Diese ist $= \frac{M}{\pi q^2}$, und die Erleuchtung des falschen Bildes ist ihr gleich in dem Fall $a = \frac{g(b-q)}{b}$. Vergleicht man die 74ste Figur hiemit, so fällt der Grund der erwehnten Aenderungen leicht in die Augen. Mit a wächst $r = \frac{aq}{g}$, aber $\varrho = \frac{(g-a)b}{g}$ nimmt ab, also muß zuletzt $s = \varrho - r = 0$ werden, oder $\varrho = r$. Nun ist eigentlich kein falsches Bild vorhanden, die mittelste Stelle des undeutlichen Bildes ist am stärksten erleuchtet, und die Erleuchtung nimmt vom Mittelpunct gegen den Umfang zu ab. Die Kreise πk, ST, fallen in einen zusammen, wie es die 76ste Fig. vorstellt, und nur die mittelste 76 F.
Stelle C des undeutlichen Bildes liegt in allen Zerstreuungskreisen zugleich.

211. §.

Wächst a noch weiter, so wächst auch r, und ϱ nimmt noch ab, also wird $s = \varrho - r$ negativ, und wächst mit a und r. Wenn nemlich in der 74. Figur

gur. Die Ebene EF in die Lage $\eta\vartheta$ gerückt ist, so hat CI in die Lage $\alpha\gamma$ angenommen, die der vorigen entgegen gesetzt ist. Wie es nun hier nicht so sehr auf die Lage als auf die Grösse des Halbmessers $\alpha\gamma = s$ ankommt; so kann man nun $s = r - \varrho$ annehmen, da dann $\varrho < r$ ist, wie es die 77ste Fig. vorstellt. Die Breite des Halbschat-
77 F. tenringes ist nun $= 2\varrho$ und der Halbmesser des ganzen undeutlichen Bildes bleibt $= r + \varrho$. Diesemnach hat man nun $s = \frac{a\,(b+q)}{g} - b$, und dieser Ausdruck wächst mit a, bis $a = g$ wird, da dann $s = q$ gefunden wird, wie der Sache gemäß ist, weil sich nun das falsche Bild in das deutliche Bild qr verwandelt.

Wenn man sich innerhalb des Kreises IL einen Punct P wo man will als den Mittelpunct eines Zerstreuungskreises VW vorstellt, so erhellet, daß derselbe von allen Zerstreuungskreisen, deren Mittelpuncte innerhalb der Fläche VW liegen, Licht empfängt, und daß die Erleuchtung des Puncts P so groß sey, als die Erleuchtung des Kreises VW wäre, wenn alle diejenigen Zerstreuungskreise damit zusammen fielen, deren Mittelpuncte innerhalb VW liegen. Die Lichtmenge, welche alle diese Zerstreuungskreise fassen, sey $= \mu$, die Erleuchtung des Puncts $P = Y$, so ist $Y = \frac{\mu}{\pi\varrho^2}$. Aber alle Zerstreuungskreise, deren Mittelpuncte in der Fläche des Kreises πk liegen, fassen die Lichtmenge M. und es ist $M : \mu =$ der Kreis

πk

πk : Kreise $VW^2 = r^2 : \varrho^2$, also $\mu = \frac{M \varrho^2}{r^2}$,

und das giebt $Y = \frac{M}{\pi\ r^2}$. Weil diese Schlüsse von jedem Punct der Fläche des Kreises IL gelten, so ist dieser Kreis gleichförmig erleuchtet: seine Erleuchtung ist die gefundene $Y = \frac{M}{\pi\ r^2}$, oder $Y = \frac{g^2 M}{\pi a^2\ q^2}$, weil $r = \frac{a\ q}{g}$ war.

Eben diese Folge läßt sich aus Betrachtung der 74. Fig. auch so herleiten. Auf jeden Punct des deutlichen Bildes qr fällt ein Strahl von jedem Punct der Linse BD, weil jeder Punct des Bildes die Spitze eines Strahlenkegels, und seine Grundfläche die Linse ist. Man kann demnach umgekehrt sich die Sache auch so vorstellen, als fiele von jedem Punct der Linse ein Kegel auseinander fahrender Strahlen auf das Bild qr, wie Bqr, Kqr, Dqr. Alle diese Kegel haben den conischen Raum qHr gemein, und wenn man denselben mit einer auf der Axe Kp senkrechten Ebene $\eta\vartheta$ schneidet, so wird der Kreis, dessen Durchmesser $\beta\gamma$ ist, gleichförmig, und eben so erleuchtet, wie geschehen würde, wenn alle Kegel mit dem mittlern qKr zusammen fielen. In dem letztern Fall wäre die Erleuchtung $= \frac{M}{\pi . \alpha\varepsilon^2}$, und hier ist $\alpha\varepsilon$, was bisher mit r bezeichnet ist, so wie der Kreis $\beta\gamma$ das falsche Bild, und sein Halbmesser $\alpha\beta =$ 74 F.

$r - \varrho$

$r - \varrho$ ist: mithin wird die Erleuchtung des falschen Bildes $= \frac{M}{\pi r^2} = \frac{g^2 M}{\pi a^2 q^2}$, wie vorhin, gefunden.

In dem Fall $a = g$ findet man diese Erleuchtung $= \frac{M}{\pi q^2}$, wie der Sache gemäß ist, r wird $= q$, $\varrho = \frac{(g - a) b}{g}$ verschwindet, so wie auch die Breite des Halbschattenringes 2ϱ schwindet: das falsche Bild verwandelt sich nun in das deutliche Bild qr.

212. §.

Die Klarheit der Kreise II., $\beta\gamma$, unterscheidet sich merklich von der Klarheit der sie umgebenden Ringe, wenn man das Sonnenlicht durch die Linse fallen läßt, und selbiges mit einem weissen Papier senkrecht auffängt. So wie man das Papier vom Glase nach und nach entfernt, zieht sich der Kreis II. nach und nach zusammen, und wenn man ihn in der Entfernung KH vom Glase in einen Punct zusammen gehen, nachher aber bey grösserer Entfernung aufs neue wachsen und die Klarheit abnehmen siehet, so kann dies Licht verleiten, dafür zu halten, daß die Stelle H der Focus sey. Will man also die Brennweite eines Glases auf diese Art, wenn man das Sonnenlicht durchfallen läßt, suchen; so muß man das Papier langsam noch weiter vom Glase entfernen, so lange bis der helleste Kreis auf dem Papier nicht mehr mit Ringen von minderer Klarheit umgeben ist, sondern überal eine gleiche Klarheit hat. Weil übrigens die Ereluchtung in der Stelle H grösser, als die Erleuchtung des eigentlichen Focus ist, so ist kein Zweifel, daß auch nicht die Stelle H einer stärkern Hitze ausgesetzt seyn sollte, als die Elemente des eigentlichen Bildes, oder Focus qr.

213. §.

Wird $a > g$, so wird $\varrho = \frac{(g - a)\ b}{g}$ negativ, wovon sich die Ursache wieder leicht aus Betrachtung der 74 Fig. ergiebt. Man nimmt also $\varrho = \frac{(a - g)\ b}{g}$ an, wenn nicht so sehr die Lage, als nur die Grösse dieser Linie in Betrachtung kommt, alsdenn ist das $r + \varrho$ was bisher $r - \varrho$ war, und umgekehrt, was vorher $r + \varrho$ war, ist nun $r - \varrho$. Bisher nemlich, so lange $a < g$ war, blieb das falsche Bild ein Schnitt des Kegels BHD 74 F.
oder des ihm entgegen gesetzten r H q; in Entfernungen aber, die grösser, als g sind, verwandelt sich der Schnitt des Kegels rHq in den äussersten Umfang des ganzen undeutlichen Bildes. Die Linien Bq und Dr treffen verlängert die Axe Kp in einerley Punct h, und man hat $q : b = ph :$ Kh, also auch $b - q : b =$ K$h - ph :$ Kh, mithin K$h = \frac{b \cdot g}{b - q}$. Alsdenn stellt B$h$D den Schnitt durch die Axe eines Kegels vor, dessen mit der Grundfläche parallele Schnitte EF, $\eta\vartheta$, bisher mit dem äussersten Umfang des undeutlichen Bildes einerley waren: eben diese Schnitte aber werwandeln sich in

das falsche Bild, wenn $a > g$ angenommen wird. Demnach bleibt der Halbmesser des falschen Bildes $s = r - \varrho$, der Halbmesser des ganzen undeutlichen Bildes $= r + \varrho$, und die Breite des Halbschattenringes $= 2\varrho$, wenn man $\varrho = \frac{(a - g)\, b}{g}$ setzt. Die 78 Fig. stellet wiederum diesen
78 F.
Fall besonders vor, EF ist nun das falsche Bild, so wie IL der Umkreis des ganzen undeutlichen Bildes, ST, EL, sind Zerstreuungskreise, und πk ist das projicirte Bild. Die Erleuchtung des falschen Bildes bleibt wie im vor. §. $= \frac{M}{\pi r^2}$: denn auch in diesem Fall verhält sich noch die Summe der Zerstreuungskreise, welche auf jedes Element P des falschen Bildes Licht werfen, zur Summe aller Zerstreuungskreise, wie die Fläche des Zerstreuugskreises VW zur Fläche des falschen Bildes πk. Deswegen findet der Beweis des 211 §. auch hier seine Anwendung. Auch siehet man wohl bey Betrachtung der 74 Figur, daß die Kegel rDq, rKq, rBq, nunmehro den conischen Raum rhq mit einander gemein haben: wenn also dieselbe mit einer Ebene uv senkrecht geschnitten wird, so muß der Schnitt $\varphi\psi$ gleichförmig, und eben so erleuchtet seyn, wie $\omega\sigma$ erleuchtet wäre, wenn alle erwehnte Lichtkegel mit dem mittlern rKq zusammen fielen.

214. §.

Ob nun gleich $r = \frac{aq}{g}$ und $\varrho = \frac{(a - g)\, b}{g}$ beyde

beyde mit a zugleich wachsen; so wächst doch alsdenn $\frac{ab}{g}$ schneller als $\frac{aq}{g}$, wenn wie gewöhnlich $b > q$ ist, mithin wächst alsdenn auch ϱ schneller als r und es würde $s = r - \varrho = 0$, wenn $a = \frac{bg}{b-q} = Kh$ ist. (213. §.) Demnach verschwindet das falsche Bild zum zweyten mahl, und dieser Fall hat übrigens mit demjenigen, welchen die 76 Figur vorstellt, alle Aehnlichkeit: man kann sich in der 74sten Figur vorstellen, die Ebene uv sey nach ab gerückt, so müssen die Puncte φ, ψ, in h zusammen gehen, oder $\varphi\psi$ muß verschwinden.

Wächst a noch weiter, so daß $a > \frac{bg}{b-q}$ wird, mithin $ab - bg > aq$, so ist $\varrho > r$, und $r - \varrho$ negativ, wie denn auch leicht erhellet, daß $\delta\varphi$ in die Lage ce fällt, wenn die Ebene uv in die Lage il rückt. Man kann also abermahl wie anfangs $s = \varrho - r$ annehmen: des ganzen undeutlichen Bildes Halbmesser bleibt $r + \varrho$, also ist die Breite des Halbschattenringes wieder $= 2r$. Diesen lezten Fall stellet die 79 Fig. besonders vor, 79 F.
EF ist das falsche Bild, ST der Zerstreuungskreis, der nun wieder größer, als das projicirte Bild πk ist. Nun wird also das falsche Bild wieder so erleuchtet, als der mittlere Zerstreuungskreis ST erleuchtet würde, wenn alle übrige mit ihm zusammen fielen: mithin ist die Erleuchtung des falschen Bildes $= \frac{M}{\pi\varrho^2}$.

215. §.

Alle im 208 bis 214 §. betrachtete Fälle lassen sich nunmehro auf folgende Art kurz übersehen.

1. Fall.

Wenn $a < \frac{bg}{b+q}$ ist, so hat man $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g} r = \frac{aq}{g}$, (wie in allen übrigen Fällen) und $s = \varrho - r$; die Erleuchtung des falschen Bildes $Y = \frac{M}{\pi\varrho^2}$, die Breite des Halbschattenringes $l = 2r$.

2. Fall.

Ist $a = \frac{bg}{b+q}$, so wird $\varrho = \frac{bq}{b+q} = r$, $s = \varrho - r = 0$, $l = 2r = 2\varrho$, $Y = \frac{M}{\pi\varrho^2} = \frac{M}{\pi r^2}$.

3. Fall.

Es sey $a > \frac{bg}{b+q}$ und $< g$; so ist $r = \frac{aq}{g}$ (wie allemahl) $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g}$, $r > \varrho$, $s = r - \varrho$, $l = 2\varrho$, $Y = \frac{M}{\pi r^2}$.

4. Fall.

Wird $a > g$, bleibt aber noch $< \frac{bg}{b-q}$; so hat man

man $\varrho = \dfrac{(a-g)\,b}{g}$, $s = r - \varrho$, $l = 2\varrho$, $Y = \dfrac{M}{\pi r^2}$

5. Fall.

Die Voraussetzung $a = \dfrac{bg}{b-q}$ giebt $\varrho = \dfrac{qb}{b-q} = r$, $s = r - \varrho = 0$, $l = 2\varrho = 2r$, $Y = \dfrac{M}{\pi r^2} = \dfrac{M}{\pi \varrho^2}$.

6. Fall.

Wenn endlich $a > \dfrac{bg}{b-q}$ so ist $\varrho = \dfrac{(a-g)\,b}{g}$, $r = \dfrac{aq}{g}$ und $\varrho > r$; ferner ist $s = \varrho - r$, $l = 2r$, und $Y = \dfrac{M}{\pi \varrho^2}$.

216. §.

Wenn die Linse kein Sammlungs- sondern ein 81 F. Zerstreuungsglas ist, so liegt das Bild qr vor dem Glase, und hinter demselben liegen die zu jedem auffallenden Strahlenkegel BQD gehörigen Strahlen so, als kämen sie von dem damit zusammen gehörigen Punct q des Bildes her. (188 u. f. §. §.) Alle diese Kegel der hinter dem Glase auseinander fahrenden Strahlen haben den conischen Raum $eBDf$ gemein, dessen Spitze in h liegt: und wenn man in der Entfernung $Kc = a$ vom Glase das durchfallende Licht mit einer Ebene il senkrecht auf-

 fängt

fängt, so ist der Kreis ef am stärksten, und dabey gleichförmig erleuchtet. Fielen alle hinter dem Glase auseinander fahrende Lichtkegel mit dem einzigen BpD zusammen, so würde der Kreis st eben so stark erleuchtet seyn, als ef würklich erleuchtet ist; demnach ist die Klarheit des Kreises $ef = \frac{M}{\pi \cdot cs^2}$. Man kann also, wie beym Sammlungsglase, ef das falsche bild nennen, und st den Zerstreuungskreis, so wie πk das projicirte Bild ist, und il das ganze undeutliche Bild. Alle Formuln des 208 §. finden übrigens ihre Anwendung, wenn man die Brennweite des Glases, also auch g, und $q = \frac{\delta \cdot PQ}{g}$ negativ annimmt. Es bleibt nemlich $r = \frac{aq}{g} = c\pi$ positiv, und $\varrho = \frac{(a + g)\, b}{g} = cs$ ist ebenfalls positiv, (vermöge der allgemeinen Formul $\varrho = \frac{(g - a)\, b}{g} = - \frac{(a - g)\, b}{g}$ des 208 §.) auch grösser als $r = \frac{aq}{g}$, also hat man ferner $s = \varrho - r = ce = ef$, $l = 2r$, $Y = \frac{M}{\pi \varrho^2}$.

217. §.

Bey allen diesen Schlüssen ist nun wie bekannt, noch angenommen worden, daß alles auf das Glas

fallende

fallende Licht hindurch gehe, nichts zurückgeworfen, oder sonst zerstreuet werde. Wie nun aber allemahl ein Theil der ganzen Menge des auffallenden Lichts zurück bleibt, so nehme man an, die ganze auffallende Lichtmenge verhalte sich zu dem würklich hindurch gehenden Theil wie $1 : k$. Dies vorausgesetzt, ist der würklich durchgehende Theil $= k\,M$, wenn M die ganze auffallende Lichtmenge bezeichnet, und was zurück bleibt, ist $= (1 - k)\,M$. Mit der Zahl k müssen nun alle gefundene Formuln für die Erleuchtung des Bildes noch multiplicirt werden, wenn man die würkliche Erleuchtung haben will. Diesemnach ist die mittlere Erleuchtung des Bildes $Y = \dfrac{\pi\,.\,k\,.\,\delta^2 \text{ tang } Kp\,D^2}{\frac{1}{4}\,(BQ + DQ)^2}$ (199 §. n. 3.), so wie die centrale Erleuchtung $I = k\pi \text{ cos } APD^2 \text{ tang } KpD$. (204 §.) Für die mittlere Erleuchtung des Bildes im eigentlichen Brennpunct ist δ in Vergleichung mit b unendlich groß, also $\frac{1}{2}\,(BQ + DQ) = \surd(\delta^2 + p^2)$, und $Y = k\pi \text{ cos } PAQ^2 \text{ tang } KpD^2$, so wie $I = k\pi \text{ tang } KpD^2$

Könnte man das Glas von einer solchen Durchsichtigkeit wählen, daß $k = \text{cos } KpD_2$ wäre, so hätte man $I = \pi \text{ sin } KpD^2$ für die centrale Erleuchtung im eigentlichen Brennpunct der Linse. Aus Versuchen, die unten beschrieben werden sollen, wird sich ergeben, daß es Glasarten giebt, die so durchsichtig sind, daß für sie in der gewöhnlichen geringen Dicke eines Brennglases ohngefehr $k = \frac{15}{16} = 0{,}9315$ wird. Wäre nun diese Zahl $= \text{cos } KpD^2$, so müßte $\text{cos } KpD = 0{,}9682$ seyn, und $KpD = 14\frac{1}{2}°$. Dies gäbe $\text{tang } KpD =$

 0,2586,

0,2586, und der Brennpunctsabstand müßte $= \frac{10000 \,.\, b}{2586} = 3{,}867 \,.\, b$ seyn: für ein auf beyden Seiten gleichviel erhabenes Glas also $r = 3{,}867 \,.\, b$. Die centrale Klarheit $I = \pi \sin KpD^2$ des Sonnenbildes, wenn man das Sonnenlicht mit dem Glase auffängt, wäre demnach eben so groß, als wenn das Brennglas den Glanz der Sonne selbst hätte.

218. §.

74 F. Die senkrechte Erleuchtung, welche das Kreisförmige Object QR auf den Mitelpunct des Bildes werfen würde, wenn man die Linse wegnähme, sey $= i$, so hat man $i = \pi \sin KpQ^2$. Die mittlere Erleuchtung des Bildes für ein Object, das weit entlegen ist, war $Y = k\pi \cos PAQ^2 \operatorname{tg} . KpD^2$, in eben dem Fall ist beynahe $PAQ = KpQ$, also $Y = k\pi \cos KpQ^2 \operatorname{tg} KpD^2$, und das giebt $i : Y = \sin KpQ^2 : k \cos KpQ^2 \operatorname{tg} KpD^2$, oder $i : Y = \operatorname{tg} . KpQ^2 : k \operatorname{tg} KpD^2$.

Dagegen ist $i : I = \sin KpQ^2 : k \operatorname{tg} KpD^2$ und weil man $\frac{I}{i} = \frac{k \operatorname{tg} KpD^2}{\sin KpQ^2}$, mithin $k = \frac{I \,.\, \sin KpQ^2}{i \,.\, \operatorname{tg} KpD^2}$ erhält, so begreift man, wie sich k vermittelst eines Versuchs finden liesse. Kann man nemlich bey dem Versuch zuwege bringen, daß $i = I$ werde, so hat man $k = \frac{\sin KpQ^2}{\operatorname{tang} KpD^2}$. Weil ferner $\sin KpQ = \sin pKq$ (beym weit entfernten

Ob-

Object) $= \frac{q^2}{\sqrt{(g^2+q^2)}}$, und tang K$p$D $=$ $\frac{b}{g}$, so erhält man $k = \frac{g^2\ q^2}{(g^2+q^2)\,b^2}$. Es ist aber I $= \frac{k\ \pi\ b^2}{g^2}$, für einen weit entlegenen Gegenstand, so wie überhaupt I $= \frac{\pi\ \delta^2\ b^2}{(\delta^2 + b^2)\,g^2}$, demnach läßt sich I soviel als nöthig ist vermindern, damit I $= i$ werde, wenn man den Halbmesser b der Oefnung des Glases vermindert. Hat man aus starken Papier oder dünner Pappe Scheiben mit dem Glase von einerley durchmesser geschnitten, so kann man aus einer solchen Scheibe eine andre mit ihr concentrische ausschneiden, und mit dem übrig bleibenden Ring das Glas bedecken. Dies ist soviel, als ob man den Durchmesser oder Halbmesser des Glases kleiner gemacht hätte, und man muß hiernächst in den Formuln durch b den Halbmesser der Oefnung dieses Ringes verstehen.

Wenn die Linse, womit man den Versuch anstellet, aus mittelmäßig durchsichtigem Glase verfertiget ist, so findet man ohngefehr $k = \frac{5}{6}$, oder $k = \frac{6}{7}$, und die Menge des zurückgeworfenen und zerstreueten Lichts beträgt ohngefehr $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{7}$ der ganzen auf die Linse fallenden Lichtmenge. M. s. Lamberts Photomet. Part. II. Cap. III. §. 517. p. 244. sq.

219. §.

Man kann das vermittelst einer Linse AB schon gebrochene von dem Gegenstande MN kommende 82 F.

 Licht,

Licht, mit einer andern Linse DE, deren Axe mit der vorigen zusammen fällt, auffangen: dies wird den Erfolg haben, daß dies Licht in der zweyten Linse von neuen eine zweymahlige Brechung leidet. Ohne nun schon allgemein zu untersuchen, was diese Strahlenbrechung in der zweyten Linse für einen Erfolg hat, welches am besten der Dioptrik vorbehalten bleibt, erhellet folgendes. Die Entfernung KC beyder Linsen von einander kann grösser oder kleiner seyn, als der Abstand K*p* des ersten Bildes *mn* vom ersten Glase AB; es kann aber auch KC < K*p* seyn. Die 82 Fig. stellt den ersten Fall vor, und dieser soll hier zuerst erwogen werden. Es sey also die Entfernung beyder Linsen von einander grösser, als der Abstand des Bildes *mn* von der ersten, am nächsten beym Object befindlichen Linse; so verwandeln sich die Kegel zusammen gehender Strahlen A*m*B, A*p*B, A*n*B, deren Spitzen das Bild ausmachen, hinter dem Bilde in entgegen gesetzte Kegel auseinander gehender Strahlen, und diese fallen auf die zweyte Linse DE zwar eben so, als wenn das Bild *mpn* ein Object wäre, und von jedem Punct desselben auf DE ein Strahlenkegel fiele: doch ist dabey dieser Unterschied zu bemerken. Wäre *mpn* ein Object, wie MPN, so fiele von jedem Punct desselben auf das Glas DE ein Strahlenkegel, dessen Grundfläche mit der Fläche des Glases, als eine ebene Kreisfläche betrachtet, einerley wäre: denn bey dieser Voraussetzung, würde jeder Punct, wie *m*, *p*, *n*, nach allen Seiten Licht um sich her verbreiten. Nun aber kann ein solcher Punct nicht mehr Licht nach DE senden, als in dem Raum eines Kegels, wie F*m*G $\alpha p \beta$ enthalten

halten ist, und man bemerkt leicht, daß es auf die Grösse des Umfangs der Linse DE ankommen werde, ob sie alles Licht, das in einem solchen Kegel enthalten ist, auffangen könne, oder nicht. In dem hier vorgestellten Fall fängt DE zwar den ganzen Lichtkegel $\alpha p \beta$ auf, nicht aber den ganzen Kegel FmG.

220. §.

Es stelle nun der Kreis ERDS den Umfang der Linse DE (83 Fig.) besonders vor, so ist die Voraussetzung, daß die Ebene dieses Kreises auf der Axe PK senkrecht, mithin die Ebene dieses Kreises mit der Ebene des Umfangs der Linse AB parallel sey. Diesemnach sind die Schnitte der Kegel, welche vom Bilde aus gegen DE zu auseinander gehen, mit der Ebene RDSE insgesamt Kreise: doch ist nur einer davon mit dem Umfang der Linse DE concentrisch, und das ist der Schnitt des Kegels $\alpha p \beta$, der dasjenige Licht enthält, was vom mittelsten Punct P des Objects auf die vordere Linse AB fällt. Die Mittelpuncte der übrigen liegen in der graden Linie DE, worin die Ebenen MKN und RDSE einander schneiden. Verlängert man MKm bis H, so ist H der Mittelpunct, HF = HG der Halbmesser desjenigen Kreises, der alles aus M kommende Licht enthielte, wenn die Linse DE groß genug wäre, um alles aufzufangen. Ist DE so groß nicht, wie die Zeichnung annimmt, so fällt auf die Linse DE nur so viel Licht, als der Raum RDSF (83. Fig.) fassen kann: was dagegen in den Mondförmigen Raum DRGS fallen würde, das kann die Linse DE nicht mehr auffangen. 83 F.

Es

Es sey eine Linse von der andern um den Abstand $KC = a$ entfernt, so findet man den Halbmesser $C\alpha = C\beta$ desjenigen Kreises, welcher alles Licht enthält, was P nach AB schickt, $= \frac{(a-g)b}{g}$, mithin muß der Halbmesser CD der Linse DE nicht kleiner als $\frac{(a-g)\,b}{g}$ seyn, wenn die Linse DE alles Licht auffangen soll, was P auf AB wirft.

221. §.

Ist der Linse DE Umfang so groß, daß sie alles Licht auffangen kann, was durch die Linse AB fällt, so erhellet, daß alles Licht, was MN nach AB schickt, nach der Brechung in der Linse DE auch wieder auf das zweyte Bild $\mu\nu$ fallen müßte, wenn keine von beyden Linsen einen Theil des auf sie fallenden Lichts zurück würfe, oder sonst zerstreuete. Wird also diese Lichtmenge $= M$, der Halbmesser des Bildes $\mu\nu = s$ gesezt, so wäre die mittlere Klarheit des Bildes $\mu\nu = \frac{M}{\pi\, s^2}$. Damit dies erfolgen könne, muß CD nicht kleiner, als CG seyn. Es ist aber $C\alpha = C\beta = \frac{(a-g)\,b}{g}$, und $\beta G = \alpha I = \frac{aq}{g}$, also $CG = C\beta + \beta G = \frac{(a-g)b + aq}{g}$, und es muß bey der angenommenen Voraussetzung CD nicht kleiner seyn, als $\frac{(a-g)\,b + aq}{g}$.

Wo-

Wofern nun wegen der unvollkommenen Durchsichtigkeit des Glases die Linse AB nur einen Theil des Lichts durchläßt, der sich zur ganzen auffallenden Lichtmenge, wie $k : 1$ verhält, so fällt auf die Linse DE nur eine Lichtmenge $= k . M$. Weil es aber mit dieser Linse eben die Bewandniß hat, und wegen der Zurückwerfung und Zerstreuung des Lichts wiederum nur ein Theil durchfällt, der sich zur ganzen auffallenden Lichtmenge, wie $\lambda : 1$ verhält, so ist die auf das Bild $\mu\nu$ fallende Lichtmenge $= k\lambda M$, und die mittlere Erleuchtung desselben $= \frac{k\lambda M}{\pi s^2}$. Man kann nicht schlechthin annehmen, daß $k = \lambda$ seyn werde. Denn wenn gleich beyde Glasarten an sich gleich durchsichtig wären, so könnte doch die eine Linse dicker von Glas als die andre seyn, und es ist leicht zu erachten, daß die dickere Linse mehr Licht, als die dünnere zerstreuen würde, wenn auch alles übrige gleich wäre. Gewöhnlich wird die Dicke nicht sehr verschieden, und beynahe $k = \lambda$ seyn, wenn beyde Linsen aus einerley Glasarten verfertiget sind, da dann die mittlere Erleuchtung des Bildes unter der angenommenen Bedingung $= \frac{K^2 \ M}{\pi s^2}$ wäre. Falls CD $<$ $\frac{(a-g)b}{g} + \frac{aq}{g}$ ist, so ist die mittlere Erleuchtung kleiner als diese Formul angiebt.

222. §.

1. Die mittlere Erleuchtung verwandelt sich in die concentrale Erleuchtung, wenn man p unendlich klein

klein annimmt: alsdenn ist auch q unendlich klein, und es muß nicht CD kleiner als $\frac{(a-g)\,b}{g}$ seyn, wenn die Mitte π des Bildes $\mu\nu$ die völlige Erleuchtung empfangen soll. Um die centrale Erleuchtung selbst zu finden, erinnere man sich aus dem 199 §. n. 3. daß $M = \frac{\pi^2\ p^2\ b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$ gefunden worden. Ferner setze man $C\pi = h$, so ist $\pi\mu = s = \frac{h\ .\ q}{a-g}$, und $q = \frac{gp}{\delta}$, also $s = \frac{g\,.\,h\,.\,p}{(a-g)\,\delta}$, und man findet die mittlere Erleuchtung $Y = \frac{\pi\,(a-g)^2\,\delta^2\,b^2}{\frac{1}{4}\,g^2\,h^2\,(BQ + DQ)^2}$. Noch hat man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + b^2)}$ wenn p verschwindet, mithin ist die centrale Erleuchtung $I = \frac{\pi\,(a-g)^2\,\delta^2\,b^2}{g^2\,h^2\,(\delta^2 + b^2)}$, und diese Zahl muß hiernächst wegen der unvollkommenen Durchsichtigkeit der Gläser noch mit $k\,.\,\lambda\,.$ multiplicirt werden.

2. Wenn $CD = \frac{(a-g)\,b}{g}$, also $b = \frac{g\,.\,CD}{a-g}$ ist, so hat man $I = \frac{\pi\,\delta^2\,.\,CD^2}{h^2\,(\delta^2 + b^2)}$. Ist $CD < \frac{(a-g)\,b}{g}$, d. i. $CD < C\beta = C\alpha$; so fällt auf DE nur soviel von dem Licht, das P nach AB schickt, als auf ein Stück des Glases AB fallen kann, dessen

Halb-

Halbmesser $= \frac{g \cdot CD}{a-g}$ ist: demnach ist es auch in diesem Fall soviel, als wenn $b = \frac{g \cdot CD}{a-g}$ wäre, und alsdenn alles Licht was P auf AB wirft, hindurch gienge, und auf die Fläche des Glases DE fiele. Es ist soviel, als wenn man dem Glase AB eine geringere Oefnung gäbe, deren Halbmesser $b = \frac{g \cdot CD}{a-g}$ wäre. Demnach ist auch in diesem Fall $I = \frac{\pi \delta^2 CD^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$, und wegen der unvollkommenen Durchsichtigkeit der Gläser $I = \frac{k \cdot \lambda \cdot \pi \cdot \delta^2 \cdot CD^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$. Setzt man nun $CD = c$, so kann man nach der Formul $I = \frac{k \cdot \lambda \cdot \pi \cdot \delta^2 \cdot c^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$ allemahl rechnen, nur muß man vorher den Werth $\frac{(a-g)\,b}{g}$ suchen. Wofern derselbe grösser als c ist, so setzt man in der Formul statt c die eigentliche Länge des halben Durchmessers der Linse DE Falls aber $\frac{(a-g)\,b}{g} < c$ ist, so ist die Erleuchtung nicht grösser als sie seyn würde, wenn $\frac{(a-g)\,b}{g} = c$ wäre, also muß man $\frac{(a-g)\,b}{g}$ statt c in der Formul gebrauchen.

223. §.

Es sey die Brennweite des vordern Glases AB $= f$, des hintern DE $= \varphi$, so ist $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$ und $h = \frac{(a-g)\varphi}{a-g-\varphi} = \frac{(a(\delta-f)-\delta f)\varphi}{(a-\varphi)(\delta-f)-\delta f}$. Ferner ist $q = \frac{gp}{\delta} = \frac{fp}{\delta - f}$, und $s = \frac{qh}{a-g} = \frac{q\varphi}{a-g-\varphi}$, oder $s = \frac{fp\varphi}{(\delta-f)(a-\varphi)-\delta f}$. Demnach ist die centrale Erleuchtung $\mathrm{I} = \frac{k\lambda\pi((a-\varphi)(\delta-f)-\delta f)^2\delta^2c^2}{(a(\delta-f)-\delta f)^2\varphi^2(\delta^2+b^2)}$; und wofern $c > \frac{a(\delta-f)-\delta f}{\delta f}.b$ wäre, so müste eben dieser Werth statt c gebraucht werden, da dann $\mathrm{I} = \frac{k\lambda\pi((a-\varphi)(\delta-f)-\delta f)^2 b^2}{f^2\varphi^2(\delta^2+b^4)}$ gefunden wird.

Wenn das Object vom vordern Glase sehr weit entfernt ist, so hat man $g = f$, und es ist p der Brennpunct des vordern Glases, da dann $\mathrm{I} = \frac{k\lambda\pi(a-f-\varphi)^2c^2}{(a-f)^2\varphi^2}$ gefunden wird. Wofern übrigens in eben diesem Fall $c > \frac{a-f}{f}.b$ ist, so muß dieser Werth statt c gebraucht werden.

Es sey $f = 6$ Fuß $= 72$ Zoll, $b = 1\frac{1}{2}''$, $\varphi = 1\frac{1}{2}$ Zoll, $a = 73\frac{3}{5}$ Zoll. Auf das Glas AB falle das Sonnenlicht, und die Axe beyder Gläser sey gegen der Sonne Mittelpunct gerichtet: so ist δ sehr groß, und die leztern Formuln finden ihre Anwendung. Demnach ist $\frac{a-f}{f} \cdot b = \frac{8}{5 \cdot 72} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}''$, und wenn man gleich annimmt, daß c grösser sey als $\frac{1}{30}''$ so muß dennoch dieser Werth statt c in der Formul für I gebraucht werden. Man findet aber ferner $f + \varphi = 73\frac{1}{2}''$, also $a - f - \varphi = \frac{1}{10}''$, und $\mathrm{I} = \frac{k \lambda \pi (a - f - \varphi)^2 b^2}{f^2 \varphi^2} = k \lambda \pi \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{72^2}$ $= k \lambda \pi \cdot 0{,}000001929$.

Die senkrechte Erleuchtung der Sonne wäre $= \pi \cdot 0{,}000022$, wenn ihr scheinbarer Halbmesser $= 16'7''$ angenommen wird: (55. §.) mithin wäre die centrale Klarheit des Sonnenbildes in dem angenommenen Fall auch alsdenn schon eilfmahl kleiner, als die Klarheit einer Fläche, welche die Sonne unmittelbar senkrecht erleuchtet, wenn gleich die Gläser alles Licht durchliessen, und nichts zurück geworfen oder zerstreuet würde. Der halbe Durchmesser dieses Sonnenbildes wäre $s = \frac{fhp}{(a-f)\,\delta}$ und $h = \frac{(a-f)\,\varphi}{a-f-\varphi} = \frac{\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{10}} = 16 \times \frac{3}{2} = 24''$, also $s = \frac{72 \cdot 24 \cdot 5}{8}$ tg . $16'$. $= 5''$. Ferner wäre die centrale Klarheit des Bildes $mn = \frac{\pi b^2}{g^2}$

(162. §.) $= \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{72^2} = 0{,}00043402 \cdot \pi$, die Verminderung wegen der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit des Glases beyseit gesetzt: diese wäre also 225 mahl grösser als die Klarheit des Bildes $\mu\nu$, oder beynahe 20 mahl grösser, als die senkrechte Erleuchtung der Sonne.

224. §.

Weil $C\pi = h = \frac{(a-g)\,\varphi}{a-g-\varphi}$ war, so ist allemahl $h > \varphi$, so lange $a > g + \varphi$ ist; es wird aber h kleiner, wenn a wächst, und man würde $h = \varphi$ erhalten, wenn a unendlich groß werden könnte. Wenn umgekehrt, a abnimmt, so wächst h so lange, bis $a = g + \varphi$ ist, da dann h unendlich groß wird, und die Strahlen hinter dem zweyten Glase, die zu einerley Punct des Objects gehören, keinen Vereinigungspunct haben. Wird $a < g + \varphi$, so wird h negativ, und es giebt hinter dem Glase DE kein physisches, sondern vor demselben ein geometrisches Bild in der Entfernung $h = -\frac{(a-g)\,\varphi}{g+\varphi-a}$. Eben diese negative Entfernung nimmt nun mit a schnell ab, und verschwindet, wenn $a = g$ ist. Wird $a < g$, so wird h wieder positiv, nemlich $h = \frac{(g-a)\,\varphi}{g+\varphi-a}$, und es ist nun $h < \varphi$. Diese Schlüsse führen demnach zur Betrachtung des besondern Falles, welcher oben im 219. §. noch ausgesezt ward.

Es

Es sey die Linse DE bis de gegen das vordere Glas gerückt, so ist nun der Abstand $a = Kc$ beyder Gläser von einander kleiner als die Entfernung Kp des ersten Bildes vom ersten Glase, und aus $pC = a - g$ ist nun pc geworden. Weil die Linie pc in Ansehung des Bildes mn der Linie pC entgegen gesetzt ist, so muß man $g - a$ statt $a - g$ in den gefundenen Formuln schreiben, wenn man sie auf den jetzigen Fall anwenden will. Soll demnach die Linse de alles Licht auffangen, was AB durchläßt, so muß ihr Halbmesser cd nicht kleiner als $\frac{(g-a)\,b}{g} + \frac{aq}{g}$ seyn, und falls nur verlangt wird, daß sie alles aus dem Mittelpunct P des Objects kommende Licht auffange, so muß cd nicht kleiner seyn, als $\frac{(g-a)\,b}{g}$. Dies also vorausgesetzt, hat man die mittlere Erleuchtung $Y = \frac{\pi\,(g-a)^2\;\delta^2\;b^2}{\frac{1}{4}\,g^2\;h^2\;(BQ + DQ)^2}$, und $h = c\pi = \frac{(g-a)\,\varphi}{g-a+\varphi}$, so wie $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$. Für den Abstand des Bildes $\mu\nu$ ist $g - a$ das, was δ für den Abstand des Bildes mn ist; und weil p hinter dem Glase liegt, so ist $cp = g - a$ dem Abstand δ entgegengesezt: also schreibt man φ statt f, und $-(g-a)$ statt δ. Die centrale Erleuchtung des Bildes ist $I = \frac{\pi\delta^2 \cdot c^2}{h^2\;(\delta^2 + b^2)}$, den Halbmesser $cd = c$ genommen, doch muß c nicht grösser als $\frac{(g-a)\,b}{g}$ seyn,

 widri-

widrigenfals wird dieser eben erwehnte Werth statt c in die Formul gesezt. Soll demnach das Bild die völlige centrale Erleuchtung empfangen, so wird erfordert, daß $c \cdot g = b \cdot g - a \cdot b$, also $a = \frac{(a-c)\,g}{b}$ sey, oder $a = \frac{(b-c)\,\delta f}{b\,(\delta - f)}$.

225. §.

Weil übrigens $q = \frac{fp}{\delta - f}$, und $s = \frac{qh}{a-g} = \frac{q\varphi}{g - a + \varphi} = \frac{f\varphi p}{\delta f - (a-\varphi)\,(\delta - f)}$ gefunden
84 F. wird, so wird nicht allein das Bild $\mu\nu$ dem Glase AB näher gerückt, sondern es ist auch der Halbmesser s dieses Bildes kleiner, als der Halbmesser q des Bildes mn. Das Glas de heist alsdenn insbesondere ein Collectivglas, weil es die Strahlen in ein engeres Bilt zusammen bringt, das mithin stärker erleuchtet ist, als das Bild mn erleuchtet seyn würde. Damit dieser Erfolg beträchtlich sey, muß φ nicht grösser als $g - a$ seyn, da dann wenigstens der Halbmesser des Bildes bis auf die Hälfte vermindert, und die Erleuchtung viermahl grösser wird. Weil nicht zu zweifeln ist, daß hiedurch auch die Hitze im Focus vermehrt wird, so bedient man sich dieses Hülfsmittels auch die Würkung des Glases AB zu verstärken, wenn es als Brennglas dienen soll.

226. §.

In eben diesem Fall, wenn das Glas AB als Brennglas dient, hat man $g = f$, $h = \frac{(f-a)\,\varphi}{f - a + \varphi}$,

$q = \frac{f \cdot p}{\delta}$, $s = \frac{f \cdot \varphi \cdot p}{\delta(f - a + \varphi)}$. Ferner hat man $I = \frac{\pi c^2}{h^2}$, wenn $a = \frac{(b - c) f}{b}$ angenommen wird. Es sey z. E. $b = 1'$, $c = \frac{1}{4}'$, $f = 8'$, $\varphi = 1'$, so muß $a = 6'$ seyn, und man erhält $I = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{(f - a + \varphi)^2}{(f - a)^2 \cdot \varphi^2} = \frac{9}{64}\pi$, beynahe $= \frac{1}{7}\pi$. Die centrale Klarheit des Bildes mn wäre $= \frac{\pi b^2}{f^2}$, (204. §.) $= \frac{1}{64}\pi$, also jene Klarheit neunmahl grösser, als diese. Der Halbmesser q wäre $= 5,3616384$ Linien, und $s = 1,7872126$ Linien. Vergleicht man beyde Erleuchtungen mit der senkrechten Erleuchtung der Sonne $= 0,000022 \cdot \pi$, so findet sich die Erleuchtung des Bildes mn 710 mahl, und die Erleuchtung des Bildes $\mu\nu$ 6390 mahl grösser.

Der XVI. Abschnitt.

Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht vom erhabenen Kugelspiegel zurück strahlet.

227. §.

Ein Punct P in der Axe CP des erhabenen Kugelspiegels AMB, wirft vermittelst 32 F.

mittelst der Strahlenpyramide *PMNum* eine gegebene Lichtmenge auf das Element *MNnm* der Spiegelfläche, und es ist *MN* ein Element des Meridians *AMNB*, *Nm*, *Nn*, sind Elemente der zur Axe *PC* gehörigen Parallelkreise durch *M* und *N*; das nach *MR* zurück geworfene Licht fällt bey *R* senkrecht auf eine Ebene, deren Entfernung *MR* von dem dahin scheinenden Element des Spiegels bekannt ist: man sucht wie groß die Erleuchtung dieser Ebene an der Stelle *R* sey, wo sie das zurück geworfene Licht auffängt.

Aufl. Aus dem 107 §. weis man, daß die zurück geworfenen Strahlen zum Theil eine solche Lage haben, als kämen sie aus dem Punct Q her, worin MR und NT einander schneiden, wenn angenommen wird, daß der auf N fallende Strahl nach NT zurück strahlet. Wenn ferner der auf *m* fallende Strahl nach *m*S zurück strahlet, MR, *m*S aber einander in *p* schneiden, so weis man ebenfalls aus dem angef. §. daß der übrige Theil der zurück geworfenen Strahlen so aus einander gehe, als kämen diese Strahlen von *p* her. In der Ebene M*pm* sey RS auf *p*R senkrecht, in der Ebene MQN aber RT auf *p*R oder QR senkrecht: auch sey N*r* auf eben dieser Linie *p*R senkrecht: so fällt das zurückstrahlende Licht senkrecht auf das Element SRTV. Nun sey die auf das Element M*mn*N fallende Lichtmenge = M, die gesuchte Erleuchtung, oder die Dichtigkeit des auf SRTV fallenden Lichts sey = δ; so hat man M = δ . RS . RT, wenn voraus gesetzt wird, daß alles aufgefangene Licht

zurück

zurück strahle. Es ist aber $\frac{RS}{Mm} = \frac{pR}{pM}$, und $\frac{RT}{Nr} = \frac{QR}{QM + Mr} = \frac{QR}{QM}$, weil Mr in Vergleichung mit QM unendlich klein ist: also $RS = \frac{Mm \,.\, pR}{pM}$, $RT = \frac{Nr \,.\, QR}{QM}$, und die vorige Gleichung giebt $M = \frac{\delta \,.\, Mm \,.\, Nr \,.\, pR \,.\, QR}{pM \,.\, QM}$, woraus $\delta = \frac{M \,.\, pM \,.\, QM}{Mm \,.\, Nr \,.\, pR \,.\, QR}$ als die gesuchte Erleuchtung gefunden wird.

1) Die Dichtigkeit des unmittelbar an der Spiegelfläche senkrecht aufgefangenen zurück strahlenden Lichts sey $= D$, so wird in der gefundenen Gleichung $\delta = D$, wenn man $pR = pr = pM + Mr$, und $QR = Qr = QM + Mr$ setzt, da dann $D = \frac{M}{Mm \,.\, Nr}$ gefunden wird, weil $\frac{pM}{pM + .\, Nr} = 1 = \frac{QM}{QM + Nr}$ ist. Eben so groß ist auch die Dichtigkeit des unmittelbar an der Spiegelfläche senkrecht aufgefangenen aus P auffallenden Lichts. Wenn nemlich Ns auf PM senkrecht gezogen wird, so ist $Ns = Nr$, weil in den rechtwinklichten Dreyecken MNr, MNs, die Winkel an M vermöge des Gesetzes der Zurückstrahlung gleich sind, auch in beyden die Hypothenuse einerley ist. Würde aber in N das aus P auffallende Licht senkrecht aufgefangen, so

so würde es sich über ein unendlich kleines Rechteck ausbreiten, dessen Seitenlinien Nn und Ns sind; mithin wäre die Dichtigkeit des darauf fallenden Lichts $= \frac{M}{Nn \,.\, Ns} = \frac{M}{Mm \,.\, Nr}$, weil auch $Nn = Mm$ ist, und eben so groß war die Dichtigkeit des zurückstrahlenden unmittelbar beym Spiegel senkrecht aufgefangenen Lichts.

2) Will man die Dichtigkeit des zurückstrahlenden, in jeder unbestimmten Entfernung vom zurückwerfenden Element des Spiegels senkrecht aufgefangenen Lichts, durch die Dichtigkeit des auffallenden unmittelbar am Spiegel senkrecht aufgefangenen Lichts ausdrücken; so setze man in der vermittelst der gegebenen Auflösung gefundenen Gleichung $\frac{M}{Mm \,.\, Nr} = D$, und man erhält $\delta = \frac{D \,.\, pM \,.\, QM}{pR \,.\, QR}$, oder auch $\delta = \frac{D \,.\, pM \,.\, QM}{(pM + MR)\,(QM + MR)}$. Die Entfernung MR ist gegeben, und aus dem 101. 102. 107. §. hat man pM und QM. Es ist nemlich $pM = \surd(Cp^2 + 2r \,.\, Cp \,.\, \cos\alpha + r^2)$, wenn $ACM = \alpha$, $Cp = \frac{r \,.\, CP}{2 \,.\, CP \,.\, \cos\alpha - r}$ gesetzt wird, und $QM = \frac{PM}{PM + \frac{1}{4} MB} \,.\, \frac{1}{4} MB$: oder wenn man alles durch $CP = a$, $CM = r$, $ACM = \alpha$ ausdrücken will; so ist hier a, was $\delta + r$ im 107. §. war, also

QM=

$$QM = \frac{r\,(a\cos\alpha - r)\,\sqrt{(r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2)}}{2a^2 - 3ar\cos\alpha + r^2},$$

und $pM = \frac{r\sqrt{(r^2 - 2ar \,.\, \cos\alpha + a^2)}}{2a\cos\alpha - r}$.

3) Weil die Entfernung PM veränderlich ist, so ist auch die Dichtigkeit D des aus P kommenden, und in der Entfernung PM senkrecht aufgefangenen Lichts veränderlich. Man setze, die Dichtigkeit eben dieses von P ausgehenden Lichts sey $= \Delta$, wenn es in der Entfernung $CP = a$ senkrecht aufgefangen wird; so ist $\Delta : D = PM^2 : CP^2$, also $D = \frac{CP^2 \,.\, \Delta}{PM^2} = \frac{a^2 \,.\, \Delta}{a^2 - 2ar\cos\alpha + r^2}$: jedoch wird hiebey voraus gesetzt, daß das Licht wegen keiner andern Ursache, als wegen der geänderten Entfernung stärker oder schwächer erleuchte; wohin der Fall gehört, wenn P der Mittelpunct einer leuchtenden Kugel wäre. In Fällen dieser Art also ist $\delta = \frac{CP^2 \,.\, pM \,.\, QM \,.\, \Delta}{PM^2 \,.\, (pM + MR)\,(QM + MR)}$. Eben diese Auflösung der Aufgabe findet Hr. **Lambert** Photomet. Part. III. Cap. I. §. 650. 651. pag. 303. 304. und Hr. **Bouguer** im Traité d'Optiqué Liv. II. Sect. I. Art. IV. pag. 107.

228. §.

Wenn P soweit entlegen ist, daß alle auf den Kugelspiegel fallende Strahlen wenigstens sehr nahe parallel sind, so hat man $\frac{CP}{PM} = 1$, weil nun a in Vergleichung mit r als unendlich groß angenom-

men wird. Ueberdem ist nun $pM = \frac{1}{2} r \sec\alpha$ (102. §.) und $QM = \frac{1}{2} r \cos\alpha$ (101. §.), also $pM \cdot QM = \frac{1}{4} r^2$, (102. §.), und man erhält in diesem Fall $\delta = \frac{\frac{1}{4} r^2 \cdot \Delta}{(pM + MR)(QM + MR)}$. Man setze die Entfernung $MR = b$, so ist $\delta =$
$\frac{\frac{1}{4} r^2 \cdot \Delta}{(b + \frac{1}{2} r \sec\alpha)(b + \frac{1}{2} r \cos\alpha)}$, und wenn man im Nenner würklich multiplicirt, so findet man $\delta =$
$\frac{r^2 \cdot \Delta}{4b^2 + 2br(\sec\alpha + \cos\alpha) + r^2}$.

Ist die Entfernung $b = MR$ in Vergleichung mit dem Halbmesser r des Kugelspiegels ebenfalls sehr groß, und α ein Winkel, der dem rechten Winkel nicht sehr nahe kommt, daß $\sec\alpha$ die Einheit sehr vielmahl übertrift, so giebt diese Formul $\delta = \frac{\frac{1}{4} r^2 \cdot \Delta}{b^2}$. Wofern aber bey eben der Voraussetzung, daß b in Vergleichung mit r sehr groß sey, auch α dem rechten Winkel nahe, mithin $r \sec\alpha$ sehr groß ist, so hat man $\delta = \frac{r^2 \cdot \Delta}{4b^2 + 2br \sec\alpha}$.

229. §.

85 F. Auf den erhabenen Kugelspiegel *ABHE* fällt ein Strahlen-Cylinder in der Richtung *SC*, und die ganze auffallende Lichtmenge ist gegeben; hinter dem Spiegel befindet sich eine Ebene *XY* in gegebener Lage gegen die einfallenden Strahlen: diese Ebene *XY* ist nach allen Seiten ins unendliche ausgedehnt,

und

und man soll denjenigen Theil des zurück strahlenden Lichts finden, welchen die Ebene *XY* auffängt.

Aufl. Durch den Mittelpunct C des Kugelspiegels sey die Ebene FDG mit XY parallel gelegt, durch SC aber eine Ebene AEHB auf FDG senkrecht gesetzt, und CG sey beyder Ebenen durchschnittslinie; so ist GCS ein gegebener Winkel, unter welchen die auffallenden Strahlen gegen die Ebenen FDG und XY geneigt sind. Wie nun die Schnitte der Kugel mit den Ebenen FDG, AEHB gröste Kreise der Kugel sind, so ist der Bogen GA das Maaß des Neigungswinkels GCS. Man betrachte SC als eine Verticallinie, und BDE sey der zu dieser Scheitellinie gehörige Horizont, der den Scheitelkreis BAEH in BE schneidet, so erhellet aus dem bekannten Gesetz der Zurückstrahlung folgendes.

Auf M falle ein Strahl SM mit SC parallel; durch M und CS lege man eine Ebene, welche den Scheitelkreis AMH giebt; so liegt MS in eben dieser Ebene, worin auch das Einfallsloth CMP liegt. Wenn also in dieser Ebene PMQ = PMS genommen wird, so ist MQ der zurückgeworfene Strahl. Der Scheitelkreis AMH schneide die gegebene Ebene FDG in CW, und der zurückgeworfene Strahl MQ sey rückwärts nach R verlängert; so ist, wegen der parallelen Lage der Strahlen MS, CS, allemahl PMS = ACM, also nach dem Gesetz der Zurückstrahlung auch PMQ = CMR = ACM. So lange nun CMR $<$ MCW bleibt, so lange ist MCW + CMQ $>$ 180°, und MQ stößt nach R verlängert mit CW zusammen: mithin

hin kann der zurück geworfene Strahl MQ die Ebene FDG folglich auch XY nicht treffen, so lange CMR oder ACM $<$ MCW bleibt. Wenn CMR oder ACM $=$ MCW wird, so ist MQ mit CW, also auch mit der Ebenen FDG und XY parallel, und MQ kann die zuletzt genannte Ebene noch nicht treffen. Wird aber CMR oder ACM $>$ MCW, so ist MCW $+$ CMQ $<$ 180°, und MQ stößt mit CW, folglich auch mit der Ebenen FDG und XY zusammen.

Man nehme also an, es sey ACM $=$ MCW, so erhellet, daß alles Licht, was auf den Bogen AM fällt, so zurück strahle, daß es die Ebene XY nicht treffen kann, dasjenige aber, was auf den Bogen MW fällt, nach der Zurückstrahlung die Ebene XY treffen müsse. Ferner sey auf der Kugelfläche eine Linie KMN nach diesem Gesetz gezogen, daß sie von allen Scheitelkreisen die Bogen AW zwischen den Scheitel A, und dem größten Kreise FDG halbirt; so schließt diese Linie ein Stück des Kugelspiegels ein, wovon alles Licht so zurück strahlt, daß es die Ebene XY nicht treffen kann: dagegen wird derjenige Theil der Spiegelfläche, welcher zwischen der Linie KMN und dem Horizont BDE liegt, alles zurück strahlende Licht auf die Ebene XY werfen.

Der Strahl SM treffe die Ebene des Horizonts BDE in L, und des Kugelspiegels Halbmesser sey $= r$, so ist CL $= r$. sin ACM, und der Winkel ECL ist dem sphärischen Winkel EAM oder GAW gleich. Wenn nun aus jedem Punct M der Linie KMN auf den Horizont eine lothrechte Linie, wie ML senkrecht herabgelassen wird; so liegen alle

Puncte

Puncte L in der ortographischen Projection OLT der Linie KMN auf den Horizont, und die Menge des Lichts, welches von dem durch die Linie KMN umgränzten Theil des Spiegels zurück strahlet, verhält sich zur ganzen auffallenden Menge, wie die Fläche der auf den Horizont projicirten Linie KMN zur Fläche des grösten Kreises der Kugel.

Es sey nun ECL $= \varphi$, ACM $= \frac{1}{2}\psi$, also ACW $= \psi$, GCA $= \alpha$, CL $= z$, so ist $z = r \sin \frac{1}{2}\psi$. Der Winkel ECL $= \varphi$ wachse um das Element $LCl = d\varphi$, und $L\lambda$ sey ein mit dem Halbmesser CL beschriebener unendlich kleiner Kreisbogen; so ist $L\lambda = zd\varphi$, und der Inhalt des unendlich kleinen Dreyecks $LCl = \frac{1}{2} Cl \,.\, L\lambda = \frac{1}{2}(z + dz)\, zd\varphi$. Wird ferner die Fläche OCL $=$ Z gesetzt, so ist $dZ = \frac{1}{2} Cl \,.\, L\lambda = \frac{1}{2}(z + dz)\, zd\varphi$, und das lezte Verhältniß $\frac{dZ}{zd\varphi} = \frac{1}{2}z$, welches man den Gründen der Differentialrechnung gemäß auch so ausdruckt $dZ = \frac{1}{2} z^2 d\varphi$, mithin $dZ = \frac{1}{2}r^2 \,.\, \sin \frac{1}{2}\psi^2 \,.\, d\varphi$. Ferner ist $\sin \frac{1}{2}\psi^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\psi)$ (425. §. Geom.), also $dZ = \frac{1}{4} r^2 (1 - \cos\psi)\, d\varphi$. Das sphärische Dreyeck AGW ist bey G rechtwinklicht, und die Perpendiculärseite AG $= \alpha$, der Winkel GAW $= \varphi$, die Hypothenuse AW $= \psi$, also $\tang \psi = \frac{\tang \alpha}{\cos \varphi}$, (538 §. Geom. n. VI.) und $\sec\psi = \frac{\sqrt{(tg\,\alpha^2 + \cos\varphi^2)}}{\cos\varphi}$, $\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(tg\,\alpha^2 + \cos\varphi^2)}}$, oder auch $\cos\psi =$

cosφ

$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(\sec\alpha^2 - \sin\varphi^2)}} = \frac{\cos\alpha \cos\varphi}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 \sin\varphi^2)}}$. Dieser Werth von $\cos\psi$ gebraucht, giebt $dZ = \frac{1}{4} r^2$ $\left(d\varphi - \frac{\cos\alpha \cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 \sin\varphi^2)}}\right)$: und wenn man $\cos\alpha$ $\sin\varphi = u$ setzt, also $\cos\alpha\, d\varphi \cos\varphi = du$; so erhält man $dZ = \frac{1}{4} r^2 \left(d\varphi - \frac{du}{\sqrt{(1 - uu)}}\right)$. Demnach findet man durch die Integration $Z = \frac{1}{4} r^2 (\varphi - A \sin u + C)$. Mit φ muß zugleich Z verschwinden, und alsdenn ist $u = 0$, also $C = 0$, und $Z = \frac{1}{4} r^2 (\varphi - A \sin u)$. Wie nun dieser Ausdruck die Fläche des Ausschnitts OCL giebt, so wird die ganze Fläche der Projection gefunden, wenn man $\varphi = 2\pi$ setzt, da dann abermahl $u = 0$ ist, und man erhält $Z = \frac{1}{2} \pi r^2$.

Die Fläche des grösten Kreises der Kugel ist $= \pi r^2$, folglich ist die Fläche der Projection der Linie KMN die Hälfte von der Fläche des grösten Kugelkreises. Die ganze auf den Spiegel fallende Lichtmenge sey $= M$, und derjenige Theil welcher von dem Kugelstück zurück strahlt, das die Linie KMN umschließt, sey $= m$, so ist $\pi r^2 : Z = M : m$, folglich $m = \frac{1}{2} M$. Wenn demnach μ derjenige Theil des zurückstrahlenden Lichts ist, welcher auf die Ebene XY fällt, so ist auch $\mu = \frac{1}{2} M$.

230. §.

Die Lichtmenge, welche der Spiegel auf die Ebene XY wirft, ist bey jeder Lage dieser Ebene gegen die Richtung des auf den Spiegel fallenden

Lichts

Lichts einerley: denn die gefundene Lichtmenge $\mu = \frac{1}{2}M$ hängt von der Grösse des Neigungswinkels $GCA = \alpha$ gar nicht ab. Auf der andern Seite des Kugelspiegels sey ebenfalls eine ins unendliche ausgebreitete Ebene xy mit XY parallel gelegt, die man sich als vollkommen durchsichtig vorstellen kann, damit das auffallende Licht durchgehen könne; so fängt jede der beyden Ebenen xy und XY die Hälfte des vom Kugelspiegel zurück geworfenen Lichts auf. Ueberdem sey aus dem Mittelpunct C eine andre Kugelfläche beschrieben, und ihr Halbmesser in Vergleichung mit dem Halbmesser CA des Spiegels unendlich groß: so wird diese unendlich grosse Kugelfläche von jeder der beyden Ebene XY, xy, deren Entfernung von C endlich angenommen wird, in zwey gleich grosse Halbkugeln getheilt. Soviel Licht als xy auffängt, eben soviel von dem zurück geworfenen Licht breitet sich über die nach S zu liegenden Halbkugelfläche aus; und soviel Licht als XY auffängt, eben soviel muß sich über die andre Halbkugelfläche ausbreiten. Demnach breitet sich über jede der beyden Halbkugelflächen gleichviel, nemlich die Hälfte der auffallenden Lichtmenge aus. In Ansehung dessen, daß der Halbmesser dieser Kugelfläche unendlich groß angenommen wird, ist es eben soviel, als wenn beyde Ebenen XY und xy mit FDG zusammen fielen. Man kann also annehmen, auf jede der beyden Halbkugelflächen, worin die mit dem Spiegel concentrische unendlich grosse Kugelfläche von der Ebene FDG getheilt wird, verbreite sich die Hälfte alles vom Spiegel zurück strahlenden Lichts, und dies allemahl, was auch die Ebene FDG für eine Lage hat. Es sey der Halbmesser

messer der mit dem Spiegel concentrischen Kugelfläche = b, und der Voraussetzung gemäß, b in Vergleichung mit r sehr groß, so ist für parallel auf den Spiegel fallende Strahlen die Erleuchtung eines jeden Elements dieser Kugelfläche =

$$\frac{\frac{1}{4}r^2 . \Delta}{b(b+\frac{1}{2}r\,\sec\alpha)},$$ wenn Δ die Dichtigkeit des auf den Spiegel fallenden und daselbst senkrecht aufgefangenen Lichts bezeichnet. (228. §.) So lange ACM = α dem rechten Winkel nicht sehr nahe kommt, so lange bleibt diese Erleuchtung = $\frac{\frac{1}{4}r^2 . \Delta}{b^2}$ überall gleich groß, nur nimmt sie sehr nahe bey der Stelle stärker ab, die derjenigen grade gegen über liegt, wo das Licht herkommt: auch muß die eben genannte Stelle, grade hinter dem Spiegel völlig im Schatten liegen, so wie es die Formul $\frac{\frac{1}{4}r^2 . \Delta}{b(b+\frac{1}{2}r\,\sec\alpha)}$ anzeigt, die in dem Fall $\alpha = 90°$ verschwindet. Diese Stelle, und die zunächst um ihr befindlichen ausgenommen, breitet sich also das vom Spiegel zurückstrahlende Licht so aus, das die Erleuchtung desto gleichförmiger wird, je grösser die Entfernung vom Spiegel ist: und in sehr grosser Entfernung richtet sich die Erleuchtung nach eben den Gesetzen, als wenn das zurückstrahlende Licht von einem leuchtenden Punct ausginge.

231. §.

86 F. Wenn der Halbmesser CR, der aus dem Mittelpunct C des Spiegels beschriebenen Kugelfläche gegen den Halbmesser CA des Spiegels ein endliches

ches Verhältniß hat, so sind die Stücke dieser Kugelfläche, welche gleich viel von dem zurückstrahlenden Licht auffangen, nicht gleich groß. Die Figur sey wie vorhin gezeichnet, so liegt unter den mit der Ebene des grösten Kreises FDG parallel zurück geworfenen Lichtstrahlen der Strahl Kk der Ebene FDG am nächsten, und Nn ist von dieser Ebene am weitesten entfernt. Es ist nemlich ACF $= 180° - \alpha$, wenn man GCA $= \alpha$ setzt, also GCK $= \frac{1}{2}\alpha$, und FCN $= 90° - \frac{1}{2}\alpha$, allemahl $> 45°$, wenn wie hier angenommen wird $\alpha < 90°$, und $\frac{1}{2}\alpha < 45°$ ist. Man hat alsdenn PK $= r \sin \frac{1}{2}\alpha$, QN $= r \cos \frac{1}{2}\alpha$, also QN $>$ PK. Die nach der Seite, wo das Licht herkommt, zurückstrahlende Hälfte des auffallenden Lichts trift also ein Stück der Kugelfläche, nRk, das kleiner, als die Halbkugel ist, und eben dies Kugelstück ist kleiner als ein Segment, dessen Höhe $= b - r \sin \frac{1}{2}\alpha$ wäre, aber grösser, als ein Segment in der Höhe $= b - r \cos \frac{1}{2}\alpha$. Die andre Hälfte des zurückstrahlenden Lichts breitet sich über ein Stück der Kugelfläche nfHgk aus, das grösser, als die Halbkugel ist; das grade zurückstrahlende Licht verursacht bey R die stärkste Erleuchtung, gegen n, f, I; und gegen k, g, i, zu nimmt die Erleuchtung immer mehr ab, bis sie bey I, und i verschwindet, so wie das Segment I, H, i, im Schatten liegt.

Der XVII. Abschnitt.

Vom Bau des Auges und dem scheinbaren Glanz leuchtender Gegenstände.

232. §.

Weil unser Urtheil von der scheinbaren Gestalt, Grösse und Klarheit sichtbarer Gegenstände, von ihrer Lage und Bewegung gegen einander, von der Empfindung abhängt, die vermittelst des Lichts, wenn es unser Auge rührt, zuwege gebracht wird; so muß man den Bau des Auges einigermassen kennen, wenn man wissen will, wie es etwa mit
87F. dem Sehen zugehen mag. Die Gestalt des ganzen Augapfels OH*p*I kommt der Kugelgestalt sehr nahe, und diese Gestalt war deswegen nöthig, weil das Auge beweglich seyn, und sich in der Höhlung, darin es liegt, nach allen Seiten drehen lassen sollte. Dieser Augapfel selbst ist mit dreyen Häuten umgeben, die gleichsam sein Gehäuse ausmachen. Die äusserste dieser Häute umgiebt den ganzen Augapfel, sie ist hart und elastisch, und heist die **harte Haut** (sclerotica); je näher sie dem Vordertheil des Auges kommt, desto dünner und beugsamer wird sie, und ihr vorderer Theil HOI ist durchsichtig, der auch deswegen die **Hornhaut** heist. (cornea) Eben diese Hornhaut ist ein Segment einer Kugel, deren Halbmesser etwas kleiner ist, als der zum übrigen Theil des Augapfels H*p*I gehörige Halbmesser: deswegen ist sie etwas mehr erhaben als das Auge an dieser Stelle seyn würde,

wenn

wenn es nur eine einzige völlige Kugel wäre. Beyde Kugelstücke haben indessen eine gemeinschaftliche Axe Op, die zugleich die Axe des ganzen Auges abgiebt. Hinten am Augapfel nahe bey der Stelle p, wo die Axe des Auges die harte Haut trift, ist in derselben eine kleine Oefnung bey MN, und daselbst hängt die Gesichtsnerve mit den beyden innern Häuten des Auges zusammen.

233. §.

Von diesen innern Häuten, die sehr weich und zart sind, heist diejenige, welche zunächst an der harten Haut anliegt, die **Aderhaut**: (choroides) einige nennen sie die garnförmige oder färbige Haut. Sie schließt allenthalben an der innern Fläche der Hornhaut an, so lange diese den Nahmen führt, bis gegen H und I zu: wo diese anfängt die Hornhaut zu heissen, daselbst verläßt jene den Umfang des Augapfels, wendet sich gegen B und D zu nach dem innern des Auges, und wird daselbst zu einer ringförmigen Einfassung einer linsenförmigen durchsichtigen Masse BADG, die von ihrer Durchsichtigkeit den Nahmen der **Krystallenlinse** erhalten hat. Diese Linse führt ihren Nahmen nicht etwa, weil sie auch die Härte des Krystalles hätte, ihre Masse ist mehr weich als hart, etwa wie ein starker Gallert, oder das Weisse eines hart gesottenen Eyes: sie bricht das Licht etwas stärker als Glaß, und hat übrigens wegen ihrer Gestalt in Absicht auf die Strahlenbrechung eben die Würkung, wie eine Glaslinse. Ihre Lage im Auge ist so, daß ihre Axe mit der Axe des Auges selbst zusammen fällt, und ihr Nutzen im Auge wird im folgenden weiter beschrieben. Hier ist nur noch zu bemerken, daß die ringförmige Einfassung der Linse TBDW, auch das corpus ciliare, orbiculus ciliaris, ligamentum ciliare, heisse: auch hängt dies ligamentum ciliare mit einer aus der zärtesten ungemein durchsichtigen Haut bestehenden Capsel zusammen, worin die Linse liegt. Die Haut selbst heist aranea, weil sie so fein ist, wie ein Spinnengewebe. In dieser Haut liegt nach des Hn. Petit Meinung die Linse ganz frey, ohne daß sie mit ihr, vermittelst zarter Gefäßchen zusammen gewachsen wäre; wiewohl Hr. Albin das Gegentheil gefunden hat.

Die innerste Haut des Auges, welche wiederum an die innere Fläche der Aderhaut allenthalben anschließt, heist die Netzhaut retina. Auch diese Haut ist sehr zart, sie fängt bey dem Gesichtsnerven an, und ist vielleicht ein Theil dieser Gesichtsnerven selbst, der bey M anfängt, sich nach allen Seiten an der innern Fläche des Auges unter dem Nahmen der Netzhaut auszubreiten: dieses Häutchen endiget sich da, wo die Krystallenlinse in ihrer Einfassung hängt.

234. §.

Der innere Raum des Augapfels ist mit zweyerley Art Feuchtigkeiten, oder wenn man will, mit dreyerley Arten angefüllt, wofern anders die Masse der Linse eine Feuchtigkeit heissen kann. Eigentlich wird der innere Raum des Augapfels durch die Linse mit ihrer ringförmigen Einfassung in zwey Stücke von ungleicher Grösse abgetheilt, wovon das kleinere vor der Linse zwischen ihr und der Horn-

haut,

haut, das grössere aber zwischen der Linse mit ihrer Einfassung und der harten Haut eingeschlossen ist. Der kleinere Raum DHOIB, zwischen der Linse und Hornhaut, ist mit der so genannten **wässerigen Feuchtigkeit** angefüllet, die deswegen so heist, weil sie das Licht eben so wie gemeines Wasser bricht. Uebrigens ist diese Feuchtigkeit sehr durchsichtig, von Geschmack ein wenig salzig, und hat keinen Geruch. Der Raum hinter der Linse, WDGBTqM, ist gleichfalls mit einer sehr durchsichtigen Feuchtigkeit angefüllt, die in einem eigenen Häutchen eingeschlossen und mit sehr vielen zarten Gefäßchen durchwebt ist, die sie einem Gallert ähnlich machen. Sie heist die **glasartige Feuchtigkeit**: wiewohl die flüßige Masse selbst, welche die zarten Gefäßchen anfüllet, der wässerigen Feuchtigkeit in allem ähnlich, auch mit ihr fast von einerley Dichtigkeit ist, und die Lichtstrahlen eben so, wie gemeines Wasser bricht.

Der Raum vor der Linse, welchen die wässerige Feuchtigkeit ausfüllt, wird durch ein besonderes Häutchen HLKI in zwey so genannte Kammern getheilt. Dies Häutchen ist zwischen der Hornhaut und harten Haut beynahe völlig wie eine ebene Fläche ausgespannt, als wenn es die gemeinschaftliche Grundfläche der beyden Kugelsegmente wäre, welche die Hornhaut und die harte Haut jede für sich bilden: es heist die **Traubenhaut**, oder der **Regenbogen**. (uvea, iris) Nach einiger Zergliederer Beschreibung ist der Regenbogen gegen die Hornhaut zu ein wenig erhaben gebogen, und kehrt die hohle Seite der Linse zu. Wie nun derselbe für sich nicht durchsichtig ist, so hat derselbe fast in der Mitte eine Kreisrunde Oefnung, die der Stern im Auge heist, durch welche das Licht, was durch die Hornhaut in die wässerige Feuchtigkeit gedrungen ist, bis zur Krystallinse hindurch gehen kann. Eben dieser Regenbogen ist mit der merkwürdigen Eigenschaft versehen, daß der Stern in der Mitte desselben, wenn sehr starkes Licht ins Auge fällt, enger, und hingegen bey schwachen einfallendem Lichte weiter und grösser wird, ohne seine kreisförmige Gestalt zu ändern. Wegen der Durchsichtigkeit der Hornhaut, und der darunter befindlichen wässerigen Feuchtigkeit, ist der Regenbogen von aussen sichtbar, und giebt wegen seiner mannigfaltigen Farben dem Auge seine äussere Schönheit.

235. §.

Es sey nun P ein Punct in der Axe des Auges, wovon ein Strahlenkegel auf die Hornhaut fällt: so wird der mittlere Strahl PO, der mit der Augenaxe zusammen fällt, ungebrochen durchgehen, weil auch der Mittelpunct F der kugelförmigen Hornhaut in der Augenaxe liegt. Die beyden Flächen BAD, BGD der Krystallinse werden gewöhnlich auch Kugelförmig angenommen, wiewohl einige Zergliederer besonders die hintere Fläche BGD parabolisch, andre hyperbolisch wollen gefunden haben. Sind beyde Flächen würklich sphärisch, so liegen die dazu gehörigen Mittelpuncte C und E ebenfalls in der Augenaxe, in allen Fällen aber geht der mittlere Strahl PO auch durch die Linse ungebrochen durch, und trift die Netzhaut hinten in p. Ein andrer von P ausgehender Strahl falle

falle in α auf die Hornhaut, so leidet er daselbst die erste Brechung aus der Lage $\alpha\beta$ in die Lage $\alpha\gamma$ gegen das Einfallsloth Fα, und geht in eben der Richtung durch die wässerige Feuchtigkeit bis zur Krystallinse in γ fort, wofern, wie gewöhnlich angenommen wird, die Hornhaut mit der wässerigen Feuchtigkeit das Licht auf gleiche Art bricht. Weil aber die Masse der Linse dichter ist, als die wässerige Feuchtigkeit, so leidet der Strahl in γ die zweyte Brechung aus der Lage $\gamma\delta$ in die Lage $\gamma\varepsilon$ gegen das Einfallsloth Cγ. Wenn ferner der zum zweytenmahl gebrochene Strahl die hintere Fläche der Linse in ε trift, woselbst E$\varepsilon\zeta$ das Neigungsloth ist, so leidet der Strahl beym Uebergang in die glasartige Feuchtigkeit die dritte Brechung aus der Lage $\varepsilon\eta$ in die Lage εp und zwar so, daß der gebrochene Winkel $\zeta\varepsilon p$ grösser als der Neigungswinkel $\zeta\varepsilon\eta$ ist, weil die glasartige Feuchtigkeit wieder dünner als die Masse der Krystallinse ist. Befindet sich nun P in einer solchen Entfernung vom Auge, in der das Auge einen Gegenstand vollkommen deutlich siehet; so vereinigen sich alle Strahlen, die aus P auf die Hornhaut fallen, nach der dritten Brechung in einerley Punct p hinten im Auge auf der Nezhaut, und machen daselbst ein Bild von P.

Einen ähnlichen Erfolg hat die Brechung des Lichts im Auge, wenn es von einem Punct Q kommt, der ausserhalb der Augenaxe liegt. Alle Strahlen, die zum Kegel gehören, den Q auf die Hornhaut wirft, leiden eine dreymahlige Brechung, an der äussern Fläche der Hornhaut, der vordern und hintern Fläche der Linse, der Strahl Qa wird in a, m, n, so wie QO in O, e, h, gebrochen, und beyde vereinigen sich nach der dritten Brechung in dem Bilde *q* hinten auf der Nezhaut. So entsteht eine Reihe von Bildern zwischen *p* und *q*, die den Puncten des Gegenstandes zugehören, welche zwischen P und Q liegen, und *pq* wird ein Bild von PQ. Das Bild hat übrigens in Ansehung des Gegenstandes die umgekehrte Lage, so daß sich die obere und untere Stelle, die rechte und linke Seite mit einander verwechseln.

Diese Schlüsse werden durch die Erfahrung bestättiget, wenn der Zergliederer am hintern Theil eines Auges die harte Haut geschickt ablöset, so daß man hineinsehen kann: es zeigt sich alsdenn ein Bild auf die beschriebene Art am Boden des Auges von jedem Gegenstande, gegen den man die vordere Seite des Auges stellt.

236. §.

In dem Augenblick, da sich ein solches Bild in unserm Auge abmahlet, ist dieser Erfolg mit der Empfindung des Sehens begleitet. Wir sehen nun den Gegenstand, dessen Bild das Licht ins Auge auf die Nezhaut bringt: übrigens aber reichen unsre Begriffe, die wir von unsern eigenen Empfingungen haben, und von der Art, wie die Veränderungen, die in unserm Körper vorgehen, mit den Vorstellungen zusammen hängen, welche alsdenn zugleich die Seele hat, soweit nicht, daß wir verständlich erklären könnten, wie es nun weiter mit dem Sehen zugehe. Die zarten Nervenfasern der Nezhaut pflanzen ohne Zweifel den Eindruck, welchen das Licht auf der Nezhaut macht,

ver-

vermittelst des Gesichtsnervens, der mit dem Gehirn zusammen hängt, auch bis zum Gehirn fort. Wie aber nun weiter die Seele ihre Vorstellung erhält, muß man unentschieden lassen. Können wir jenen Zusammenhang dessen, was in unsern Sinngliedern vorgehet, mit den Vorstellungen in unsrer Seele aber nicht erklären, so hat es auch mit der anscheinenden Schwürigkeit gar nichts auf sich, wenn man frägt: wie es zugehe, daß wir die Sachen aufgerichtet sehen, deren Bild in umgekehrter Stellung auf die Nezhaut fällt? Eben so wenig Grund hat die anscheinende Schwürigkeit, daß wir jede Sache mit zweyen Augen nur einfach sehen. Wenn der Blindgebohrne, dessen Geschichte im 40 §. der Optik kurz erzählt ist, nachdem er vom Staar war befreyet worden, von keiner Sache die Gestalt gekannt, und keine Sache von der andern bey noch so verschiedener Gestalt und Grösse unterschieden hat; so hat er anfangs auch nicht gewußt, was oben oder unten, zur Rechten oder Linken befindlich sey, bis er durch öftere Verbindung der Empfindungen des Gefühls mit den Empfindungen des Gesichts sich dazu gewöhnet, Gestalt, Grösse und Lage der Dinge gegen einander zu unterscheiden. Hiebey war es wohl sehr gleichgültig, ob das Bild in seinem Auge aufrecht oder verkehrt stand, ob er mit einem oder mit beyden, oder noch mehreren Augen sahe. Seine Seele erhielte Vorstellungen, die er gar nicht kannte, er muste sie zuförderst oft mit andern ihm schon bekannten Vorstellungen zugleich haben, bevor er lernte, was es mit diesen neuen ihm bisher unbekannt gebliebenen Vorstellungen für eine Bewandniß habe. Wenn es gleich wahr ist, daß der Eindruck, welchen das Licht von einerley Sache auf der Nezhaut eines jeden Auges macht, für sich schon eine Empfindung von der Sache zuwege bringt, so sind doch beyde Empfindungen einander vollkommen ähnlich, und wir haben von Jugend auf beständig beyde Empfindungen zugleich gehabt, wenn uns zugleich das Gefühl davon belehrt hat, daß es nur eine Sache sey, welche beyde einander ganz ähnliche Empfindungen veranlaßt. Mit zweyen Ohren hören wir einen und denselben Schall einfach und nicht zwiefach, ich finde auch nicht, daß man dies als etwas schwer zuerklärendes angesehen hätte: warum sollten wir nicht eben so gut mit zweyen Augen einerley Gegenstand einfach sehen.

237. §.

Daß die Abmessungen des menschlichen Auges nicht bey allen erwachsenen Personen einerley seyn werden, läßt sich schon daher vermuthen, weil überall eine sehr grosse Verschiedenheit in der Grösse der Gliedmassen des menschlichen Körpers bemerkt wird: indessen wird es nicht undienlich seyn, folgende Abmessungen zu bemerken, die Herr Petit in der Histoire de l'Academie de Paris A. 1725 in Pariser Linien mittheilt.

Des Augapfels Durchmesser RS ist 10 bis $11\frac{1}{2}$ Linien lang, am gewöhnlichsten $10\frac{1}{2}$ bis $10\frac{3}{4}$ Lin. Die Hornhaut HOI ist ein Kugelstück, wovon der Durchmesser FO gewöhnlich $7\frac{1}{2}$ Linien, zuweilen 7, auch wohl 8 Linien beträgt, der Durchmesser HI der Grundfläche dieses Kugelstücks, der zugleich den Durchmesser der Traubenhaut oder des

Regen-

Regenbogens abgiebt, ist $4\frac{2}{3}$, 5, bis $5\frac{1}{2}$ Linien, die Höhe eben dieses Kugelsegments $\frac{3}{4}$, 1 bis $1\frac{1}{4}$ Lin. Diesemnach ist die Axe Op des Auges um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Linie länger, als der Durchmesser RS. Eben dies Kugelstück macht die vordere Kammer für die wässerige Feuchtigkeit aus. Die Dicke der hintern Kammer vom Umfang des Sterns KL bis an die Linse in A, fällt zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{2}$ Linie, und ist am gewöhnlichsten $\frac{1}{4}$ Linie, gegen B und D zu wird die Dicke dieser Kammer wegen der Krümmung der Krystallinse noch mahl so groß. Insgemein beträgt der Abstand AO der Hornhaut von der Krystallinse nicht über $1\frac{1}{6}$ Lin. Der Stern KL hat, wie schon bekannt ist, eine veränderliche Oefnung zwischen 1 und 3 Linien im Durchmesser.

Der Krystallinse Umfang hat $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser BD, am gewöhnlichsten 4 Linien, ihre Dicke AG beträgt $1\frac{3}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ gewöhnlich 2 Linien. Ihre Vorderfläche BAD ist nicht soviel erhaben, als die hintere BGD. Der Vorderfläche Durchmesser 2CA beträgt nach H. Petit am a. O. 1 Zoll bis $1\frac{1}{2}$ Zoll. In einer andern Abhandlung eben der Histoire de l'Acad. de Paris A. 1730 giebt er diesen Durchmesser zu 6, $6\frac{1}{2}$ bis 9 Linien an, zuweilen 12 Linien. Bey alten Personen hat er die Vorderfläche oft so wenig erhaben gefunden, daß sie ihm ein Kugelstück zu seyn geschienen, wozu ein Durchmesser von 25 bis 30 Linien gehöre. Dem Durchmesser 2EG der hintern Fläche giebt er an beyden Orten 5 Linien $5\frac{1}{2}$ bis 6 Linien Länge. Nach einem Mittel aus 26 zergliederten Augen genommen, wovon die Nachricht am zulezt angeführten Ort vorkommt, findet sich der Durchmesser der

Krüm-

Krümmung der Vorderfläche des Krystalles $7\frac{2}{13}$ Linien, der Durchmesser der Krümmung ihrer hintern Fläche $5\frac{2}{3}$ Linien, ihre Dicke AG $2\frac{1}{12}$ Lin.

Wofern die wässerige Feuchtigkeit die Lichtstrahlen wie gemeines Wasser bricht, so ist das Verhältniß der Refraction, wenn das Licht aus der Luft in die wässerige Feuchtigkeit fällt, $= 4:3$. Bräche die Linse das Licht eben so stark als Glas, so wäre das Verhältniß der Refraction beym Uebergang des Lichts aus der wässerigen Feuchtigkeit in der Krystallinse, wie $9:8$; (93 §.) es ist aber die Brechung nicht völlig so stark. Am Ende der deutschen Ausgabe von **Smiths** Optik hat H. **Kaestner** einen Auszug aus **Jurins** Abhandlung vom deutlichen und undeutlichen Sehen mitgetheilt. In dieser Abhandlung nimmt **Jurin** das Verhältniß der Refraction beym Uebergang des Lichts aus der wässerigen Feuchtigkeit in die Krystallinse $=$ $13:12$ an, und beym Uebergange aus der Krystallinse in die glasartige Feuchtigkeit $= 12:13$. Eine ziemlich umständliche Beschreibung des Auges und des durchgangs der Lichtstrahlen durch die Augenfeuchtigkeiten findet man in **Musschenbroecks** Introd. ad Philos. Natural. Tom. II. Cap. 35. 36.

238. §.

Der scheinbare Halbmesser *POQ* eines sichtbaren Objects ist gegeben, und dieser Winkel ist so klein, daß die Winkel, welche ihn nicht übertreffen, sich wie ihre Sinus beynahe verhalten: man soll den Halbmesser *pq* des Bildes auf der Netzhaut im Auge finden.

Aufl.

Aufl. Der Strahl QO, welcher mitten auf 87
die Hornhaut fällt, wird aus der Lage OC in die 88 F.
Lage Oef gebrochen, und es ist $COe = \frac{3}{4}\alpha$, wenn
$POQ = COe = \alpha$ gesetzt wird. Die zweyte Brechung in der Vorderfläche der Krystallinse bringt den Strahl aus der Lage ef in die Lage ehg, worin er rückwärts verlängert die Augenaxe in k schneidet, 88 F.
und es ist $Ceg = \frac{12}{13}\ Cef$, oder $gef = Oek = \frac{1}{13}$
Cef. Nun hat man vermöge der im 237 §. mitgetheilten mittlern Abmessungen des Auges $CA = Ce = 3\frac{3}{4}$ Linien, $AO = 1\frac{1}{6}$ Lin. $= 1{,}1666$ Linien, also $CO = 4{,}9166$ Lin., und im Dreyeck COe ist $Ce : CO = \sin COe : \sin Cef$, also $Cef =$

$$\frac{4{,}9166 \cdot 0{,}75 \cdot \alpha}{2{,}75} = 0{,}9833 \cdot \alpha,$$ weil vermöge der Voraussetzung die Winkel so klein sind, daß sie sich beynahe wie ihre Sinus verhalten: demnach findet man $OCe = Cef - COe = 0{,}2333 \cdot \alpha$, und

$$Oe = \frac{OCe}{COe} \cdot Ce = \frac{0 \cdot 2333}{0{,}75} \cdot 3{,}75 =$$

1,1666 Linien. Nun war $Oek = \frac{1}{13}\ Cef$, also findet man $Oek = 0{,}0756 \cdot \alpha$, und $Oke = COe - Oek = 0{,}6744 \cdot \alpha$, so wie $Ok = \frac{Oek}{Oke} \cdot Oe =$

$$\frac{0{,}0756}{0{,}6744} \cdot 1{,}1666 = 0{,}1308$$ Linien. Weiter ist

	EG	= 2,8333	Lin.
	AG	= 2,0833	—
also	EA	= 0,7500	Lin.
Noch ist	Aa	= 1,1666	—

also

also OE = 0,4166 Lin.
Vorhin war Ok = 0,1308 —

also Ek = 0,5474 Lin.

Weil nun Eh = EG = 2,8333 Linien, so findet man $Ehk = \frac{Ek}{Eh} \cdot Oke = \frac{0,5474}{2,8333} \cdot 0,6744 \cdot \alpha = 0,1303 \cdot \alpha$. Dies ist für den Strahl *eh* der Neigungswinkel beym Durchgang durch die hintere Fläche der Krystallinse, er wird nun aus der Lage *hg* in die Lage *hq* gebrochen, worin er rückwärts verlängert die Augenaxe in *l* schneidet, und man hat $ghq = khl = \frac{1}{12}\ Ehk = 0,0109 \cdot \alpha$, also $Alh = Oke - khl = 0,6635 \cdot \alpha$. Noch ist

$$Ehk = 0,1303 \cdot \alpha$$
$$khl = 0,0009 \cdot \alpha.$$

also $Ehl = 0,1412 \cdot \alpha$.

Ferner $Alh : Eh = Ehl : El$, also $El = \frac{0,1412}{0,6635} \cdot 2,8333 = 0,6029$ Linien, und hievon EO = 0,4166 Lin. subtrahirt giebt $Ol = 0,1863$ Linien. Wird nun Oq gezogen, so ist im Dreyeck Oql die Seite Oq beynahe = Op, und nach einem Mittel aus mehreren Augen genommen, kann man Op auf $11\frac{1}{2}$ Linien schätzen; alsdenn hat man im Dreyeck Oql den Winkel an $q = \frac{Ol}{Oq} \cdot lq = \frac{0,1863 \cdot 0,6635}{11\frac{1}{2}} = 0,0104 \cdot \alpha$, mithin $pOq = Olq + Oql = 0,6739 \cdot \alpha$.

Wie nun α selbst nicht sehr groß angenommen wird, so ist auch *pOq* nur ein kleiner Winkel, und

pq

pq wenig von einer auf Op senkrechten graden Linie verschieden: mithin ist der gesuchte Halbmesser pq des Bildes beynahe $= Op$. tang. pOq. Wird also $pOq = \mu\alpha$ angenommen, so ist $pq = Op$. tang. $\mu\alpha$, oder auch $pq = \mu$. Op. tang α, so lange die Voraussetzung bestehet, daß α nur ein kleiner Winkel sey, dessen Sinus und Tangente nicht sehr verschieden, und solchen Winkeln beynahe proportional sind, die α nicht übertreffen.

Die Zahl μ wäre vermöge der vorstehenden Rechnung $= 0{,}6739$, und diese ist von der Zahl $\frac{2}{3}$ wenig verschieden. Wie nun die Zahlen, worauf jene Rechnung gebauet ist, so zuverläßig nicht sind, daß nicht vielleicht jedes einzelne Auge andre Zahlen erfordern würde, so kann man $\mu = \frac{2}{3}$ schätzen, und diese Zahl als eine mittlere annehmen, die in jedem besondern Fall zwar nicht völlig sicher als die richtige angenommen werden, jedoch aber von der eigentlich gesuchten so gar viel nicht verschieden seyn kann.

Dies vorausgesetzt, läßt sich pq durch eine leichte Zeichnung so finden. Man theile Op in drey gleiche Theile, nehme $OV = \frac{1}{3}$ Op und ziehe Vq mit POc parallel, so ist pq der Halbmesser des Bildes auf der Nezhaut. Denn nun ist noch Vq beynahe $= Vp$, und $OV : Vq = OqV : pVq = 1 : 3$, mithin $OqV = \frac{1}{3} pVq = \frac{1}{3} pOc = \frac{1}{3}\alpha$, und $pOq = pVq - OqV = \frac{2}{3}\alpha$, wie erfordert wird.

239. §.

Die Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut zu finden, wenn der Gegenstand

stand, welcher Licht ins Auge schickt, kreisförmig ist.

Aufl. 1) Die durch den Stern KL hindurch gehende Lichtmenge sey $= M$, aQd der aus Q auffallende durch den Stern gehende Lichtkegel, $PQ = p$, $\frac{1}{2}$ $KL = b$, $pq = q$, $OP = \delta$, $Op = a$; so ist $M = \dfrac{\pi^2 \; p^2 \; b^2}{\frac{1}{4}\,(Qa + Qd)^2}$. (199. §. n. 3.) Weil aber hier $\frac{1}{2}(Qa + Qd)$ von QO nicht merklich verschieden ist, so hat man $M = \dfrac{\pi^2 \; p^2 \; b^2}{QO^2}$, oder $M = \pi^2 \; b^2 \; \sin \alpha^2$, weil $POQ = \alpha$ gesetzt ist. Ferner ist die Fläche des Bildes $= \pi \, . \, q^2 = \mu^2 \, \pi \, . \, a^2$ $\mathrm{tg} \, . \, \alpha^2$ (238. §.) mithin die mittlere Erleuchtung $Y = \dfrac{1}{\mu^2} \, . \, \dfrac{\pi \;\; b^2 \; \sin\alpha^2}{a^2 \; \mathrm{tg} \; \alpha^2} = \dfrac{1}{\mu^2} \, \pi \cos \alpha^2 \, . \, \mathrm{tang}$ ApL^2, oder $Y = \dfrac{1}{\mu^2} \, . \, \dfrac{\pi \;\; \delta^2}{(\delta^2 + p^2)} \, . \, \dfrac{b^2}{a^2}$. Man vergleiche den 199 §. num. 4.

2) Aus dieser mittlern wird die centrale Klarheit, wenn man p unendlich klein annimmt: also ist die centrale Klarheit $I = \dfrac{1}{\mu^2} \, \pi \; \mathrm{tg} \; ApL^2$, oder $I = \dfrac{\pi \;\; b^2}{\mu^2 \; a^2}$. Beyde, die mittlere und centrale Klarheit sind nicht merklich verschieden, wenn das Object weit entlegen ist, weil alsdenn $\dfrac{\delta^2}{\delta^2 + p^2}$ sehr nahe $= 1$ ist. In fällen dieser Art hängt also die Klarheit des Bildes nicht von der Entfernung des Objects ab.

3) Eine nähere Vergleichung mit dem 199. bis zum 203. §. ergiebt leicht, daß die dortigen Formuln hier ihre Anwendung finden müssen, wenn man statt des dortigen g hier μa schreibt, in der Voraussetzung, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich sey. Wenn also λ eine Stelle des Objects, und der scheinbare Abstand derselben vom Mittelpunct $PA\lambda = \psi$ ist; so ist die Klarheit der dazu gehörigen Stelle des Bildes auf der Nezhaut $=$ $\frac{\pi}{\mu^2} \frac{b^2}{a^2}$ $(1 - \sin\psi^2)$. (202. §.) Diese ist von der centralen Klarheit nicht um den 20sten Theil verschieden, so lange ψ nicht über 12 bis 13 Grad beträgt.

4) Wird das Auge von einer Kugel QYZ erleuchtet, so ist die durch den Stern fallende Lichtmenge $M = 2\pi^2 r^2 \sin v$. AXL, (62. §.) also auch $M = 4\pi^2 r^2 (\sin \frac{1}{2} AXL)^2$. Weil aber AXL gewöhnlich sehr klein ist, mithin $\sin \frac{1}{2} AXL = \frac{1}{2} \sin AXL$ angenommen werden kann, so ist $M = \pi^2 r^2 \sin AXL^2 = \frac{\pi^2 r^2 b^2}{\delta^2}$, wenn man $OX = \delta$ setzt, und $QX = r$. Wie nun in diesem Fall beynahe $OQ : QX = Oc : cp$ seyn wird, oder $\sqrt{(\delta^2 - r^2)} : r = a : \frac{1}{\mu} q$, so wird $q = \frac{\mu a r}{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}$, und man erhält $Y = \frac{\pi b^2 (\delta^2 - r^2)}{\mu^2 a^2 \delta^2}$, da dann $\frac{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}{\delta} = \cos\alpha$ ist, und die Formul für die

mittlere Erleuchtung kommt noch mit der vorigen überein.

5) Jedes Segment y Yz, wozu am Mittelpunct X der Kugel ein Winkel Y Xy = Y Xz = φ gehört, schickt aufs Auge die senkrechte Erleuchtung π sinψ^2, wenn man YOy = ψ setzt; und weil tang $\psi = \frac{r \sin\varphi}{\delta - r \cos\varphi}$, $\sin\psi =$ $\frac{r \sin\varphi}{\sqrt{(\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}}$, die Oefnung des Auges aber sehr klein ist; so hat man die auf dasselbe fallende Lichtmenge $M = \frac{\pi^2 b^2 r^2 \sin\varphi^2}{\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2}$.

Weiter ist Ox : xy = Op : pc, also $pc = \frac{1}{\mu} q =$ $\frac{ar \sin\varphi}{\delta - r \cos\varphi}$, und man erhält die mittlere Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut Y = $\frac{\pi b^2 (\delta - r \cos\varphi)^2}{\mu^2 a^2 (\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}$, da dann wiederum $\frac{\delta - r \cos\varphi}{\sqrt{(\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}} = \cos\psi$, und Y = $\frac{1}{\mu^2} \pi \cos\psi^2$ tang . ApL^2 wie vorhin gefunden wird. Auch giebt die Voraussetzung $\varphi = o$ die centrale Erleuchtung $I = \frac{\pi b^2}{\mu^2 a^2}$ wie vorhin.

6) Gesammte Formuln des 205. §. müssen wiederum ihre Anwendung hieselbst finden, wenn man

man μa statt g schreibt, in der Voraussetzung, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich sey. Demnach ist die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut an jeder Stelle $= \frac{\pi\, b^2}{\mu\, a^2} \cos\psi^4 = \frac{\pi\, b^2}{\mu^2\, a^2} (1 - \sin\psi^2 (2 - \sin\psi^2))$, wenn selbige mit einer Stelle auf der Kugel zusammen gehört, die von der Mitte um den scheinbaren Abstand $XOy = \psi$ entfernt ist. Beträgt dieser Winkel nur wenige Grade, so ist die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut sehr nahe überal mit der centralen Klarheit desselben einerley.

7) Noch ist bey dieser Berechnung der Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut, wie oben bey den Formuln für die Glaslinsen, auf dasjenige Licht nicht Rücksicht genommen worden, welches beym Durchgang durch die Brechenden Flächen im Auge zurückgeworfen, oder sonst beym Durchgang durch die Augenfeuchtigkeiten aufgehalten und zerstreut wird. Dieser Abgang von der Menge des auf die Hornhaut fallenden Lichts verursacht, daß die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut nicht völlig so groß seyn kann, als die Formuln angeben, und die Verminderung der Klarheit, welche daher rührt, dürfte bey einem sonst gesunden Auge vielleicht wie bey Gläsern von mittelmäßiger Durchsichtigkeit etwa den sechsten Theil dessen betragen, was nach der Formul gefunden wird.

240. §.

Man stelle sich vor, die leuchtende Fläche 87 F.
QYZ sey in solche Elemente getheilt, welche dem

Auge ORpS einerley Grösse zu haben scheinen, so wird jedes dieser Elemente sein Bild auf der Nezhaut haben. Wenn ferner, wie hier vorausgesezt wird, das ganze Bild deutlich ist, so wird das Bild eines jeden der erwehnten Elemente der leuchtenden Fläche eine eigene Stelle auf der Nezhaut einnehmen, auch werden diese Elemente des Bildes, welche mit den gleich groß scheinenden Elementen der leuchtenden Fläche zusammen gehören, gleich groß seyn. Wofern nun alle diese Elemente des Bildes gleich stark erleuchtet sind, mithin jedes derselben von dem dazu gehörigen Element der leuchtenden Fläche soviel Licht empfängt, als jedes andre Element des Bildes von dem dazu gehörigen Element der leuchtenden Fläche; so wird das Auge von dem Glanz aller Elemente der Fläche QYZ auf einerley Art gerührt, mithin wird der Beobachter allen Elementen einen gleichen Glanz zuschreiben. Wenn eines von den Elementen der leuchtenden Fläche die damit zusammengehörige Stelle der Nezhaut nochmahl so stark als ein andres erleuchtete, so würde wohl ohne Zweifel das erste Element nochmahl so stark glänzend, als das andre scheinen. Diesemnach kann man festsetzen:

> der scheinbare Glanz eines leuchtenden Elements sey der Erleuchtung des Bildes proportional, welches das von demselben ins Auge geschickte Licht auf der Nezhaut macht.

241. §.

Wenn das leuchtende Element in der Augenaxe liegt, so ist die Erleuchtung des dazu gehörigen

gen Bildes auf der Nezhaut $= \frac{\pi b^2}{\mu^2 a^2}$, (239. §. n. 2.) mithin ist der scheinbare Glanz des Elements diesem Ausdruck proportional. Der würkliche Glanz des Objects ist in dem bisherigen Formuln = 1 angenommen. Wird derselbe = S gesetzt, so ist der scheinbare Glanz eines in der Augenaxe befindlichen Elements $= \frac{\pi b^2 . S}{\mu^2 a^2}$: demnach ist derselbe bey einerley Oefnung des Sterns im Auge dem würklichen Glanz proportional, und bey einerley Beschaffenheit des Auges hångt der scheinbare Glanz eines Elements, das sich in der Augenaxe selbst befindet, von der Entfernung desselben vom Auge nicht ab, wobey jedoch vorausgesetzt wird, daß das Licht unterweges, etwa wegen Undurchsichtigkeit der Atmosphåre, oder aus andern Ursachen keinen Abgang leide.

Wofern der scheinbare Abstand des leuchtenden Elements von der Augenaxe nur ein sehr kleiner Winkel ist, so ist die Erleuchtung des dazu gehörigen Bildes auf der Nezhaut auch noch so sehr nahe $= \frac{\pi b^2 . S}{\mu a^2}$. So lange demnach ein leuchtendes Object, das für sich in allen Elementen einerley Glanz hat, unter einem kleinen Sehewinkel ins Auge fällt, so lange ist auch der scheinbare Glanz desselben in allen Stellen einerley, und der Formul $\frac{\pi b^2 . S}{\mu^2 a^2}$ proportional; vorausgesetzt, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich sey.

242. §.

Weil der Stern im Auge bey stärkern Licht enger und bey schwächern Licht grösser wird, so kann die sichtbare Klarheit mit dem Glanz des Objects nicht in einerley Verhältniß zunehmen: sie ändert sich vielmehr in einem Verhältniß, welches aus den Verhältnissen des Glanzes des Objects und des Quadrats vom Halbmesser der Oefnung des Sterns zusammen gesetzt ist. Um also in jedem Fall die scheinbare Klarheit eines sichtbaren Objects zu finden, müste noch bekannt seyn, wie die Oefnung des Sterns von der Grösse der ins Auge fallenden Erleuchtung abhängt? Eine Frage, worauf eine zutreffende Beantwortung schwerlich zu hoffen ist, weil es bisher von den geschicktesten Zergliederern noch nicht hat ausfündig gemacht werden können, was es eigentlich mit dieser bewundernswürdigen Eigenschaft des Regenbogens im Auge für eine Bewandniß habe. Desto schätzbarer sind die Versuche und andre Untersuchungen, welche Hr. Lambert darüber angestellet hat, und wovon ich hier eine kurze Nachricht geben werde, die man nicht für überflüßig halten wird, obgleich die Resultate davon noch nicht haben zur überzeugenden Richtigkeit gebracht werden können.

243. §.

Die Aenderung der Oefnung des Sterns hängt nicht von demjenigen Licht ab, was auf den Regenbogen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was durch den Stern ins Auge hinein geht, und auf die Nezhaut fällt. H. Lambert ließ das Licht von der Flamme einer angezündeten Kerze durch eine Glaslinse in sein Auge fallen, und stellte seitwärts einen Spiegel, worin er deutlich wahrnehmen konnte, ob das Bild der Flamme nur auf den Regenbogen, oder auf den Stern im Auge fiel. Die Lichtflamme selbst war um etwas mehr als die dreyfache Brennweite von der Glaslinse entfernt. Wenn nun das Bild der Flamme allein auf dem Regenbogen fiel, so bemerkte Hr. Lambert keinen Unterscheid in der Oefnung der Sterne beyder Augen. Sobald aber nur der geringste Theil des Bildes der Lichtflamme auf den Stern fiel, welches er durch eine geringe Bewegung des Haupts zuwege bringen konnte, sobald nahm er auch eine fast augenblickliche Zusammenziehung dieses Sterns wahr, und derselbe ward fast dreymahl kleiner, wenn das Bild der Flamme ganz auf den Stern fiel. (Photom. Part. IV. Cap. II. §. 830.) Diesemnach muß die eigentliche Ursache der Zusammenziehungen und Erweiterungen des Sterns in den zarten Fibern der Nezhaut selbst zu suchen seyn, und die Oefnung des Sterns muß von der Klarheit des Bildes auf der Nezhaut abhängen. Wie nun diese Klarheit des Bildes hinwiederum von der Oefnung des Sterns abhängt, so stehen beyde in einer wechselseitigen Verbindung.

Wenn sich das Auge von einerley leuchtenden Object weiter entfernt, so wird die durch den Stern bey einerley Oefnung ins Auge fallende Lichtmenge geringer, mithin wird die Oefnung des Sterns grösser, folglich auch in so fern die scheinbare Klarheit. Umgekehrt wenn das Auge sich dem Object mehr nähert, so würde die ins Auge fallende Lichtmenge bey einerley Oefnung des Sterns grösser werden: demnach zieht sich der Stern zusammen, und die scheinbare Klarheit wird geringer, als sie seyn würde, wenn der Stern seine Oefnung unverändert behielte.

244. §.

Fällt sehr starkes Licht, wie etwa das Sonnenlicht, in die Oefnung des Sterns, so zieht sich derselbe so stark zusammen, daß fast nur ein Punct übrig bleibt: in völliger Finsterniß wird die Oefnung aber so groß, daß sie fast die ganze Fläche des Regenbogens einnimmt. Uebrigens hängt die Grösse der Oefnung nicht allein von der Klarheit des Bildes auf der Nezhaut, sondern von der Grösse dieses Bildes ab. Wenigstens wird es verstattet seyn, bis auf weitere Prüfung anzunehmen, daß jede Fäser der Nezhaut für sich das ihrige zur Zusammenziehung des Sterns beytrage, daß also die Zusammenziehung desto stärker sey, je mehr Fäserchen der Nezhaut von dem einfallenden Licht gerührt werden, mithin desto stärker, je grösser der Raum ist, den das Bild auf der Nezhaut einnimmt.

Wenn beynahe alles Licht senkrecht auffällt, so ist auch die Würkung desselben auf alle dazu gehörige Stellen der Nezhaut einerley. Man stelle sich also den ganzen Flächenraum der Nezhaut, über den das Bild ausgebreitet ist, in unendlich kleine Elemente eingetheilt vor, die alle gleiche Klarheit haben, oder von dem ins Auge fallenden Licht gleich stark gerührt werden. Die Fläche der grösten Oefnung

nung des Sterns sey $= a$, und die Fläche eben dieser Oefnung $= x$, wenn die Klarheit des Bildes $= y$ ist, die Fläche worüber das Bild ausgebreitet ist, $= \eta$; so ist $a - x$ die Vermindernng der Oefnung, welche von der Klarheit des Bildes y und der Grösse η desselben zugleich abhängt. Die Fasern aller Elemente der Fläche, worüber das Bild ausgebreitet ist, tragen das ihrige hiezu bey, und die Fäsern gleicher Elemente tragen gleichviel dazu bey. Diesemnach muß bey gleicher Erleuchtung die Verminderung der Oefnung des Sterns, oder $a - x$, der Grösse des Bildes proportional seyn. Wie $a - x$ bey einerley Grösse des Bildes von y abhänge, ist unbekannt. Demnach setze man, bey einerley Grösse des Bildes verhalte sich $a - x$ wie z, und z sey eine Function von y, so muß bey verschiedener Grösse und Klarheit des Bildes sich $a - x$ wie $\eta : z$ verhalten, oder es muß $\frac{\eta z}{a - x}$ eine beständige Zahl $= n$ seyn.

245. §.

Wäre es bekannt, wie z von y abhängt, so könnte man die Gleichung zwischen z und y als die Gleichung für eine krumme Linie betrachten, z und y aber als ein paar rechtwinklichte Coordinaten für diese Linie, so daß die Absciſſe AP $= y$, und die zugehörige Ordinate PM $= z$ genommen, der Punct M in dieser krummen Linie läge. Es sey die Klarheit oder der Glanz des Objects, wovon das Licht ins Auge fällt $=$ S, so ist hier x, was im 239. §. πb^2 war, und y verhält sich wie Sx. 89 F.

 Man

Man schreibe hier c statt dessen, was im 239. §. $\mu^2 a^2$ war, so ist $y = \frac{S \cdot x}{c}$, (241. §.) mithin $x = \frac{c \cdot y}{S}$. Weil aber $n(a - x) = \eta \cdot z$ angenommen werden konnte 244 §, so ist $a - \frac{AP \cdot c}{S} = \frac{1}{n} \eta \cdot PM$. Weil ferner der Voraussetzung gemäß allemahl $y = AP = \frac{S \cdot x}{c}$ seyn muß; so sey AQ derjenige Werth von y der dem Werth $x = a$ zugehört, so hat man $AQ = \frac{S \cdot a}{c}$, und $a = \frac{AQ \cdot c}{S}$, mithin $\frac{(AQ - AP) c}{S} = n \cdot \eta \cdot PM$, oder $\frac{PQ \cdot c}{S} = \frac{1}{n} \eta \cdot PM$, und $\frac{PQ}{PM} = \frac{\eta \cdot S}{nc} = \cot . PQM$.

Daraus würde folgende Regel fliessen, die Oefnung des Sterns im Auge für jede gegebene Klarheit und Grösse des Bildes zu finden, wenn die Verzeichnung der Linie AM als schon geschehen vorausgesetzt wird. Man nehme die Abscisse AQ $= S \cdot a$, setze an AQ bey Q einen Winkel, dessen Cotangente $= \frac{\eta \cdot S}{nc}$. Wenn nun PQM dieser Winkel ist, so lasse man MP auf die Abscissenlinie senkrecht fallen, dadurch findet man $AP = y$, und die

die gesuchte Oefnung des Sterns $x = \frac{AP \,.\, c}{S}$.
Wäre die Gleichung zwischen y und z für die krumme Linie AM bekannt, so könnte man in derselben $y = \frac{Sx}{c}$ statt y, und $\frac{n\,(a-x)}{\eta}$ statt z schreiben, so würde sich eine Gleichung ergeben, die x durch S und η bestimmte.

246. §.

Um nun wenigstens einigermaßen das Gesetz zu finden, nach welchem z von y abhängt, stellte H. Lambert folgende Versuche an. (Photom. Part. IV. Cap. II. §. 853.) In einem wohl verwahrten verfinsterten Zimmer ward im Fensterladen eine einzige kreisrunde Oefnung gelassen, durch welche das Licht eines reinen heitern Himmels von der Seite her hinein fiel, die von der Sonne abgewandt war. Nach dieser Vorbereitung nahm H. Lambert einen Spiegel zur Hand, stellte sich gegen die Oefnung, sahe gegen das hinein fallende Himmelslicht, wartete eine zeitlang, bis der Stern im Auge die dieser Erleuchtung gemässe Oefnung angenommen hatte, und maaß hiernächst mit einem Cirkelinstrument auf der Fläche des Spiegels den Durchmesser der Oefnung des Sterns. Vermöge der aus dem 83. und 84 §. schon bekannten Würkung des ebenen Spiegels, war der so gefundene Durchmesser der Oefnung des Sterns halb so groß, als der würkliche Durchmesser. Wenn nemlich DE die Oefnung im Fensterladen vorstellt, durch 90 F.
welche

welche das Licht auf den Stern AB des Auges fiel, und pq den Durchmesser des Sterns auf der Spiegelfläche gemessen, so war eigentlich das Bild ab des Sterns so weit hinter dem Spiegel, als der Stern AB selbst vor demselben, mithin $Aa : Ap = 2 : 1 = ab : pq$, und $pq = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2}$ AB. Der Versuch selbst ward in zehn verschiedenen Entfernungen des Auges von der Oefnung DE im Fensterladen angestellt, und jeder Versuch ward mehr denn einmahl mit Beobachtung aller möglichen Vorsicht wiederhohlt. Der Halbmesser CD der Oefnung im Fensterladen war 0,151 Fuß groß, und die Entfernungen CA betrugen nach und nach 1 Fuß, 2 Fuß, bis 10 Fuß, da dann für jede dieser Entfernungen $\tan CAD = \frac{CD}{CA}$, und daraus $CAD = \alpha$ besonders gesucht werden muste. Die Resultate dieser Versuche enthält folgende Tafel.

Abstand AC in Fussen	Winkel CAD	Durchmesser AB	Verbesserter Durchm. AB
1	8° 36′	1, 14	1, 13
2	4 20	1, 50	1, 44
3	2 53	1, 70	1, 70
4	2 10	1, 89	1, 93
5	1 44	2, 08	2, 15
6	1 $26\frac{1}{2}$	2, 31	2, 36
7	1 14	2, 53	2, 56
8	1 5	2, 78	2, 75
9	0 58	2, 89	2, 93
10	0 52	3, 15	3, 10

Die verbesserten Durchmesser des Sterns sind nach einer Methode, unvermeidliche Irrthümer bey

bey Beobachtungen und Versuchen zu berichtigen, gesucht worden, die H. Lambert im 275 u. f. 396. u. f. §. §. der Photometrie vorgetragen, nachher aber auch in seinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik I Theil 224 u. f. S. weiter ausgeführt hat.

Uebrigens hat H. Lambert den Durchmesser des Regenbogens 4, 7 Pariser Linien groß gefunden, und in eben diesem Maaß sind auch die in der Tabelle angeführten Durchmesser des Sterns im Auge gemessen.

247. §.

Jede dieser Beobachtungen giebt ein paar zusammen gehörige Werthe von y und z, und es ist dabey vorläufig zu bemerken, daß y und z in den Formuln des 245 §. eigentlich Zahlen, a und x aber so wie η und c Flächen bezeichnen. Weil nemlich a, x, c, Flächen sind, so muß $z = \frac{n(a-x)}{\eta}$ eine Zahl seyn, eben so wie $y = \frac{S.x}{c}$, weil S eine Zahl ist. Multiplicirt man mit $\frac{c}{na}$, so hat man auch $\frac{c}{na} \; z = \frac{1 - x:a}{\eta : c}$, und $z = \frac{na}{c}$. $\frac{1-x:a}{\eta : c}$. Setzt man ferner $\frac{a}{c} = m$, so ist $z = nm . \frac{1 - x : a}{\eta : c}$, und $y = \frac{m.S.x}{a}$. Es ist aber $\eta = \pi c \, tg \, \alpha^2$, und a war die Fläche der größten

sten Oefnung des Sterns im Auge: wenn man also die Fläche der jedesmahligen Oefnung x durch eine Zahl ausdrückt, wobey man die Fläche $a = 1^2$ annimmt, so kann man in den lezten Formuln x statt $\frac{x}{a}$ schreiben, und man erhält $z = \frac{n \cdot m\,(1 - x)}{\pi \operatorname{tg} \alpha^2}$, $y = m\,Sx$.

Bey den im vor. §. erzählten Beobachtungen war S die Klarheit des heitern von der Sonne erleuchteten Himmels, ferner waren x und α für jede Beobachtung bekannt, also liessen sich die Werthe $\frac{z}{n \cdot m} = \frac{1 - x}{\pi \operatorname{tg} \alpha^2}$ und $\frac{y}{m\,S} = x$ finden. Hiebey muß ich jedoch bemerken, daß H. Lambert den halben Durchmesser des Bildes auf der Nezhaut $pq = Vq \cdot \sin \alpha$ sezt, daher ist bey ihm $\frac{z}{n \cdot m} = \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2}$: beydes ist gleichgültig, so lange die Winkel klein sind, und eins wie das andre nur beynahe richtig. Uebrigens geben die Beobachtungen folgende Tafel.

Abstand AC	Oefnung x des Sterns	scheinb. Halbm. α	Fläche des Bild. $\pi \sin \alpha^2$	$\frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2} = \frac{z}{n \cdot m}$
1	0, 0578	8° 36′	0, 07025	13, 43
2	0, 0938	4 20	0, 01794	50, 51
3	0, 1308	2 53	0, 007954	113, 96
4	0, 1686	2 10	0, 004492	193, 52
5	0, 2092	1 44	0, 002875	289, 17
6	0, 2525	1 $26\frac{1}{2}$	0, 000311	393, 10
7	0, 2962	1 14	0, 001456	513, 52
8	0, 3423	1 5	0, 001123	626, 81
9	0, 5886	0 58	0, 0008942	735, 50
10	0, 4350	0 52	0, 0007188	850, 58

(M.

(M. s. a. a. O. den 857. §.) Nun wäre noch nöthig, eine Gleichung zwischen y und z zu suchen, welche die Eigenschaft hätte, daß in derselben $y = m$ Sx gesetzt, der Werth $z = nm \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2}$ eben so, wie es diese Tafel giebt, gefunden würde. Es müßte also $x = m S . 0,578$ gesetzt den Werth $z = nm . 13,43$ geben, oder $x = 0,578 . S$ gesetzt, müßte $z = 13,43 . n$ geben. Herr Lambert macht den Versuch mit der Gleichung $z = \frac{\nu . y^2}{A + y^2}$, und diese giebt $z (A + y^2) = \nu . y^2$, also

$$n . m \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2} (A + m^2 S^2 x^2) = \nu m^2 S^2 x^2.$$

Man setze $n = \mu . m$, $A = \alpha . m^2$, so erhält man $\frac{\mu(1 - x)}{\pi \sin \alpha^2} (\alpha + S^2 x^2) = \nu S^2 x^2$, und nun ist die Frage, ob die Coefficienten μ, ν, α, sich so bestimmen lassen, daß diese Gleichung allen zehn Beobachtungen ein Genüge leistet. Weil man auf beyden Seiten auch durch μ dividiren kann, so bedarf es nur zweyer Bestimmungen für α und $\frac{\nu}{\mu}$. Statt dessen kann man auch μ willkührlich nehmen und hiernächst α und ν suchen. H. Lambert nimmt $\mu = \frac{1}{1000}$ an, und bestimmt α und ν aus der 6ten und 10ten Beobachtungen, den Glanz des heitern Himmels $S = 1$ gesetzt. Das giebt

0,39310

$0,39310\,(\alpha + 0,2525^2) = 0,2525^2 \,.\, \nu$
$0,85058\,(\alpha + 0,4350^2) = 0,4350^2 \,.\, \nu,$
und man findet
$\alpha = 0,27385$, $\nu = 2,08155$.
Man kann $\nu = 2081,55$, und $\alpha = 0,27385$ annehmen, so hat man $\frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2}(\alpha + S^2 x^2) = \nu S^2 x^2$, und diese Gleichung gehörig geordnet giebt
$$S^2 x^3 + (\nu \pi S^2 \sin \alpha^2 - S^2) x^2 + \alpha x - \alpha = 0,$$
oder $x^3 + (\nu \pi \sin \alpha^2 - 1) x^2 + \frac{\alpha}{S^2} \,.\, x - \frac{\alpha}{S^2} = 0.$

248. §.

Ob nun gleich diese so gefundene Gleichung keinesweges für so zuverläßig zu halten ist, daß man in allen Fällen darnach ohne Bedenken rechnen könnte; so verdient doch die sinnreiche Art, wie Herr Lambert darauf kommt, alle Aufmerksamkeit. Vielleicht käme man der Wahrheit noch näher, wenn etwa Herr **Lambert** selbst, oder sonst jemand, noch mehrere Versuche mit den erzählten verbände. Eine von den dreyen Wurzeln der cubischen Gleichung giebt nur die Auflösung der Aufgabe, die eigentlich gesucht wird, und es ist nicht schwer in jedem Fall zu beurtheilen, welche von den dreyen Wurzeln die gesuchte sey. So lange $\sin \alpha^2 > \frac{1}{\nu \pi}$, also $\sin \alpha^2 > \frac{1}{6542} = 0,000152858$, mithin so lange $\sin \alpha > 0,01236$, und $\alpha > 42\frac{1}{2}$ ist; so lange sind zwey Wurzeln negativ, fals sie alle drey möglich sind, und nur die positive

positive Wurzel ist die gesuchte. Wäre aber auch $\alpha < 42\frac{1}{2}°$ und alle drey Wurzeln positiv, so ist doch die gesuchte allemahl < 1. Die Voraussetzung $S = \infty$ giebt $x = 0$, wie erfordert wird, die Voraussetzung $S = 0$ aber giebt $x = 1$, wie ebenfals der Sache gemäß ist. Nimmt man $\alpha = 0$, so hat die Gleichung ebenfals die Wurzel $x = 1$, welches alles mit dem 244 §. überein kommt.

249. §.

Uebrigens mag diese Gleichung immer noch mehrerer Verbesserung bedürfen, so erhellet doch aus demjenigen, was bisher vom Bau des Auges, und der Art, wie das ins Auge fallende Licht die Empfindung des Sehens veranlasset, ist vorgetragen worden, soviel, daß man berechtiget sey, folgende Regel anzunehmen: **Bey gleicher scheinbaren Grösse und gleichem Glanz zweyer leuchtenden Gegenstände, ist auch ihr scheinbarer Glanz einerley.**

Umgekehrt: **Wenn bey gleicher scheinbaren Grösse zwey leuchtende Flächen, die man beyde zugleich mit einem Blick übersehen kann, gleich stark glänzend scheinen; so haben sie würklich einen gleichen Glanz.** Die Oefnung des Sterns im Auge wird nun gewis für beyde Bilder einerley seyn: und die gleiche scheinbare Grösse wird um deswillen vorausgesetzt, damit die Empfindung der einen Fläche sich durch keinen Umstand von der Empfindung der andern Fläche unterscheide, oder das Auge von beyden vollkommen auf einerley Art gerührt werde.

Die Rede ist in beyden vorgetragenen Regeln vom Glanz eines für sich leuchtenden Körpers, dergleichen die Sonne oder eine Lichtflamme ist, welcher in den allgemeinen Formuln jedesmahl ist mit S bezeichnet worden. Vornemlich aber ist dabey vorausgesetzt worden, daß es Körper gebe, deren äussere Fläche leuchtend oder glänzend sey, ohne daß übrigens die innern Elemente der Masse ebenfals glänzend, die Masse selbst aber so durchsichtig sey, daß die innern Theile durchscheinen könnten. Wenn es gleich mit der Flamme einer angezündeten Kerze die zulezt erwehnte Bewandniß hat, so könnte es doch wohl mit der Sonne und andern für sich glänzenden Massen, wie etwa ein glühendes Stück Eisen wäre, diejenige Bewandniß haben, welche bey den Schlüssen des 34sten und 35sten §. ist vorausgesezt worden. So wie dies noch eine nähere Prüfung verdient, so bedarf es auch noch einer fernern Untersuchung: ob es auch mit solchen Körpern die im 34sten §. angenommene Bewandniß habe, welche für sich dunkel und undurchsichtig sind, aber durch Zurückwerfung des von leuchtenden Körpern auf ihre äussere Fläche fallenden Lichts einen entlehnten Glanz bekommen? Mit der Erörterung dieser lezten Frage wird sich der folgende Abschnitt beschäftigen: um jene Prüfung, wie weit die Gesetze des 33 und 34 §. bey der Sonne oder andern uns bekannten für sich glänzenden Flächen ihre Anwendung finden, anzustellen, wird das nun folgende eine nähere Anleitung geben.

250. §.

Weil der scheinbare Halbmesser der Sonne wenig mehr als $\frac{1}{4}$ Grad beträgt, so ist die Erleuchtung ihres Bildes auf der Nezhaut für Stellen, die mit denjenigen zusammen gehören, welche dem scheinbaren Sonnenrand nahe sind, von der centralen Klarheit des Bildes so sehr wenig verschieden, daß eben deswegen die scheinbare Sonnenscheibe überall gleich klar erscheinen muß, wenn man durch zarte Wolken, niedrig am Horizont durch die daselbst befindlichen Dünste, oder auch durch ein über einer Lampe schwarz angelaufenes Glas grade hinein siehet. Der unterschied der Erleuchtung derjenigen Elemente des Bildes, welche dem Umfang am nächsten liegen, beträgt noch nicht $\frac{1}{10000}$ der centralen Erleuchtung, (239 §. n. 6) wie sich ergiebt, wenn man in der angeführten Stelle $\psi = 16'$ annimmt. Hiemit stimmt auch die Erfahrung völlig überein, und durch eben diese Erfahrung läßt sich umgekehrt beweisen, daß der Saz des 34 §. bey der Sonne seine Anwendung finde. Man kann die ganze scheinbare Sonnenscheibe mit einem Blick bequem übersehen, deswegen wird man nicht auf den Zweifel verfallen, daß vielleicht der Stern im Auge eine andre Oefnung haben werde, wenn man gegen den Sonnenrand siehet, als in dem Fall, wenn die Gesichtsaxe gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet ist: also ist wohl kein Zweifel übrig, daß nicht das Bild der Sonne auf der Nezhaut überall gleiche Klarheit hätte. Der Umstand, daß auf der nenscheibe zuweilen Flecken erscheinen, wird hier beyseite gesezt, weil er in der Sache selbst nichts ändert. M. s. hievon H. Lamberts Photom. Part. I. Cap. II. §. 74 - 80.

Wäre die Erleuchtung bey jeder Schiefe des Ausgehungswinkels einerley, wenn sonst alles übrige einerley ist, oder verbreitete jedes Element der Sonne in jeden conischen Raum von gleicher Grösse eine gleiche Lichtmenge; so müste man (mit Beiseitsetzung der Regel des 34. §.) im 205 §. n.
74 F. 3. die Lichtmenge, welche die Zone $Zz\,Yy$ der Kugel auf das Glas BD sendet, $=$

$$\frac{2\pi^2 r^2 b^2 \cos\psi\, d\varphi \sin\varphi}{KZ^2}$$ annehmen, und die Erleuchtung des Ringes uv fände man $=$

$$\frac{\pi r^2 b^2 \cos\psi\, d\varphi \sin\varphi}{KZ^2 \cdot g^2 \operatorname{tg}\psi \cdot d \operatorname{tg}\psi} = y.$$ Würde nun der Werth $d \tan\psi = \frac{r\, d\varphi(\delta \cos\varphi - r)}{(\delta - r\cos\varphi)^2}$ substituirt,

so hätte man $y = \frac{\pi b^2 \cos\psi^2 (\delta - r\cos\varphi)^2}{KZ \cdot g^2 (\delta \cos\varphi - r)}$, und $\delta - r\cos\varphi = KZ \cos\psi$ gesetzt, gäbe $y =$ $\frac{\pi b^2 KZ \cos\psi^4}{g^2(\delta\cos\varphi - r)}$, oder $y = \frac{\pi b^2(\delta - r\cos\varphi)}{g^2(\delta\cos\varphi - r)} \cdot \cos\psi^3$.

Weil ψ und φ zugleich verschwinden, so giebt diese Formul, wie die im 205 §. n. 3. gefundene, die centrale Erleuchtung $= \frac{\pi b^2}{g^2}$, welches auch den Voraussetzungen, worauf sich beyde Formuln gründen gemäß ist. Dagegen wächst bey der jezigen Voraussetzung y, wenn ψ und φ wachsen.

Schon

Schon aus Betrachtung der Figur erhellet, daß φ sehr schnell wachse, wenn ψ von der o an wächst, δ aber gegen r sehr groß ist, und eben das giebt die Gleichung $\operatorname{tang}\psi = \dfrac{r\sin\varphi}{\delta - r\cos\varphi}$, woraus man umgekehrt $\sin\varphi = \sin\psi(n\cos\psi \pm \sqrt{(1-n^2\sin\psi^2)})$ erhält, $\dfrac{\delta}{r} = n$ gesetzt, wobey zu bewerken ist, daß für den Winkel AOX (74 Fig.) hier das zeichen (–) gelte. Nun bleibt $\cos\psi$ so lange sehr nahe $= 1$, als ψ noch nicht $16'$ übertrift, also bleibt beynahe $n\cos\psi = n$. Sobald $\sin\psi = \dfrac{r}{\delta} = \dfrac{1}{n}$ wird, hat man $\sin\varphi = \cos\psi$, und $\varphi = 90° - \psi$. Wie nun bey der Sonne $\dfrac{r}{\delta}$ nie über $\dfrac{1}{200}$, also ψ nie über $17'$ beträgt, so wird sehr bald $n\sin\psi = 1$, also wächst $n\cos\psi - \sqrt{(1-n^2\sin\psi^2)}$, mithin $\sin\varphi$ sehr schnell mit ψ, welches alles auch aus Betrachtung der Figur erhellet. Diesemnach nimmt $\cos\varphi$ sehr schnell ab, und $y = \dfrac{\pi b^2(\delta - r\cos\varphi)}{g^2(\delta\cos\varphi - r)}$ $\cos\psi^3$ wächst sehr schnell, so daß y unendlich groß würde, wenn ψ dem scheinbaren Halbmesser der Sonne gleich, also $\sin\psi = \dfrac{r}{\delta} = \cos\varphi$ würde.

Wofern also jedes Element der Sonne nach allen Seiten in gleiche conische Räume, die von demselben als ihrer Spitze ausgehen, einerley Lichtmenge gleichförmig verbreitete; so müste die scheinbare Klarheit der Sonnenscheibe vom Mittelpunct gegen den Umfang zu so sehr zunehmen, daß so gar die Klarheit ihres äussern Umfangs alle Gränzen übertreffen müste. Weil nun dies schlechthin wider die Erfahrung ist, so kann es wenigstens nicht wahr seyn, daß von einerley Element der Sonne bey jedem Ausflußwinkel sich gleichviel Licht durch gleiche conische Räume verbreite.

251. §.

Hat es nun überdem seine Richtigkeit, daß alle Elemente der Sonne eine gleiche scheinbare Klarheit haben, so ist nunmehro die Wahrheit des Satzes im 34 §. für die Sonne, und alle ihr ähnliche für sich leuchtende, und dabey undurchsichtige Körper zur Gnüge bestättiget. Herr **Bouguer**, im Traité d'optique sur la gradation de la lumiere, Paris 1760 Liv. I. Sect. II. Art. XII. pag. 90, stellt eben diese Untersuchung an. Er setzt als ausgemacht zum Grunde, daß die scheinbare Sonnenscheibe überall einerley Klarheit zu haben scheine, auch wenn man sie durch ein Fernrohr betrachte, daß die Gegenstände viel vergrössert: er setzt ferner als richtig zum Grunde, daß diese Sonnenscheibe vom Mittelpunct gegen den Umfang zu immer mehr Klarheit, und am Umfang selbst eine unendlich grosse Klarheit zu haben scheinen müste, wenn die Schiefe des Ausflußwinkels das Licht nicht schwächte: er kommt auch selbst auf die Folge, daß das Licht dem Sinus des Ausflußwinkels proportional abnehme, fals es anders seine Richtigkeit habe, daß die Sonnenscheibe würklich überall gleiche Klarheit zu haben scheine. Dies leztere aber hält Herr **Bouguer** nicht für ausgemacht. Er glaubt: die

Klar-

Klarheit des Bildes auf der Nezhaut könnte wohl durch unmerkliche Stuffen gegen den Umfang zu wachsen oder abnehmen; und bey dem allen könnte sich doch in unsre Empfindung eine Art von Trugschluß mischen, vermöge dessen wir alle Elemente der scheinbaren Scheibe für gleich klar halten würden, wenn die sehr geringe Verschiedenheit der Klarheit zweyer zunächst an einander gränzenden Elemente auf der Nezhaut, bey sehr geringer Verschiedenheit ihrer Entfernungen vom Mittelpunct, keine Empfindung einer verschiedenen Klarheit der damit zusammen gehörigen Elemente der Sonnenscheibe veranlaßte. Hätte es hiemit seine Richtigkeit, so würde dem Auge die verschiedene Klarheit des Mittelpuncts und einer nahe am Umfang liegenden Stelle alsdann empfindlich werden, wenn man machen könnte, daß das Auge diese beyden Stellen allein, und die dazwischen liegenden Elemente nicht zugleich mit empfände.

252. §.

Wofern das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels noch stärker als im Verhältniß des Sinus dieses Winkels abnimmt, so muß die scheinbare Klarheit der Stellen der Sonne gegen ihren Umfang zu kleiner, als die scheinbare Klarheit ihres Mittelpuncts seyn, denn man übersiehet leicht ohne Rechnung, daß nun die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut gegen den Umfang zu abnehmen müsse. Aus eben dem Grunde würde die Klarheit des Sonnenbildes im Brennraum einer erhabenen Glaslinse gegen den Umfang zu kleiner als in der Mitte seyn, und doch könnte dies Bild wegen eines ähnlichen Trugschlusses, der sich, wie vorhin schon bemerkt ist, in die Empfindung mischte, dem Auge überall gleich klar zu seyn scheinen. Um die Verschiedenheit der Klarheit wahrzunehmen, müste man machen, daß das Auge die mittelste Stelle des Bildes, und eine Stelle in der Nähe des Umfangs allein, die dazwischen liegenden Stellen aber nicht zugleich mit empfände: auf solche Art würde die Verschiedenheit der Klarheit beyder Stellen empfindlich werden. Hr. Bouguer hat einen Versuch angestellet, der den Zweifel erledigen soll, ob die scheinbare Klarheit des Sonnenbildes würklich überal einerley sey, oder ob vielleicht die Verschiedenheit derselben in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunct nur um deswillen vom Auge nicht bemerkt werde, wenn es die ganze Scheibe mit einem Blick übersiehet, weil alsdenn die Differenz der Klarheit solcher Elemente des Bildes auf der Nezhaut, die unmittelbar an einander Gränzen, unendlich klein ist. Er hat sich dabey eines Instruments von folgender Einrichtung bedient.

253. §.

91 F. Von zweyen einander völlig gleichen und ähnlichen Glaslinsen, die also eine gleiche Brennweite haben, ist jede in einer Röhre AB, CD, bey A und C so befestiget, daß sie selbige gleichsam wie ein Deckel verschließt. Jede Röhre ist so lang als die Brennweite der Linse, und am andern Ende dem Glase gegen über bey B und D mit einem Deckel verschlossen, worin sich ein kreisrundes Loch von etwa 3 bis 4 Linien im Durchmesser befindet, das mit einem Stückchen von feinen weissen Papier, oder

matt-

mattgeschliffenen Glase bedeckt ist. Die Linse muß in der Röhre so eingesezt werden, daß ihre Axe mit der Axe der Röhre zusammen fällt. Wenn nun eine dieser Röhren grade gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet und die Glaslinse am vordern der Sonne zugekehrten Ende befindlich ist, so fällt das Bild der Sonne auf den Boden der Röhre, und nach Beschaffenheit der übrigen Umstände entweder ganz oder zum Theil auf das im Boden befindliche weisse Papier, oder das matte Glas. Um alles fremde Licht bey Betrachtung beyder Bilder abzuhalten, werden beyde Röhren bey einander in eine dritte weitere Röhre gestellt, die unten ganz offen, und so weit ist, daß wenn man unten hinein siehet, die Stirn und der übrige Theil des Gesichts allenthalben anschliesse. Soll das Bild der Sonne nicht so gar klein ausfallen, so muß die Brennweite der Gläser etwas groß seyn, also nicht weniger als 6 Fuß halten, und noch besser ist es, wenn sie 10 bis 12 Fuß beträgt. Sezt man die Brennweite $= f$, so ist der Halbmesser des Bildes nie Grösser, als $\frac{1}{200} f$, also nie grösser als $\frac{1}{20}$ Fuß, oder $7\frac{1}{5}$ Linien, wenn $f = 10$ Fuß ist; oder $8\frac{16}{25}$ Linien, wenn $f = 12$ Fuß ist. Fals nun die Axe des Glases mit der Axe der Röhre zusammen fällt, so fällt der Mittelpunct des Bildes in den Mittelpunct des Bodens: und wenn im Boden der einen Röhre die kleine mit weissen Papier oder matten Glase geschlossene Oefnung im Mittelpunct im Boden der andern Röhre aber seitwärts des Mittelpuncts um einige Linien davon entfernt angebracht ist, so kann nun das Auge die centrale Erleuchtung des einen Bildes mit der Erleuchtung des andern Bildes in einer vom Mittelpunct entfernten Stelle unmittelbar vergleichen.

254. §.

Herr Bouguer glaubt nun, die centrale Erleuchtung des einen Bildes grösser gefunden zu haben, als die Erleuchtung des andern Bildes an Stellen gegen den Umfang desselben, und es kam nur noch darauf an, die centrale Klarheit des einen Bildes mit der Klarheit des andern Bildes an einer vom Mittelpunct entfernten Stelle genauer zu vergleichen, welches sich so bewerkstelligen ließ. Die centrale Klarheit des Bildes $\frac{\pi b^2}{g^2}$ (205. §. n. 2.) verhält sich wie die Fläche der Oefnung der Glaslinse: deswegen kann man sie vermindern, wenn man die Oefnung verringert. Ob man nun gleich vermittelst dunkler Ringe, wie sie schon im 218 §. beschrieben sind, das Glas bedecken, und dadurch die Fläche des Glases, so weit das Licht durchfällt, verringern könnte; so verfährt Herr Bouguer doch noch behutsamer. Weil die Linse in der Mitte etwas dicker ist, als gegen den Umfang zu, und eben deswegen auch ihre Durchsichtigkeit in der Mitte nicht völlig mit ihrer Durchsichtigkeit gegen den Umfang zu einerley ist; so zerschneidet H. Bouguer eine Scheibe von gleichem Durchmesser mit dem Glase in gleiche Sectoren, und bedeckt mit einem oder einigen dieser Sectoren einen Theil der Linse, so daß der bedeckte Theil ebenfalls die Figur eines Kreisausschnitts hat. Auf solche Art werden vom Mittelpunct gegen den Umfang

fang zu proportionale Theile des Glases bedeckt, und man kann mit mehrerer Sicherheit annehmen, daß die nach der Bedeckung durchfallende Lichtmenge sich zu der durch das völlig offene Glas fallenden Lichtmenge verhalte, wie der offen gebliebene Theil des Glases zur ganzen Fläche desselben vor der Bedeckung.

Beym Versuch selbst nun muste Herr Bouguer $3\frac{1}{4}$ Zwölftel der Oefnung des einen Glases bedecken, bis er es dahin brachte, daß die Mitte des Bildes nur eben so helle blieb, als eine eben so grosse Stelle des andern Bildes in einer Entfernung vom Mittelpunct war, die $\frac{3}{4}$ des Halbmessers vom Bilde ausmachte. Weil nun die Klarheit bey gleicher Fläche sich wie die auffallende Lichtmenge verhält, so war nun die auf beyde Stellen der Bilder fallende Lichtmenge gleich, und fals es mit allen Umständen des Versuchs seine völlige Richtigkeit hat, so ließ sich daraus die Schlußfolge ziehen: die Lichtmenge auf der Mitte des Bildes verhalte sich zur Lichtmenge auf einer um $\frac{3}{4}$ des Halbmessers davon entfernten Stelle $= 12 : 8\frac{3}{4} = 48 : 35$.

255. §.

Hätte es mit diesem Versuch seine unfehlbare Richtigkeit, so würde das Gesez des 34 §. eine ziemliche Aenderung leiden. Zwar behielte es seine Richtigkeit, daß das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels Abgang leide: nur wäre dieser Abgang grösser, als nach der Regel des 34 §. angenommen wird. Allein H. Bouguer gestehet selbst a. a. O. 92 S., daß er den Versuch öfterer als

als geschehen, hätte wierhohlen müssen, ob er es gleich drey bis viermahl gethan habe: auch gestehet er, daß der Versuch überhaupt viele Schwierigkeit habe, wenn man sich davon versichern wolle, wie weit die Stellen, deren Klarheit mit der centralen verglichen worden, eigentlich vom Mittelpunct entfernt sind. Ich glaube, der Versuch hätte besonders auch mit mehrern andern Glaslinsen von grösserer und kleinerer Brennweite wiederhohlt werden müssen. Besonders aber hätte sich Herr Bouguer davon versichern müssen, ob auch die Brennweite der Gläser aufs vollkommenste richtig gemessen sey, und das Papier oder matte Glas im Boden der Röhre aufs genaueste in der Entfernung des eigentlichen Brennpuncts vom Glase seine Stelle gehabt habe. Ein kleiner Irrthum hierin muste nothwendig zum Fehlschluß aus dem Versuch Gelegenheit geben. Es ist nemlich nur für das völlig deutliche Bild der Sonne wahr, daß es in allen Stellen sehr nahe gleich stark erleuchtet sey, nicht für das undeutliche Bild. (210. u. f. §. §.) War das weisse Papier oder das matte Glas der Glaslinse nur um ein weniges näher, oder um ein weniges weiter davon entfernt, als die Brennweite erforderte, so war das Bild nicht mehr überall gleich stark erleuchtet, sondern in der Mitte heller, als gegen den Umfang zu. Demnach sind diese Versuche noch nicht entscheidend genug, daß man deswegen genöthiget seyn sollte, ein andres Gesetz für die Verminderung des Lichts wegen der Schiefe des Ausflußwinkels anzunehmen, als das oben festgesezte, vermöge dessen die Verminderung dem Sinus des Ausflußwinkels proportional ist.

Der XVIII. Abschnitt.

Gründe der Theorie von Ausmessung des Lichts, wenn es von unpolirten Flächen zurück strahlet.

256. §.

Wenn man einen für sich dunklen und für unsre Empfindung völlig undurchsichtigen Körper in ganz dünne Blättchen zerschneidet, so werden leztere durchsichtig, und lassen wenigstens einiges Licht durch. Die Masse, woraus ein dünnes Blättchen dieser Art bestehet, mag seyn von welcher Beschaffenheit sie wolle, das Licht scheint allemahl einigermaßen durch, und vermöge dieser Erfahrung ist man berechtiget, alle für sich dunkle Massen für durchsichtige anzunehmen: nur wird die Durchsichtigkeit bey einer gewissen Dicke der Masse aufhören. (M. s. Traité d'optique sur les reflexions etc. par Mr. Chevalier Newton. Tom. II. Liv. II. Part. III. Prop. II. pag. 336. 337.) Die Undurchsichtigkeit der Masse ist desto grösser, je kleiner die Dicke ist, bey der die Masse aufhört, durchsichtig zu seyn: dagegen ist die Undurchsichtigkeit desto kleiner, und die Masse desto mehr durchsichtig, je grösser die Dicke derselben werden kann, bevor sich ihre Durchsichtigkeit verliert. Selbst das Glas und andre ähnliche Massen, die wir sonst für durchsichtig halten, sind in eben diesem Verstande in einem gewissen Grade undurchsichtig. Je dicker ein Stück Glas ist, desto weniger Licht läßt es durch, und es giebt eine gewisse Dicke, wobey die Durchsichtigkeit des Glases entweder würklich ganz aufhört, oder doch wenigstens für unser Gesicht nicht mehr bemerklich ist.

257. §.

92 F. Es sey nun ABCD eine sonst undurchsichtige Masse, jedoch nur in dem Grade, daß wenn von derselben die Scheibe A*ab*B abgeschnitten würde, diese schon anfienge, das auffallende Licht durchzulassen: so erhellet, daß auch alsdenn das auffallende Licht eben so tief in die Masse ABCD eindringen werde, wenn gleich diese Scheibe A*ab*B mit der übrigen Masse verbunden bleibt. Es wird aber nicht alles Licht in die Masse hineindringen, sondern ein Theil desselben schon von der äussern Fläche AB theils unter einerley Winkel zurück geworfen, theils nach allen Seiten zerstreuet werden. Weil ferner das ganze Stück A*ab*B der Masse wenigstens einige Durchsichtigkeit hat, und auf alle Theilchen der Masse bis an *ab* etwas von dem eindringenden Licht fällt, welches sie nach allen Seiten zerstreuen; so geht hinwiederum von diesem zerstreueten Licht ein Theil zur Fläche AB heraus, und macht die innern Theilchen der Masse bis an *ab* sichtbar. Hätte es nun mit diesen Theilchen der Masse eine solche Bewandniß, daß sie ins gesammt einerley einfaches gleichartiges Licht zurück schickten, wie etwa das rothe oder blaue Licht, so würde die Masse roth oder blau aussehen. Daß es mit den Farben der Körper wohl eine solche Bewandniß haben könnte, lehrt die Erfahrung schon beym Glase, weil ein Stück sonst klares und im hohen

Grade

Grade durchsichtiges Glas eine desto mehr ins grüne oder blaue fallende Farbe zeigt, je dicker es ist. Jede Glastafel von dem schönsten weissen Glase hat, wie sehr bekannt ist, einen blauen, oder ins grüne spielenden Rand, und man wird sich leicht davon überzeugen, daß diese Farbe demjenigen Licht nicht allein zugeschrieben werden kann, welches die äussere Fläche des Randes nach allen Seiten zerstreuet, daß vielmehr die innern Theile des Glases durchscheinen.

258. §.

Diese Erfahrungen vorausgesetzt, ist es verstattet anzunehmen, daß sich das Licht, was auf eine für sich dunkle undurchsichtige Masse fällt, folgendermaßen vertheile. Hat die äussere Fläche derselben einige Politur, so wirft sie etwas Licht nach dem Gesetz des 81. §. unter einerley Winkel zurück, zerstreuet aber auch einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten: man kann jenes kürze halber das catoptrische, dieses das zerstreuete Licht nennen. Was in die Masse hinein dringt, und von den innern Theilchen wieder nach allen Seiten zerstreuet wird, geht nur zum Theil zur äussern Fläche, auf die es auffiel, zurück, durch selbe aber zur Masse heraus: und dies ist das gefärbte, oder vielmehr die Erscheinung der Farbe der Masse verursachende Licht: das übrige in die Masse, soweit sie einige Durchsichtigkeit hat, hineinfallende Licht, was nicht mit dem gefärbten Licht wieder durch die äussere Fläche zurück geht, muß man als verlohren oder von der Masse gleichsam verschluckt betrachten. (Traité d'

optique

optique par Mr. le Chev. Newton. Tom. I. Liv. I. Part. II. Prop. X. pag. 234. sqq. Ed. Amst. Tom. II. Liv. II. Part. III. Prop. V. pag. 341. sqq.) Fällt das Licht in der Richtung EF auf AB, so siehet ein Auge, das in G stehet, zugleich nicht allein das nach der Richtung FG zurück geworfene catoptrische, sondern auch das zerstreuete und gefärbte Licht, weil beydes das zerstreuete und gefärbte sich nach allen Seiten ausbreitet. Je mehr Politur die Fläche hat, desto grösser ist die Menge des catoptrischen Lichts, und diese kann so groß seyn, daß dadurch die Empfindung des gefärbten und zerstreueten Lichts ganz verdunkelt wird. Steht dagegen das Auge in O, so siehet es allein das zerstreuete und gefärbte Licht, nicht das catoptrische: jene beyden Arten sind allemahl mit einander vermengt, und kommen ins Auge, es stehe wo es wolle, weil beydes das zerstreute und gefärbte Licht nach allen Seiten ausgehet.

Je weniger die äussere Fläche der Masse polirt ist, desto geringer ist die Menge des spiegelartig zurück geworfenen Lichts und die Menge des nach allen Seiten zerstreueten Lichts desto grösser. Eine Fläche, die gar keine Politur hat, wirft gar kein Licht spiegelartig zurück, sie zerstreut dasjenige, was nicht in die Masse eindringt, nach allen Seiten.

259. §.

Eine dunkle für sich nicht leuchtende Masse nimmt die Natur einer für sich leuchtende Masse an, wenn sie von fremden Licht erleuchtet wird. Man muß aber hiebey den Glanz oder die Klarheit, welche

welche ihr das spiegelartig zurück geworfene Licht giebt, von derjenigen Klarheit unterscheiden, welche in dem nach allen Seiten von ihr ausgehenden Licht gegründet ist. Sowohl das gefärbte als auch das zerstreute Licht geht von jedem Element der erleuchteten Fläche einer solchen für sich dunklen Masse nach allen Seiten eben so aus, wie es von jedem Element einer für sich leuchtenden Fläche nach allen Seiten umher strahlet: dasjenige Licht aber, was von dem erleuchteten Element spiegelartig zurück strahlet, nimmt nur eine bestimmte Richtung. Dies spiegelartig zurückgeworfene Licht wird gänzlich ausgeschlossen, wenn von der Klarheit der erleuchteten Fläche in dem Verstande die Rede ist, wie dies Wort oben im 14 §. ist erklärt worden. Wenn Ll also ein 1 Fig. Element einer dunklen unpolirten Fläche ist, das eine Erleuchtung $= I$ empfängt, so daß die auffallende Lichtmenge $= I \,.\, Ll$ ist; wenn ferner dies Element einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten zurück strahlet, der sich zur auffallenden Lichtmenge, wie $n : 1$ verhält, und nun die Klarheit des Elements $= \sigma$ gesetzt wird: so ist $\sigma = n \,.\, I$. (17. §.) Hiedurch muß also diejenige Lichtmenge verstanden werden, welche eine Fläche von eben der physischen Beschaffenheit, deren Grösse $= 1$ ist, nach allen Seiten umher strahlen würde, wenn sie gleichförmig erleuchtet, und die Erleuchtung $= I$ wäre.

Was im 17. §. angenommen ward, daß bey einerley physischen Beschaffenheit der erleuchteten Fläche, also auch für ein und eben dasselbe erleuchtete Element, die Zahl n einerley bleibe, wenn gleich I grösser oder kleiner würde, muß so lange als Voraussetzung gelten, bis sich Gründe finden, diese Voraussetzung zu verlassen. Daß ein und eben dasselbe Element 2, 3, und überhaupt *m* mahl mehr Licht nach allen Seiten aussende, wenn es 2, 3, und überhaupt *m* mahl mehr Licht empfängt, ist die einfachste Voraussetzung, die man vorziehen muß, so lange keine überwiegende Gründe vorhanden sind, eine andre Voraussetzung anzunehmen.

Fällt ein Theil desjenigen Lichts, welches das erleuchtete Element nach allen Seiten aussendet, aufs neue auf eine andre für sich dunkle Fläche; so läßt sich die Erleuchtung, welche jene mit fremden Licht strahlende Fläche dieser zuschickt, auf ähnliche Art suchen, wie man sie suchen würde, wenn jene Fläche einen eigenthümlichen Glanz hätte. Die im 35 und 36 §. bewiesenen Formuln finden ihre Anwendung, wenn man statt dessen, was daselbst *s* hieß, das nunmehro in Rechnung bringt, was hier mit σ bezeichnet ist: da dann bey der Anwendung auf Flächen von dieser oder jenen besondern physischen Beschaffenheit, die Zahl *n* besonders gesucht werden muß. Uebrigens setzen die Formuln des 35 und 36 §. die allgemeine Richtigkeit des im 34 §. bewiesenen Satzes voraus, der sich auf den zweyten im 2 §. angenommenen Hauptgrundsatz der Photometrie gründet. Wie nun im 245 und 246 §. die Uebereinstimmung jener Voraussetzungen mit der Erfahrung für den Fall besonders bewiesen ist, wenn die Erleuchtung von einem für sich leuchtenden Körper kommt; so wird es nicht überflüßig seyn, die Erfahrung auch in dem Fall zu

Rathe

Rathe zu ziehen, wenn die erleuchtende Fläche mit fremden Licht strahlet.

260. §.

Man setze zwey ebene Flächen, die am be- 93F.
quemsten die Gestalt eines Rechtecks haben können, unter einen Winkel BAC von willkührlicher Grösse zusammen, in L stelle man eine Kerze so, daß sie von beyden Flächen gleich weit entfernt ist, und die bey E und F rechtwinklichten Dreyecke AEL, AFL, gleich groß würden, so sind nicht allein die Stellen E und F, sondern auch jede zwo andre von E und F gleich weit entfernte gleich stark erleuchtet. Sind die Flächen nur klein, und man nimmt den Winkel BAC so groß, daß EA = EB = FA = FC in Vergleichung mit LE = LF nur klein sind, so werden AB und AC beynahe gleichförmig erleuchtet seyn. In HI stelle man eine Glaslinse, und fange die Bilder *ab*, *ac*, der Flächen AB, AC, mit der Ebene MN auf; so werden beyde Bilder gleich stark erleuchtet seyn, und dies allemahl, wenn man gleich die Stelle der Linse HI so ändert, daß sich die Winkel CAG, BAG ändern. Am besten ist es, wenn man die Linse so weit entfernt, daß AG, BG, CG, in Vergleichung mit AB, AC, ziemlich groß sind, damit alles Licht, was von AB, oder AC, auf die Linse fällt, beynahe unter einerley Winkel ausfliesse.

Weil die Stellung willkührlich ist, so sey AB auf AG senkrecht, CAG aber ein spitzer Winkel von willkührlicher Grösse. Aus C falle CD auf AG senkrecht, und es sey AC = AB; so hat man AB : *ab* = AG : *a*G, und CD : *ac* = GD (bey-

 nahe

nahe = AG) : aG, also AB : ab = CD : ac. Es ist aber CD = AC sin CAD, und AC = AB, also AB : CD = 1 : sin CAD = ab : ac. Weil ferner vermöge der Erfahrung beyde Bilder ab, ac, gleich klar, und wenigstens beynahe von gleichförmiger Klarheit sind; so verhält sich die über ab verbreitete Lichtmenge zu der über ac verbreiteten, wie ab : ac = 1 : sin CAD, und eben dies sind die Lichtmengen, welche die Flächen AB, AC, auf die Linse schicken. Diesemnach beweiset der Versuch, daß **die Lichtmenge dem Sinus des Ausflußwinkels auch alsdenn proportional sey, wenn die leuchtende Fläche nicht mit eigenem, sondern mit entlehntem Licht glänzt.**

Der Erfolg ist einerley, man mag Flächen von weisser Farbe, oder solche wählen, die mit einerley Mahlerfarbe, jedoch gleichförmig, und so bestrichen sind, daß sie keinen spiegelartigen Glanz haben. M. s. H. Lamberts Photomet. Part. III. Cap. II. §. 700 -- 702. pag. 323. 324.

Der XIX. Abschnitt.

Prüfung der Theorie des H. Bouguer vom Licht, das unpolirte Flächen zurück werfen.

261. §.

Herr Bouguer stimmt zwar darin mit Herrn Lambert überein, daß er annimmt, die

Menge

Menge des von unpolirten Flächen zurück strahlenden Lichts sey nicht bey jedem Ausflußwinkel einerley: auch schließt er aus seinen angestellten Versuchen, daß diese Lichtmenge mit dem Sinus des Ausflußwinkels abnehme. Darin aber weicht er wiederum vom H. Lambert ab, daß er nicht allein ein anderes Gesetz annimmt, als dasjenige, vermöge dessen die erwehnte Lichtmenge dem Sinus des Ausflußwinkels proportional gesetzt wird, sondern auch glaubt gefunden zu haben, dies Gesetz sey für verschiedene Arten zurückstrahlender Massen verschieden. Seine Theorie ist an sich sehr sinnreich, und schon dies würde mir die Pflicht auflegen, die Gründe anzuführen, warum ich ihr meinen Beyfall nicht geben kann, die Lambertische aber der Natur gemässer zu seyn glaube; wenn es nicht ohnehin schon seinen Nutzen haben könnte, zu wissen, wie ein Schriftsteller, der um die Wissenschaft sonst so grosse Verdienste hat, die Sache untersucht habe. Auch habe ich gefunden, daß man die hieher gehörigen dem H. Bouguer eigenen Begriffe und Sätze zuweilen ohne alle Beurtheilung abschreibt, nicht anders, als wenn es lauter ausgemachte Wahrheiten wären.

262. §.

Wofern die Theilchen auf einer unpolirten, oder auch mattgeschliffenen undurchsichtigen Fläche, welche als so viele kleine Erhöhungen in unzähliger Menge neben einander liegen, und die Fläche überall bedecken, das Licht insgesammt spiegelartig nach dem Gesetz des 81 §. zurück werfen; so wird das Gesetz, nach welchem das von einer solchen

Fläche zurück strahlende Licht sich nach allen Seiten ausbreitet, von der Figur dieser Erhöhungen abhängen, die man sich alsdenn als so viele unendlich kleine Spiegel vorstellen kann. Hätten sie insgesammt die Figur einer Halbkugel, so würde jede unpolirte Fläche, wenn selbige von einem sehr weit entlegenen leuchtenden Körper erleuchtet würde, und alle Lichtstrahlen in paralleler Richtung senkrecht auffielen, das darauf fallende Licht nach allen Seiten gleichförmig zurück schicken. Wäre nem-
85F. lich die Kreisförmige Ebene BDE überall mit einer unzähligen Menge unendlich kleiner so vollkommen polirter Halbkugeln bedeckt, das jede derselben alles darauf fallende Licht zurück schickte; so würde jede dieser Halbkugeln das darauf fallende Licht gleichförmig um sich her verbreiten, (228. 230. §.) und alle diese Halbkugeln zusammen würden nach jeder angenommenen Richtung eben so viel von dem auf die Fläche FDG fallenden Licht zurück werfen, als die einzige Halbkugel BAE allein dahin würfe. Dieser Erfolg würde allemahl derselbe seyn, wenn gleich die kleinen Halbkugeln nicht alle gleich groß, sondern in welchem Verhältniß man will, einander ungleich wären. Dabey müste man jedoch voraussetzen, daß das von jeder dieser kleinen Halbkugeln zurück strahlende Licht durch die umher liegenden nicht aufgefangen würde, und eben um deswillen meint H. Bouguer könne man annehmen, daß sie ungleich groß, und dabey nach einer gewissen Ordnung vertheilt wären.

263. §.

Hätte es mit der Fläche BAE einer unpolirten Halbkugel eben die Bewandniß, wäre auch diese

mit

mit einer unzählichen Menge vollkommen polirter sehr kleiner Halbkugeln bedeckt; so müste freylich die Anzahl der Halbkugeln noch mahl so groß seyn, als in dem Fall, wenn der gröste Kreis BDE damit bedeckt wäre: und daraus schließt H. Bouguer, es müsse nun auch die Menge des dem auffallenden Licht grade entgegen zurück strahlenden Lichts nochmahl so groß seyn, als in dem vorhin betrachteten Fall, wenn die Fläche BDE die zurück werfende, und selbige mit dergleichen kleinen Halbkugeln bedeckt wäre. Schon diese Folge dürfte, wie ich die Sache einsehe, auch nur in dem Fall richtig seyn, wenn man die Grundflächen der kleinen Halbkugeln mit der Grundfläche der großen Halbkugel BDE parallel annähme: alsdenn aber würden die fernern Folgen wegfallen, die H. Bouguer damit verbindet. (Traité d'optique Liv. II. Sect. I. Art. IV. sqq. pag. 111. sqq.) Nach der mit CE parallelen Richtung könnte nun nicht die Hälfte derjenigen Lichtmenge zurück strahlen, die nach CS würde zurück geworfen werden, vielmehr nur der vierte Theil jener nach CS zurück gehenden Menge. Denn einmahl könnte nur von der halben Anzahl aller Halbkugeln nach CE das Licht hinscheinen, und von jeder dieser nach CE scheinenden Halbkugeln würde nur die halbe Fläche das auffallende Licht nach CE werfen können. Es scheint aber auch dies nicht die Voraussetzung zu seyn, welche Herr Bouguer annimmt: vielmehr scheint seine Minung diese zu seyn, es sollen alle kleine Halbkugeln mit ihren Grundflächen an die große Halbkugelfläche anschliessen, also die Grundfläche jeder kleinen Halbkugel mit dem Element der großen

Halbkugelfläche, so damit bedeckt ist, einerley Lage haben. Alsdenn aber kann nach CS nicht mehr Licht zurück strahlen, als in dem Fall, wenn man die Grundfläche BDE mit kleinen Halbkugeln bedeckt annimmt. Denn nur die bey A liegende Halbkugel, deren Grundfläche mit BDE parallel ist, fängt nun einen Theil des auffallenden Lichts auf, der sich zur ganzen auffallenden Lichtmenge verhält, wie die Grundfläche der kleinen Halbkugel in A zur Fläche BDE. Von allen übrigen kleinen Halbkugeln fängt jede desto weniger Licht auf, je weiter sie von A entfernt ist, und jede von den im Umfang des Kreises BDE befindlichen Halbkugeln, kann nur halb so viel Licht auffangen, als die bey A befindliche auffängt. Stellt man sich die Sache so nicht vor, so würde man auf die Folge gerathen, daß die unpolirte Halbkugel BAE, falls sie mit sehr kleinen vollkommen polirten Halbkugeln bedeckt wäre, mehr Licht zurück werfe, als darauf gefallen sey.

264. §.

Wenn die Figur der Erhöhungen auf der unpolirten Fläche nicht sphärisch ist, auch eben diese Erhöhungen vielleicht einander alle unähnlich sind, so könnte doch wohl die Stelle jeder Erhöhung, welche das auffallende Licht senkrecht auffängt, eben so gekrümmt seyn, als wenn das an dieser Stelle befindliche Element der Erhöhung zugleich ein Element einer sehr kleinen Kugel wäre. Alsdenn liesse sich die Sache so betrachten, als wenn zwar bey jeder Lage der auffallenden Lichtstrahlen eine gewisse Menge unendlich kleiner Halbkugeln von gegebener Grösse das Licht auffienge, ihre Anzahl aber,

aber, so wie auch einer jeden Halbmesser bey geänderter Lage des auffallenden Lichts ebenfalls Aenderungen leide. Auf die unpolirte Ebene AB falle das Licht in der Richtung SC, und 94F.
zwar auf alle Elemente der Ebene AB mit SC parallel: so wird nun die Beantwortung der Frage, wie groß der in der Richtung CD zurück strahlende Theil sey auf folgende Betrachtung ankommen. Man halbire den Winkel SCD mit der graden Linie CE, und lege durch C eine Ebene FG auf CE senkrecht; so müssen von der ganzen Menge aller kleinen Erhöhungen diejenigen, welche ein mit FG paralleles Element haben, das Licht in der Richtung CD zurück werfen, und die Zurückwerfung des Lichts von diesen Elementen erfolgt eben so, als wenn alle diese Erhöhungen sphärisch wären. In dem lezten Fall aber würde die Ausbreitung des zurück geworfenen Lichts eben so erfolgen, als wenn eine Halbkugel das Licht zurück schickte: deren Grundfläche der Summe der Grundflächen jener sphärischen Elemente, die als so viele kleine Halbkugeln oder sphärische Spiegel betrachtet werden könnten, gleich wäre. (262. §.) Wenn gleich übrigens diese Halbkugeln wegen Verschiedenheit der Krümmung jener Elemente der Erhöhungen auf der unpolirten Fläche an der Seite, wo sie das Licht auffangen nicht gleiche Halbmesser hätten; so würde doch die Menge des zurück geschickten Lichts einerley bleiben, wenn man sie auch alle gleich groß annähme, und ihrer so viele, daß die Summe aller Grundflächen so groß wie vorhin bliebe.

265. §.

Um nicht ohne Noth weitläuftig zu seyn, will ich annehmen, die Ebene der zurückstrahlung SCD sey auf der zurückwerfenden unpolirten Ebene senkrecht, so stellet AB beyder Ebenen Durchschnittslinie vor. Fiele nun SC mit EC zusammen, so würde alles Licht nach CE zurück geworfen werden, was die mit FG parallel liegenden Seiten aller Erhöhungen auf der unpolirten Fläche auffangen: und statt derselben kann man annehmen, es fange eine gewisse Anzahl gleich großer unendlich kleiner sphärischer Elemente, daß in der Richtung EC oder auch SC einfallende Licht auf. Fiele dagegen das Licht in der Richtung LC gegen AB senkrecht auf, so würde alles Licht nach CL zurück strahlen, was die mit AB parallel liegenden Seiten der kleinen Erhöhungen auf der unpolirten Fläche auffangen. Vermöge der schon angeführten Gründe kann man für jede Lage FG eine gewisse Anzahl gleich großer sphärischer Spiegel über AB annehmen, die das auffallende Licht eben so nach allen Seiten ausbreiten würden, wie es die mit FG parallelen Seiten der Erhöhungen auf AB würklich nach allen Seiten aussenden.

Die Zahl der mit der Lage AB zusammen gehörigen Spiegel verhalte sich zur Zahl derjenigen, die mit der Lage FG zusammen gehören, wie $\mu : \nu$, und es sey der Winkel LCE = ACF = I. In dem Fall des senkrecht auffallenden Lichts sey die senkrecht nach CL zurück strahlende Lichtmenge = M: in dem Fall des unter dem Winkel BCE = η = $90° - \vartheta$ schief auffallenden Lichts aber sey die nach

CE

CE zurück strahlende = m; so ist M : m = μ : ν. Kann man also das Verhältniß M : m finden, so hat man auch μ : ν.

266. §.

Das eben erwehnte Verhältniß M : m oder μ : ν ist vielleicht bey einerley Neigung der auffallenden Strahlen für verschiedene unpolirte zurück werfende Massen verschieden; und wenn das wäre, so müste man dies Verhältniß für jede besondre Art der zurück werfenden Massen durch Versuche besonders suchen, die man nach Anleitung des H. Bouguer auf folgende Art anstellen kann.

Eine mattgeschliffene Ebene AB sey anfangs so gestellt, daß eine Kerze oder Lampe L darauf senkrecht scheint: neben der vorigen befinde sich eine andre mit der vorigen in allen Stücken gleichartige ähnliche auch eben so große Fläche AG in gleicher Entfernung von der Kerze L, worauf die von L ausgehenden Lichtstrahlen ebenfalls wenigstens beynahe ins gesammt senkrecht fallen, wenn die Abmessungen AB, AG, beyder Ebenen, welchen man am bequemsten die Figur eines Quadrats geben kann, in Vergleichung mit AL nur klein sind. Die Kerze oder Lampe L kann man auf einen kleinen Träger MN so stellen, daß zwar beyde Flächen zugleich aus der Stelle O gesehen werden können, das von L gegen das Auge zu ausgehende Licht aber durch dazwischen gesetzte undurchsichtige Schirmen aufgefangen, und vom Auge O zurück gehalten werde. In den angenommenen Stellungen AB und AG werden beyde Ebenen dem Auge gleich hell scheinen. Beyde Flächen werfen nemlich gleich viel Licht ins 95 F.

Auge,

Auge, ihre Bilder *ad* und *aδ* hinten im Auge auf der Netzhaut sind gleich groß, mithin gleich stark erleuchtet, also ist auch der scheinbare Glanz beyder Flächen von gleicher Stärke. (240. 241. §.) Man neige nun die Ebene AB gegen die Lichtstrahlen unter einem willkührlichen Winkel $\beta EL = \eta$, so wird die scheinbare Klarheit dieser Fläche in der Lage $A\beta$ kleiner befunden werden, als sie in der Lage AB war: wenn alsdenn auch AG, ohne die senkrechte Lage dieser Ebene gegen das auffallende Licht zu ändern, weiter von L entfernt wird, so wird die scheinbare Klarheit von AG ebenfalls abnehmen, und man wird durch wiederhohltes Versuchen AG so weit von L entfernen können, daß wiederum beyde Ebenen einen gleichen scheinbaren Glanz erhalten. Gesetzt dies erfolge, wenn sich AG in CD befindet; so hat die Erleuchtung der Fläche AG in dem Verhältniß $LF^2 : LE^2$ abgenommen. Weil nun die Klarheit der Fläche ihrer Erleuchtung proportional ist, (259. §.) so erhellet, daß ihre Klarheit in der Stelle CD $= \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$ sey, wenn sie in der Stelle AG $= \Sigma$ war. Dies Σ ist für die erleuchtete mit fremden Licht strahlende Fläche eben das, was S in den oben gebrauchten Formuln bey für sich glänzenden Flächen war: also verhält sich die scheinbare Klarheit, wie ihre wahre Klarheit, die hier Σ heist, (241. §.) und vermöge des Versuchs ist die scheinbare Klarheit der geneigten Fläche $A\beta$ so groß, als die scheinbare Klarheit der andern Fläche in der Stelle CD, mithin ist auch die wahre Klarheit der gegen das auffallende Licht

geneigten

geneigten Fläche $A\beta = \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$, wenn ihre Klarheit in der Lage $AB = \Sigma$ war.

Man setze nun die auf AB in der geneigten Lage $A\beta$ fallende Erleuchtung $= I$, so ist die Erleuchtung, welche auf die dem Auge senkrecht entgegen gesetzte Fläche in CD fällt, ebenfalls $= I$, und diejenige, welche auf eben diese Fläche in der Stelle AG fällt, $= \frac{LF^2}{LE^2} \cdot I$. Die Erleuchtung der Bilder ab und ad auf der Netzhaut im Auge verhalten sich wie diese Erleuchtungen $I : \frac{LF^2 \cdot I}{LE^2}$; wenn also m und M die Strahlenmengen bezeichnen, welche die geneigte Ebene $A\beta$ und die senkrechte AG ins Auge schicken, so ist $m : M = I \cdot ab : \frac{LF^2 \cdot I}{LE^2} \cdot ad$, oder $M : m = \frac{LF^2}{LE^2} : \frac{ab}{ad}$. Ueberdem ist $ad : AG = Oa^2 : OA^2 = ab : AH$, und $AG = AB$, $AH = AB \sin\eta$, also $\frac{ab}{ad} = \sin\eta$, und man erhält $M : m = \frac{1}{LE^2} : \frac{\sin\eta}{LF^2}$, mithin der Hypothese des Herrn Bouguer (263. §.) gemäß auch $\mu : \nu = \frac{1}{LE^2} : \frac{\sin\eta}{LF^2}$.

267. §.

Diesen Schlüssen gemäß stellte H. Bouguer folgende Versuche an. Zwey sehr sauber mattgeschliffene

schliffene Silberplatten AB, AG, waren anfangs vom Licht L um 60 Zoll entfernt, für die geneigten Lagen Aβ aber würden folgende Entfernungen LF gefunden.

Neigungs-winkel βEL	Entfernung LF
90°	60″
75°	67″
60°	75″
45°	89″
30°	$105\frac{3}{4}$
15°	131

Mit weissen Gyps von besondrer Güte, und feinen holländischen Papier wurden ähnliche Versuche wiederhohlt, und für den Gyps gaben sie folgendes.

Neigungs-winkel βEL	Entfernung LF
90°	24″
75°	27″
60°	30″
45°	33″
30°	$40\frac{1}{2}$″
15°	$54\frac{1}{2}$″

Für das holländische Papier sind die Maaßen der Entfernungen LF nicht mitgetheilt worden, die H. Bouguer bey seinen Versuchen als solche befunden hat, welche mit den verschiedenen Neigungswinkeln βEL zusammen gehören. Die Resultate der Rechnung aus seinen Versuchen aber hat er in folgenden beyden Tafeln mitgetheilt.

Nei-

Neigungswinkel βEL	Klarheit der Fläche der Silberplatte	des Gypses	des holl. Papiers
90°	1000	1000	1000
75°	802	762	971
60°	640	640	743
45°	455	529	507
30°	319	352	332
15°	209	194	203

Diese Zahlen durch 1000 dividirt sind nichts anders als die Quotienten $\frac{LE^2}{LF^2}$ für die daneben stehenden Neigungswinkel: und wenn jede derselben mit dem Sinus des dazu gehörigen Neigungswinkels multiplicirt wird, so sind die Producte in dem Verhältniß der wieder zurück gehenden Strahlenmengen, mithin nach des H. Bouguer Hypothese in dem Verhältniß der Menge der unendlich kleinen Spiegel, welche das Licht bey jeder Neigung η senkrecht trift, die also selbst gegen die erleuchtete Ebene unter dem Winkel $90° - \eta = \vartheta$ geneigt sind.

Neigung der kleinen Spiegel gegen die Fläche	Anzahl der kleinen Spiegel beym Silber	Gyps	holländ. Papier
0°	1000	1000	1000
15°	777	736	937
30°	554	554	545
45°	333	374	358
60°	161	176	166
75°	53	50	52

Der

Der Erfolg dieser Versuche ist von demjenigen beträchtlich verschieden, welcher der bisher vorgetragenen Theorie gemäß wäre zu erwarten gewesen. Wofern sowohl die wahre als auch die scheinbare Klarheit der schieferleuchteten Fläche Aβ ihrer Erleuchtung proportional ist, so müste sie $= \Sigma \sin \eta$ seyn, wenn sie in der senkrechten Lage AB $= \Sigma$ war. Eben diese Klarheit in der schiefen Lage war vermöge des Versuchs $= \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$, also muste allemahl $\frac{LE^2}{LF^2} = \sin \eta$ gefunden werden. Allein nur die einzige Zahl 971 in dem Fall, da das holländische Papier unter dem Winkel von 75° geneigt gewesen, kommt den $\sin. 75° = 966$ nahe, und ist würklich etwas grösser: in allen andern Fällen sind die Zahlen $\frac{LE^2}{LF^2}$ kleiner, als der dazu gehörige $\sin \eta$, und nehmen schneller ab. Ich begnüge mich hier damit, diese Abweichung von der bisherigen Theorie bemerkt zu haben, und werde mich nun bemühen, dem H. Bouguer in seinen Schlüssen weiter zu folgen.

268. §.

Es sey AB der Durchmesser einer unpolirten kreisförmigen Fläche; und die Ebene des Halbkreises AHB darauf senkrecht. In dieser Ebene sey CE unter einem Winkel BCE $= \eta$ gegen die Fläche AB gezogen, auf derselben aber ein Stück
94 F. CM nach dem Gesetz abgeschnitten, daß allemahl das Verhältniß CH : CM für den Winkel BCM

BCM = η, oder HCM = ϑ dasjenige sey, was im 264 §. M : m, oder μ : ν war; so liegen alle Puncte M in einer krummen Linie CMH, welche Herr **Bouguer** die Scale der Ungleichheiten, (Numeratrice des Asperités) für die unpolirte Ebene AB nennt. Das Licht falle nun in der Richtung SC auf die Ebene AB, und das Auge O stehe in CD; so können nur diejenigen kleinen Spiegel Licht ins Auge werfen, die mit FG parallel sind, wenn man FG auf diejenige Linie CE senkrecht setzt, die den Winkel SCO halbirt. Ueberdem kann nur soviel Licht ins Auge kommen, als diese kleinen Spiegel ihrer Lage nach auffangen, und die Menge Lichts, welche jeder derselben auffängt, verhält sich wie der Sinus des Einfallswinkels FCS = GCD. Man lasse MR auf CD senkrecht fallen, und verlängere MR bis zum Durchschnitt mit CH in P; so ist CMR = 90° − RCM = GCR = FCS, also

CR = CM sin FCS. Wie nun $\frac{CM}{CH}$ der Anzahl

aller mit FG parallelen Spiegel proportional ist;

so erhellet, daß $\frac{CM \sin FCS}{CH}, = \frac{CM \sin CMR}{CH},$

oder $\frac{CR}{CH}$ der ins Auge nach der Richtung CD

scheinenden Lichtmenge proportional seyn werde. Aber das Bild der Fläche AB auf der Netzhaut im Auge verhält sich wie der Sinus des Winkels BCD, und die scheinbare Klarheit ist bey einerley Lichtmenge der Grösse dieses Bildes umgekehrt proportional. Demnach verhält sich die scheinbare Klarheit wie $\frac{CR}{CH \sin BCD} = \frac{CR \operatorname{cosec} BCD}{CH}$, oder wie $\frac{CP}{CH}$.

269. §.

So sucht Hr. Bouguer durch Zeichnung ein Paar Linien, CR, CP, die für den gegebenen Einfallswinkel des auf die Fläche AB scheinenden Lichts, und den gegebenen Winkel BCD unter welchen die Fläche AB gesehen wird, der ins Auge kommenden Strahlenmenge, und der scheinbaren Klarheit proportional seyn sollen: (Traité d'optique Liv. II. Sect. III. Art. V. pag. 175. 176.) ich wundere mich aber, daß eben dies Verfahren nicht ihm selbst seine ganze Hypothese verdächtig gemacht hat. Es folgt nemlich daraus der wider alle Erfahrung streitende Satz, daß bey jedem Einfallswinkel des auf die Fläche scheinenden Lichts, wenn anders derselbe nicht selbst $= 0$ oder $= 180°$ genommen wird, die scheinbare Klarheit jeder unpolirten Fläche desto grösser seyn müsse, je kleiner der Gesichtswinkel ist, unter welchem die Fläche AB gesehen wird, wie denn die scheinbare Klarheit unendlich groß werden müste, wenn dieser Winkel verschwindet. Es sey $ACS = \alpha$, $BCD = \beta$, so ist $\alpha + \beta + SCD = 180°$, und $FCS + GCD + SCD$ oder $2FCS + SCD = 180°$, mithin $\alpha + \beta = 2FCS$, oder $FCS = GCD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = CMR$: demnach verhielte sich die nach CD scheinende Strahlenmenge wie $CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, und die scheinbare Klarheit wie $\frac{CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$.

Dieser

Dieser Ausdruck wird allemahl unendlich groß, wenn β verschwindet, wofern nur $\alpha > 0$ und kleiner als $180°$ ist. Es ist nemlich $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$ FCS $= \alpha - \vartheta$, also $\vartheta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, und $\eta = 90° - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Demnach verschwindet η nie mit β zugleich, wofern nicht zugleich $\alpha = 180°$ ist, mithin verschwindet auch CM nicht, und

$$\frac{CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$ wird allemahl unendlich groß,

wenn β verschwindet. Ich will indessen dem Hn. Bouguer noch einen Schritt weiter folgen.

270. §.

Um den Punct C zeichne man noch eine andre krumme Linie CNK, so daß die unbestimmten Entfernungen CN sich wie die Quadratwurzeln von CM verhalten. Wenn alsdenn CH $= a$, CK $= r$, CM $= z$, CN $= u$ gesetzt wird, so hat man $\sqrt{a} : \sqrt{z} = r : u$, oder $a : z = r^2 : u^2$, mithin $u = \frac{r\sqrt{z}}{\sqrt{a}}$. Der Winkel BCE $= \eta$ wachse um das Element Ee, und mit dem Halbmesser $Cn = u + du$ sey der Kreisbogen $n\nu$ beschrieben, durch E und ν aber $E\varepsilon$ und $\nu\mu$ mit AB parallel gezogen, und hiernächst nP, νp, eQ, Eq auf AB senkrecht gesetzt; alsdenn stelle man sich vor, die Figur werde um die Axe CK gedrehet: so beschreibt $n\nu$ eine Zone von einer Kugelfläche, wozu der Halbmesser Cn oder CN gehört, Pp aber ein Ring, als ein Element der Fläche AB, die Zone $n\nu$ verhält sich wie u^2, also wie z oder CM, mithin wie die Anzahl der kleinen Spiegel auf der Fläche AB, die mit FG parallel 96 F.

oder gegen AB unter dem Winkel ACF $= \vartheta = 90^\circ - \eta$ geneigt sind, mithin wie die unter dem Winkel BCE $= \eta$ zurückgehenden Lichtmengen, wenn das Licht unter eben dem Winkel auffällt. Die Höhe dieser Zone ist μn, und ihre Fläche $= 2\pi CN \,.\, \mu n$. (622 §. G.) Ferner ist $e\varepsilon : \mu n = Ee : n\nu = CE : Cn$ oder $e\varepsilon : \mu n = CE : CN$, weil CN von Cn nur um ein differential verschieden ist, und man hat $e\varepsilon = d \,.\, a \sin\eta = a \,.\, d \sin\eta$, also $d \sin\eta : \mu n = 1 : u$, und $\mu n = u \,.\, d \sin\eta = \frac{r d \sin\eta \sqrt{z}}{\sqrt{a}}$. Demnach ist die Fläche der Zone $n\nu = 2\pi \,.\, u^2 d \sin\eta$, oder eben diese Fläche $= \frac{2\pi r^2 z}{a} \,.\, d \sin\eta$.

Der Ring Pp ist eine Projection dieser Zone auf die Fläche AB, und wenn man CP $= y$ setzt, so ist der Kreis, wozu dieser Halbmesser gehört $= \pi y^2$, also der Ring P$p = 2\pi y dy$. Ferner ist $y = u \cos\eta$; $dy = Pp = n\nu \,.\, \sin\eta = u d\eta \sin\eta$, also der Ring P$p = 2\pi u^2 \sin\eta\, dy \cos\eta = 2\pi u^2 \sin\eta \,.\, d \sin\eta = \frac{2\pi r^2 z \sin\eta}{a} d \sin\eta$, oder dieser Ring ist = der Zone $n\nu$ in den $\sin\eta$ multiplicirt. Das Integral hievon so genommen, daß es verschwindet, wenn $\eta = 90^\circ$ ist, giebt die Fläche des Kreises vom Halbmesser CP, und wenn nach der Integration $\eta = 0$ gesetzt wird, so giebt eben das Integral die Kreisfläche AB $= \pi a^2$. Wird also $\sin\eta = s$ gesetzt, so erhält man $2r^2 \int z s ds = a^3$, also auch $r^2 = \frac{a^3}{2\int z s ds}$. Es wird vorausgesetzt, daß eine Glei-

chung

chung zwischen η oder s und z gegeben sey, damit man integriren, und auf solche Art r finden könne, da dann r in der Gleichung $u^2 = \frac{r^2 z}{a}$ gegeben ist, und man hat für die zweyte Scale der Ungleichheiten (la seconde Numeratrice des Asperités) auch eine Gleichung zwischen u und η, wenn man z durch η ausdrückt.

Wofern ich das alles recht verstehe, was Herr **Bouguer** mit diesen Schlüssen sagen will, so ist seine Meinung eigentlich diese. Weil nicht allein die Zone $n\nu$, (die H. **Bouguer** nur nennt) sondern auch die ganze Kugelfläche, wozu die Zone $n\nu$ gehört, sich wie u^2, oder CM, d. i. wie die Anzahl aller der kleinen sphärischen Spiegel verhält, die das Licht nach CM eben so zurück werfen würden, wie die auf dieser Richtung senkrechten Seiten der Ungleichheiten auf der unpolirten Fläche AB; so schickt eine Kugelfläche vom Halbmesser CN das Licht in eben der Menge nach allen Seiten zurück, in der es die Fläche AB nach der Richtung CN zurück schickt. Denn auf solche Art sehe ich nur, wie Hr. Bouguer a. a. O. Liv. II. Sect. IV. Art. I. am Ende pag. 205 weiter schliessen kann: es sey die Dichtigkeit des von der Fläche AB nach der Richtung CN reflectirten, und in der Entfernung $= D$ senkrecht aufgefangenen Lichts $= \frac{\frac{1}{4} CN^2}{D^2} = \frac{\frac{1}{4} u^2}{D^2}$, und in der senkrechten Richtung nach CL $= \frac{\frac{1}{4} r^2}{D^2}$, wenn die Dichtigkeit des auffallenden Lichts $= 1$ ist. Man vergleiche hiemit auch oben den 264. §.

271. §.

Die Resultate der im 267 §. beschriebenen Versuche haben dem Herrn Boguer die data geliefert, um für mattgeschliffen Silber, Gyps und holländisch Papier das Integral $\int zsds$ durch eine Näherungs-Methode und hiernächst $r^2 = \frac{a^3}{2\int zsds}$ zu finden. Er meint gefunden zu haben, daß die Scale der Ungleichheiten für mattgeschliffenes Silber ziemlich nahe mit zweenen Kreisbogen CMH, CZH, von 114° übereinkomme, wenn CH ihre gemeinschaftliche Sehne ist. Dies vor-
94F. ausgesetzt sey CT eine Tangente des Bogens CZH und HV darauf senkrecht; so ist der Winkel TCH $= 57°$, also $CV = a . \cos. 57°$, $CA = a$ gesetzt, und H. Bouguer findet $r^2 = \frac{3a}{2(a - CV)} . a^2$, oder $r = \frac{3a^2}{2(1-\cos 57°)} = \frac{3a^2}{2\int v . 57°} = \frac{1,5 . a^2}{0,455361} = 3,294090 . a^2$, und $r = 1,815 . a$.

Für Gyps und holländisch Papier hat er keine aus der Geometrie bekannte Linie gefunden, die er seinen Versuchen gemäß für die Scale der Ungleichheiten hätte annehmen können: indessen findet er (a. a. O. Art. II. pag. 205. sqq.) vermittelst anderer Näherungsmethoden

für Gyps $r^2 = 2,4875 . a^2$

für holl. Papier $r^2 = 2,1765 . a^2$.

Wenn nun eine Scheibe Gyps 1 Zoll im Durch-

messer

messer das auffallende Licht, dessen Dichtigkeit = 1 ist, 3 Zoll weit senkrecht zurück wirft, so giebt des H. Bouguer Regel $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2{,}4875 = 0{,}0172743$ ohngefehr $= \frac{1}{58}$. Bey der Voraussetzung daß alle Ungleichheiten die Figur von Halbkugeln hätten würde man die Zahl $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{144}$ finden. Hätten übrigens die Ungleichheiten der rauhen Fläche die Natur vollkommen polirter Spiegel; so würde $\frac{57}{58}$ des auffallenden Lichts nach allen Seiten zerstreuet werden. Vermittelst eines Versuchs den H. **Bouguer** a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. V. pag. 66 - 68 beschreibt, hat derselbe gefunden, daß eine solche Scheibe aus sehr weissen Gyps nicht mehr als ohngefehr $\frac{1}{149}$ oder $\frac{1}{150}$ des auffallenden Lichts senkrecht zurück werfe: also kann man nicht annehmen, daß jene Ungleichheiten vollkommen polirte Spiegel sind. Von 10000 auffallenden Strahlen sollten 172 zurück gehen, (H. Bouguer hat die Zahl 167) es strahlen aber nur 67 zurück, welches ohngefehr $\frac{2}{5}$ von jener Anzahl ausmacht, also gehen $\frac{3}{5}$ verlohren.

272. §.

Die Voraussetzung im 263 §. worauf sich diese ganze Theorie des H. Bouguer gründet, ist in mehr als einer Absicht so sehr willkührlich, daß sie ohngeachtet des Scharfsinns, welche ihr Urheber dabey bewiesen hat, unmöglich auch nur als eine erträgliche Hypothese selbst in den besondern Fällen gelten kann, wobey sie H. Bouguer angewandt hat. Die kleinen Ungleichheiten der unpolirten Flächen könnten wohl die Gestalt eckigter Körper haben, und von ebenen Seitenflächen eingeschlossen seyn, welche das Licht wie ebene Spiegel zurück werfen, und so könnte doch, wenn gleich alles übrige richtig bliebe, die Regel am Ende des 270 §. nicht bestehen. Es sey aber die Figur der kleinen Ungleichheiten beschaffen, wie sie wolle, so frage ich: woher weis man, daß sie das auffallende Licht spiegelartig zurück werfen? Allemahl wird diese Hypothese auf den im 269. §. schon bemerkten wider alle Erfahrung streitenden Satz leiten, daß die scheinbare Klarheit einer unpolirten von fremden Licht erleuchtete Fläche über alle Gränzen wachsen müsse, wenn der Sehewinkel, unter welchen sie betrachtet wird, über alle Gränzen abnimmt. Diesemnach ist es wohl weit natürlicher, daß man mit H. Lambert annehme:

> von jedem erleuchteten Element der unpolirten Fläche breite sich das Licht nach allen Seiten in graden Linien eben so aus, wie es sich von jedem Element einer für sich glänzenden Fläche nach allen Seiten ausbreitet. (259. §.)

Dessen zu geschweigen, daß die ganze Vorstellung von der Art, wie unpolirte Flächen das Licht zurück senden, welche oben im XVIII. Abschnitt ist vorgetragen worden, der Newtonschen sonst fast allgemein beliebten Theorie von den Farben der Körper weit gemässer ist, als die hier vorgetragene Bouguersche Theorie, so empfielt sie sich auch schon dadurch, daß solchergestalt die Theorie von Ausmessung der Stärke des Lichts, das erleuchtete mit entlehnten Glanz strahlende Flächen aussenden, auf eben dieselben Grundsätze zurück geführet wird, auf welchen die Theorie von Ausmessung der Stärke

des-

desjenigen Lichts beruhet, das für sich glänzende Flächen nach allen Seiten aussenden. Was es übrigens auch mit den im 267 §. erzählten Versuchen für eine Bewandniß haben mag, die der Regel des 260 §. nicht günstig sind; so ist dennoch der am zuletzt angeführten Ort erzählte vom Herrn Lambert angestellte Versuch dieser Regel desto günstiger. Das Verfahren bey diesem Versuch ist überdem so beschaffen, daß es nicht so leicht Fehler vermuthen läßt, als das Verfahren bey den Bouguerschen Versuchen. Auch meine ich, daß die sehr gemeine Erfahrung, welche selbst H. Bouguer bey anderer Gelegenheit anführt, die Sache ausser Zweifel setze, vermöge welcher eine weisse vom Sonnenlicht gleichförmig erleuchtete Wand, überall einerley Klarheit zu haben scheint, man mag sie ansehen, unter welchem Gesichtswinkel man will. Man kann es mit andern gefärbten Flächen von der am Ende des 260 §. beschriebenen Beschaffenheit ebenfalls versuchen, und man wird allemahl denselben Erfolg wahrnehmen.

Der XX. Abschnitt.

Von der Klarheit für sich dunkler Körper die mit entlehntem Licht glänzen.

273. §.

Bey der fernern Untersuchung über die Klarheit für sich dunkler Körper, die mit entlehnten

Licht glänzen, kommen vorzüglich zuerst diejenigen in Erwägung, welchen wir die weisse Farbe zuschreiben; und hiebey muß man sich an die oben im 137 u. f. §. §. beschriebenen Versuche über die Spaltung der Sonnenstrahlen vermittelst des Prisma erinnern. Das Sonnenlicht ist bey reiner Luft weis, es ist aus ungleichartigen einfachern Licht, das einzeln die Empfindung der übrigen Farben verursacht, zusammengesetzt, und die weisse Farbe eine Vermischung aller Grundfarben im gehörigen Verhältniß. Fängt man das gefärbte nach der Zerstreuung im Prisma aus einander fahrende Sonnenlicht mit einer Sammlungslinse auf, damit sich alle Strahlen in ihrem Brennraum wieder vereinigen, so ist die weisse Farbe wieder hergestellt. Ein dunkler Körper ist also weis, wenn er die auf ihn fallenden Strahlen von allen Grundfarben in dem rechten Verhältniß nach allen Seiten wieder aussendet. Wie nun die **Weisse** des **Lichts** ebenfalls das rechte Verhältniß der Mischung der einfachen gleichartigen Strahlen aller Grundfarben erfordert; so kann **weisses Licht** auf den Körper fallen, und der leztere doch eine andre Farbe zeigen, wenn er Strahlen der einen Grundfarbe vorzüglich, die übrigen gar nicht, oder in zu geringer Menge nach allen Seiten aussendet.

274. §.

Wenn von der **Weisse** eines für sich dunklen Körpers die Rede ist, so kann ein Körper dieser Art **weisser** als der andre seyn. Hier soll einem solchen Körper eine absolute oder **vollkommene Weisse** zugeschrieben werden, der in jedem Fall alles

alles auf ihn fallende Licht nach allen Seiten zurück schickt, mithin auch in dem Fall, wenn würklich weisses Licht auf ihn fällt, alles wieder zurück sendet, und nach allen Seiten zerstreuet, ohne das geringste davon zu verschlucken. Ob es dergleichen Körper in der Natur gäbe, denen man eine absolute Weisse zuschreiben kann, ist hier gleichgültig, wenigstens kann man suchen, die Weisse der natürlichen Körper mit einer vollkommenen Weisse zu vergleichen.

275. §.

Vermöge der festgesetzten Erklärung wird ein weisser Körper nur alsdenn weiß aussehen, wenn würklich weisses Licht auf ihn fällt. Wird er dagegen von rothen, grünen, blauen Licht u. s. f. erleuchtet, so wird er selbst mit dem auffallenden Licht einerley Farbe haben, denn er sendet alles auffallende Licht nach allen Seiten zurück. Unvollkommen weisse Körper sind diejenigen, die nicht alles auffallende Licht nach allen Seiten wieder zurück senden; so wie die gefärbten Körper nur Strahlen einer oder einiger Grundfarben vorzüglich von dem übrigen auffallenden Licht entweder gar nichts, oder eine geringere Menge, als auffiel, wieder aussenden.

276. §.

Es sey das Verhältniß der Menge des nach allen Seiten zurück strahlenden Lichts zur Menge des auf eine unendlich kleine Ebene, wie Ll, (7. Fig.) auffallenden, $= A : 1$; so ist bey unvollkommen weissen Flächen $A < 1$, in dem Fall der vollkomme-

kommenen Weisse aber $A = 1$, und man kann die Zahl A als das Maaß der weisse der Fläche betrachten. Es ist eben die Zahl, welche im 17 und 259 §. mit n bezeichnet war, und man hat $\sigma = A \times I$, wenn hier A statt n geschrieben wird, die Buchstaben σ und I aber die Bedeutung behalten, welche sie a. a. O. hatten. Die unendlich kleine
7Fig. Ebene wirft also durch jeden conischen Raum MLN die Lichtmenge $= \sigma \,.\, Ll \,.\, \sin \alpha^2$, wenn $ALM = \alpha$ ist, mithin eine Lichtmenge $= \frac{\sigma \,.\, Ll}{\pi}$, wenn $\frac{OM^2}{LM^2} = \frac{1}{\pi}$, oder $\alpha = \text{Ang. sin} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ angenommen wird. Man setze $\frac{\sigma}{\pi} = \Sigma$, so ist die Erleuchtung, welche Ll einer andern unendlich kleinen Ebene Pp zuschickt, $= \frac{\Sigma \,.\, Ll \,.\, \sin CLP \,.\, \sin LPD}{LP^2}$, und die Zahl Σ kommt in den photometrischen Grundformuln, wenn die leuchtende Fläche einen entlehnten Glanz hat, in völlig eben der Bedeutung vor, wie das S im 36. §. wenn die leuchtende Fläche einen eigenen Glanz hat. Es ist nemlich $\Sigma = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{A \times I}{\pi}$ nicht die ganze Lichtmenge, welche eine in allen Elementen eben so klare Fläche, wenn sie $= 1^2$ wäre, nach allen Seiten umher strahlen würde, sondern ein Theil von ihr, der sich zur ganzen erwehnten Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält. Demnach ist $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ das Maaß der

Klar-

Klarheit einer erleuchteten Fläche in eben dem Verstande, wie $S = \frac{s}{\pi}$ im 35. §. für das Maaß des Glanzes einer für sich leuchtenden Fläche angenommen ward.

277. §.

Wenn die für sich leuchtende Fläche, wovon die unendlich kleine Ebene Ll ihr Licht empfängt, in allen ihren Elementen einerley Glanz S hat, so ist I ein Product des Glanzes S in eine Zahl m, die nach den Regeln des III. bis VI. Abschnitts gefunden werden kann. Demnach hat man zwischen Σ und S eine Gleichung $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$, die dazu dient, die Klarheit der erleuchteten mit dem Glanz der leuchtenden Fläche zu vergleichen.

Wäre die erleuchtete Fläche Ll vollkommen weis; so hätte man $A = 1$, und wenn eben diese vollkommen weisse Fläche die absolute Erleuchtung von einer andern Fläche empfängt, deren Glanz $= S$ ist, so hat man $I = \pi . S$; (53. §.) mithin erhält man $\Sigma = S$. Demnach ist die Klarheit einer vollkommen weissen Fläche, wenn sie die absolute Erleuchtung empfängt, dem Glanz der Fläche gleich, die ihr das Licht zuschickt.

278. §.

Es sey AB eine nach allen Seiten ins unendliche ausgedehnte in allen Elementen gleich stark leuchtende Ebene, und eine andre für sich dunkle 97F.
Ebene

Ebene DE, von welcher Grösse man will, sey mit jener parallel: so empfängt jedes Element M oder N der leztern von der ersten die absolute Erleuchtung, und DE hat durchgängig eine Klarheit, die eben so groß, als der Glanz der Ebene AB ist. Wenn demnach FG ein gegebener Theil der leuchtenden Fläche AB ist, so wirft derselbe auf jedes Element M oder N der Fläche DE so viel Licht, als dies Element M oder N nach FG wieder zurück sendet, (42 §.) weil es so viel ist, als wenn beyde Flächen einen gleichen Glanz hätten. Ist also auch MN ein gegebener Theil der erleuchteten Fläche DE, so wirft MN so viel Licht nach FG zurück, als MN von FG empfangen hat: (43. §.) mithin wirft auch DE selbst so viel Licht nach FG zurück, als FG dahin geschickt hatte.

Man siehet übrigens wohl, daß diese Schlüsse ins gesammt ihre Anwendung finden, die Fläche AB mag weisses oder gefärbtes Licht auf DE senden, wenn nur DE vollkommen weis ist. Allemahl wird DE die Farbe desjenigen Lichts zu haben scheinen, das AB nach DE schickt, und DE wird mit AB einerley Klarheit haben. Oder mit andern Worten, die rothe, grüne, blaue Farbe u. s. f. der erleuchteten Fläche DE wird mit der Farbe gleicher Art, welche die leuchtende Fläche AB hat, gleich lebhaft seyn.

279. §.

Falls die Ebene DE nicht vollkommen, oder gar nicht weis ist, so wird ihre Klarheit aus mehr als einer Ursache geringer seyn, als der Glanz der leuchtenden Fläche AB. Denn einmahl verschluckt

DE

DE einen Theil des auffallenden Lichts, der gar nicht wieder zurück geschickt wird. Gesetzt also, das zurück gehende Licht wäre auch noch weisses Licht, wie es seyn würde, wenn das auffallende Licht weis wäre, und von allen Arten des gefärbten Lichts proportionale Theile verschluckt würden: so wäre doch die Weisse der Fläche DE nicht so glänzend, als die Weisse der Fläche AB. Wäre dagegen DE gar nicht weis, sondern gefärbt, als roth, grün, blau, gelb, wie man will; so wäre die zweyte Ursache der mindern Klarheit diese, weil nur die Strahlen von eben der Farbe entweder allein, oder doch vorzüglich von allen Elementen der Ebene DE wieder ausgehen würden, die übrigen aber so gut als verlohren oder verschluckt zu betrachten wären.

280. §.

Ausser den Grundfarben giebt es unzählich viele verschiedene Zwischenfarben, die insgesammt aus den Grundfarben durch ihre mancherley Vermischung entstehen. Gesetzt nun, daß ein Körper eine solche vermischte Farbe habe, die z. E. aus dem rothen und gelben bestehet, und daß auf denselben weisses Licht falle: so wird nur das rothe und gelbe Licht allein, oder doch vorzüglicher, als das übrige, nach allen Seiten zurückgesandt werden. Hiebey kann man als eine Voraussetzung bis zur weitern Prüfung annehmen, daß bey einerley Beschaffenheit des dunklen Körpers der das Licht auffängt, eben dieselbe Art der Strahlen, und eben dieselbe Menge in Verhältniß mit der auffallenden Menge eben der Art würde zurück geworfen werden, wenn auch die

die gefärbten Strahlen, wie etwa die rothen und gelben, allein auffielen. Ueberhaupt also kann man das Gesetz annehmen:

Bey einerley Beschaffenheit des erleuchteten Körpers behalte die Menge der zurückgesandten Strahlen einer jeden Farbe zur Menge der einfallenden von eben der Farbe einerley Verhältniß. Fallen doppelt so viele rothe oder gelbe Strahlen auf, so werden doppelt so viele rothe oder gelbe Strahlen zurück geworfen.

281. §.

Diesemnach lassen sich die verschiedenen Grade der Weisse, der Röthe und jeder andern Farbe auf einerley Art in Rechnung bringen. Ist ein Körper unvollkommen weis, so wirft er zwar nicht alles auf ihn fallende weisse Licht zurück: bey einerley Beschaffenheit des Körpers aber bleibt doch das Verhältniß der Menge des zurück geworfenen Lichts von jeder Grundfarbe zur Menge des von eben der Grundfarbe auffallenden Lichts einerley, wenn sich gleich die Menge des auffallenden Lichts ändert. Demnach schickt der weisse Körper allemahl weisses Licht zurück, wenn würklich weisses Licht auffällt: die Strahlen von verschiedenen Grundfarben, welche zurück gehen, verhalten sich ihrer Menge nach gegen einander eben so, wie sich die Mengen der Strahlen von verschiedenen Grundfarben des auffallenden Lichts gegen einander verhalten.

Es sey demnach das Verhältniß der Menge des nach allen Seiten zurück geschickten Lichts zur Menge des auffallenden $= A : 1$, so ist bey unvollvollkommen weissen Körpern $A < 1$, bey vollkommen weissen Körpern aber $A = 1$, und die Zahl A ist das **Maaß der Weisse** des Körpers.

282. §.

Bey andern Grundfarben läßt sich der Grad ihrer Lebhaftigkeit eben so in Rechnung bringen. Ein Körper ist **vollkommen roth** wenn er alles auffallende rothe Licht zurück sendet, im Gegentheil aber **unvollkommen roth**. Wenn sich also die Menge des nach allen Seiten zurück geschickten rothen Lichts zur Menge des auffallenden, wie $q : 1$ verhält; so ist bey unvollkommen rothen Körpern $q < 1$, bey vollkommen rothen Körpern aber $q = 1$. Auf andre Grundfarben wird die Anwendung leicht eben so gemacht.

Weil man übrigens verschiedene Grundfarben als ungleichartige ansehen muß, so lassen sich auch verschiedene Grundfarben ihren Graden nach nicht mit einander vergleichen, wohl aber Grundfarben, die für sich einerley sind, und dabey nur einen verschiedenen Grad der Lebhaftigkeit haben. Auch selbst die Lebhaftigkeit einer vermischten Farbe läßt sich mit der Lebhaftigkeit einer andern vermischten Farbe von eben der Art vergleichen. Es sind nemlich **vermischte Farben als gleichartig** zu betrachten, wenn beyde aus einerley ungleichartigen Lichtstrahlen von verschiedener Grundfarbe in einerley Verhältniß zusammengesetzt sind. Wird die Menge des so vermischten Lichts verändert, jedoch so, daß das Verhältniß der Strahlen, die zu verscheidenen Grundfarben gehören einerley bleibt, so wird zwar der Grad der Lebhaftigkeit, aber nicht die Art der Farbe verändert.

283. §.

98 F. Die kreisförmige Ebene AB empfängt in allen ihren Elementen wenigstens beynahe einerley Erleuchtung von einem bey L befindlichen leuchtenden Körper, und ihre Weisse ist $= A$: ferner ist PH die Axe einer Sammlungslinse, worauf AB das von L empfangene Licht wirft, und mit der Ebene DE, deren Weisse $= a$ ist, wird das Bild ab der Ebene AB senkrecht aufgefangen: man sucht die centrale Klarheit dieses Bildes.

Aufl. Wenn AB von L die Erleuchtung $= I$ empfängt, so ist die Klarheit dieser Ebene $= \frac{A \times I}{\pi}$. (277. §.) Diese sey $= \Sigma$, so kann AB als eine für sich leuchtende Ebene betrachtet werden, deren Glanz $= \Sigma$ wäre. Ferner ist die centrale Erleuchtung des Bildes $ab = \pi \, . \, k \, . \, \Sigma \, . \cos HPF^2 . \tang . HpF^2$, (203. 217. §.) also wird die centrale Klarheit desselben $= a \, . \, k \, . \, \Sigma \, . \cos HPF^2 . \tang HpF^2$. Wenn also statt Σ der Werth $\frac{A \times I}{\pi}$ gesetzt wird, so giebt sich die gesuchte centrale Klarheit des Bildes $= \frac{1}{\pi} \, . \, k \, . \, a \, . \, A \, . \, I \, . \cos HPF^2 \tang HpF^2$.

1) Wenn der Winkel HPF sehr klein, mithin cos HPF sehr nahe $= 1$ ist, so leidet cos HPF sehr geringe

geringe Aenderungen, wenn HP geändert wird. Zugleich leidet auch der Abstand des Bildes Hp nur geringe Aenderungen: mithin bleibt in eben dem Fall die centrale Klarheit des Bildes beynahe ungeändert, wenn gleich HP geändert wird.

2) Man setze, die Ebene DE werde bey Q von L senkrecht erleuchtet; so ändert sich die Erleuchtung in Q gewöhnlich sehr merklich, wenn die Entfernung QL geändert wird. Es sey die Erleuchtung, welche Q von L empfängt $= i$, also die Klarheit der Stelle Q $= \frac{a \times i}{\pi}$; so erhellet, daß auch die Klarheit der Stelle Q merkliche Aenderungen leide, wenn LQ geändert wird. Demnach könnte es wohl eine solche Entfernung LQ geben, wobey die Klarheit in Q der Klarheit des Bildes in p gleich würde: alsdenn wäre $k \,.\, a \,.\, A \,.\, I \,.\, \cos HPF^2 \tan HpF^2 = a \times i$, und man erhält $A = \frac{i \,.\, \sec HPF^2}{k \,.\, I \,.\, tg \,.\, HpF^2}$, oder $A = \frac{i \,.\, Hp^2 \,.\, \sec HPF^2}{k \,.\, I \,.\, HF^2}$.

3) Wenn L eine leuchtende Kugel ist, so hat man $i : I = LP^2 : LQ^2$ (58 §.), mithin $A = \frac{LP^2 \,.\, Hp^2 \,.\, \sec HPF^2}{k \,.\, LQ^2 \,.\, HF^2}$.

284. §.

Es sey L die Spitze von der Flamme einer Kerze, deren Gestalt mit der Gestalt eines Kegels ziemlich nahe überein kommt, die Ebene AB sey mit der Axe der conisch brennenden Flamme parallel, und LP auf AB senkrecht; so ist die scheinbare Gestalt der Flamme aus P gesehen, ziemlich nahe ein spärisches Dreyeck. Betrachtet man alsdenn die Ebene AB als horizontalliegend, so ist die Spitze L der Lichtflamme der Scheitelpunct, PL die Scheitellinie, und zwo Seiten des Kugeldreyecks laufen im Scheitel zusammen, wie die Aufgabe des 67. §. voraussetzt. Wenn nun die scheinbare Grundlinie dieses Kugeldreyecks den Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt, $= w$, eine der verticalstehenden Seiten $= v$ gesetzt wird; so ist die Erleuchtung in P, oder $I = \frac{1}{2} w \sin v$. Ferner sey die Höhe der Lichtflamme $= a$, ihre gröste Breite $= b$, so ist

$v = \frac{a}{LP}$, und wenn LP die Höhe der Lichtflamme nur mehr den viermahl übertrift, beynahe $\sin v =$

$v = \frac{a}{LP}$, so wie $w = \frac{b}{LP}$, mithin beynahe $I =$

$\frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{LP^2}$.

Man siehet leicht, daß $\frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{LP^2}$ die scheinbare Grösse der Lichtflamme aus P gesehen, in dem Verstande, wie dieser Ausdruck im 32. §. ist erklärt worden. Wäre aus P mit dem Halbmesser PL eine Kugelfläche beschrieben, so wäre ein Stück dieser Kugelfläche $= \frac{1}{2} ab$ mit der Lichtflamme zwischen einerley scheinbaren Gränzen enthalten: und wenn aus P mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben wäre; so wäre ein Stück dieser lezten Kugelfläche $= \frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{PL^2}$ zwischen eben den scheinbaren Gränzen enthalten. In den Formuln

des

des 67. §. ist der Glanz des leuchtenden Kugeldreyecks $= 1$ gesetzt: ist also der Lichtflamme Glanz $=$ S, so hat man $I = \frac{\frac{1}{2} . S . a . b}{LP^2}$.

Allemahl, wenn eine leuchtende Fläche weit genug von der Stelle einer andern Fläche, die von jener erleuchtet wird, entfernt ist, daß man jeden Durchmesser der ersten als unendlich klein in Vergleichung mit der Entfernung ansehen kann; so ist die Erleuchtung beynahe das Product aus dem Glanz der leuchtenden Fläche in ihre scheinbare Grösse, und den Sinus des Einfallswinkels. (38. §. n. 2.) In dem eben betrachteten Fall findet man also denselben Ausdruck für die von der Lichtflamme kommende Erleuchtung in P, wenn man die Abmessungen derselben in Vergleichung mit der Entfernung LP als unendlich klein betrachtet, und den Einfallswinkel $= 90°$ setzt.

285. §.

Hieraus wird begreiflich, wie es möglich sey, die **Weisse** einer Fläche, durch Versuche zu finden, dergleichen Herr Lambert angestellet, und in seiner **Photometrie** Part. III. Cap. II. §. 747. sqq. beschrieben hat. Wenn in L eine Lichtflamme steht, so kann man die Entfernungen LP, LQ, HP, messen; aus HP und der Brennweite des Glases FG, dessen halbe Oefnung HF ebenfalls bekannt ist, hat man Hp: mithin läßt sich auch des Winkels HPF Secante finden, dessen Tangente $= \frac{HF}{HP}$ ist, wennn anders nicht HP in Vergleichung mit HF so groß ist, daß sehr nahe sec HPF $= 1$ ist, da dann im 283. §. n. 2. $A = \frac{i \cdot Hp^2}{k \cdot I \cdot HF^2}$ angenommen werden kann. Für das Glas, dessen man sich bedient, muß die Zahl k nach den Regeln des 218. §. gesucht werden. Aus L wirft die Lichtflamme nach P die Erleuchtung $I = \frac{\frac{1}{2}a \cdot b}{LP^2} \cdot S$, und nach Q die Erleuchtung $i = \frac{\frac{1}{2}a \cdot b}{LQ^2} \cdot S$: also findet man $\frac{i}{I} = \frac{LP^2}{LQ^2}$, und $A =$

$$\frac{LP^2 \cdot Hp^2 \cdot \sec \cdot HPF^2}{k \cdot LQ^2 \cdot HF^2}.$$

Um übrigens soviel möglich die Fehler zu vermeiden, welche bey Versuchen dieser Art nur gar zu leicht begangen werden können, empfielt Herr Lambert folgende Maximen. Ob gleich die gefundene Formul weder vom Glanz des Lichts L noch von der Weisse der Ebene DE abhängt, und also die Wahl des einen oder des andern in so fern an sich gleichgültig wäre; so ist es doch am besten, ein so viel möglich helles Licht in L, auch eine solche Ebene DE zu wählen, die mit AB einerley Weisse hat. Das erste ist nöthig, um die Ebene AB recht hell zu erleuchten, und eben um deswillen muß die Entfernung LP nicht sehr groß seyn. Eben diese Entfernung aber kann auch nicht so gar klein angenommen werden. Wenn nemlich das Licht auf P senkrecht fällt, so ist die Ebene AB daselbst am stärksten erleuchtet, gegen A und B zu aber nimmt die Er-

leuch-

leuchtung desto mehr ab, je kleiner die Winkel PAL, PBL, mithin je grösser die Winkel PLA, PLB ausfallen. Damit dieser Unterschied der Erleuchtung fürs Auge beynahe unmerklich bleibe, müssen die Winkel PAL, PBL, nicht unter 80° abnehmen, mithin PLA, PLB nicht über 10° fassen. Je kleiner nun LP wäre, desto kleiner müste AB seyn, wenn PLA, PLB, die Grösse von 10° nicht übertreffen sollen, und dies würde den Erfolg haben, daß das Bild *ab* sehr klein ausfiele: alsdenn aber läßt sich die Helligkeit des Bildes mit der Helligkeit der Stelle Q nicht so gut vergleichen, und das Urtheil des Auges darüber, ob beyde Stellen, das Bild *ab* und die Stelle Q gleich stark erleuchtet sind, wird unsicher. Mit Beobachtung dieser Cautelen muß man nun durch Versuche die Stelle L ausfündig zu machen suchen, wo die Lichtflamme stehen muß, damit das Bild *ab* und die Stelle Q gleich stark erleuchtet erscheinen.

286. §.

Herr Lambert brauchte bey seinen Versuchen eine Linse, wofür er die Zahl $k = \frac{5}{6}$ gefunden hatte, (218. §.) und ihre eigentliche Brennweite war $6\frac{1}{3}''$, die halbe Oefnung HF = 0,93″. Vermittelst derselben fand er für recht weisses und starkes Regal-Papier, wie auch für feines weisses Charten-Papier, den Werth $A = \frac{2}{5}$, ein Mittel aus mehrern Versuchen genommen. Weil er aber muthmaßte, daß vielleicht alle Arten von Papier um deswillen nur so wenig von dem auffallenden Licht zurück werfen mögten, weil sich in demselben sehr viele Zwischenräumchen befinden; so bestrich er ein Stück weiß Regal • Papier mit Mahlerfarbe, die aus Cremserweiß zubereitet war, so dick, daß kein Licht mehr hindurch gehen konnte; und wie er auch hiemit Versuche anstellte, so fand sich nur ein sehr geringer Unterscheid von dem Resultat der vorigen Versuche. Das Mittel aus mehrern Versuchen war für Cremserweis $A = 0{,}4230$, für Regal-Papier aber $A = 0{,}4067$.

287. §.

Hat es mit den Voraussetzungen des 279. §. seine Richtigkeit so ergiebt sich aus Vergleichung mit dem 281. §., daß in den bisherigen Formuln das A bey Flächen von einer andern Farbe auch die Lebhaftigkeit oder den Grad dieser Farben eben so bezeichnen könne, wie es bisher den Grad der Weisse bezeichnet hat. Alsdenn giebt der Ausdruck $\frac{A \times I}{\pi}$ die Klarheit der gefärbten Fläche. Herr Lambert hat ähnliche Versuche, wie mit weissen Flächen, auch mit rothen, gelben, und grünen aus Papier geschnittenen Flächen angestellt. Die rothen waren mit Mennigfarbe bestrichen, und die gelben mit Kreuzbeeren-Saft, die grünen aber in Grünspan eingetaucht. Er fand für die rothen Flächen $A = 0{,}2932$, für die gelben $A = 0{,}2620$, für die grünen $0{,}1149$, jedesmahl ein Mittel aus mehreren Versuchen genommen.

98 F. Noch stellte H. Lambert in AB eine mit Cremserweis bestrichene Fläche, in DE aber nach einander eine weisse, rothe, gelbe, grüne und blaue Fläche, suchte auch jedesmahl wie groß die Entfer-

nungen

nungen seyn müsten, damit das Bild *ab* eben die Helligkeit zu haben schiene, welche die Fläche DE in Q hatte. Bey allen diesen Versuchen zeigte das Bild *ab* eben die Farbe, welche die Fläche DE selbst hatte. Der Abstand LP blieb in allen Fällen 5 Zoll, und für die weisse, rothe, grüne und blaue Fläche war LQ ohngefehr 64 Zoll: dagegen muste für die gelbe Fläche dieser Abstand um 2 bis 3 Zoll vermindert werden. Es war also das gelbe Bild klärer als die übrigen Bilder. Wie nun dieser Unterscheid weder von dem Glanz des Lichts L noch von der Lebhaftigkeit der Farbe der Fläche DE abhängt, weil die im 283. §. gefundene Formul keines von beyden enthält, wie schon im 285. §. bemerkt ist; so scheint es, daß man den Grund davon in der Beschaffenheit der Fläche AB suchen müsse. Es scheint nemlich, daß sie die gelben Strahlen in grösserer Menge, als die übrigen zurück geschickt habe.

Die Farben der natürlichen Körper sind nie so vollkommen rein, daß von denselben nur Licht von einer einzigen Grundfarbe allein, von allen übrigen Licht aber, was die Erscheinung anderer Grundfarben verursacht, gar nichts zurückstrahlen sollte. Es giebt also keine vollkommen rothe, vollkommen grüne Körper, u. s. f.; die Farben sind insgesammt mehr oder weniger vermischt. Wie nun die Zahl der Grundfarben auch nicht auf die gewöhnlich angenommenen sieben prismatischen Farben eingeschränkt ist, vielmehr die Strahlen, welche man zu einer Grundfarbe rechnet, durch unmerkliche Stuffen verschieden sind, und eine Grundfarbe eben so durch unmerkliche Stuffen an die nächstfolgende prismatische Hauptfarbe gränzt; so würde eine genauere Theorie über die Lebhaftigkeit vermischter Farben, wie sie in der Natur würklich beschaffen sind, ganz eigene, und wie leicht vorauszusehen ist, ziemlich umständliche Rechnungen und Versuche erfordern. Die Gründe davon sind noch nicht hinlänglich bekannt, und das wird mich entschuldigen, wenn ich bloß anführe, daß H. **Lambert** (Photomet. Part. VII. Cap. I.) einigermassen gezeigt habe, worauf es dabey ankommen würde, mit dem Versprechen mehreres hievon in der **Pyrometrie** zu liefern.

288. §.

Wenn man die Weisse irgend einer Art von Körper vermittelst eines solchen Versuchs gefunden hat, wozu der 285. §. Anleitung giebt; so dient die Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ die Weisse jeder andern Art von Körper mit jener zu vergleichen. Es sey eines andern Körpers, der die Erleuchtung i empfängt, Klarheit $= \sigma$, seine Weisse $= a$, so ist $\sigma = \frac{a \times i}{\pi}$. Wenn man nun durch Veränderung der Entfernung vom leuchtenden Körper oder durch Veränderung des Einfallswinkels es dahin bringt, daß $\Sigma = \sigma$ wird, so ist $a \times i = A \times I$, also $a = \frac{A \times I}{i}$, und die Weisse der Flächen verhält sich bey gleicher Klarheit umgekehrt, wie die darauf fallende Erleuchtung. Versuche lehren, daß eine mit weissen Kalk oder Gyps bestrichene

Mauer,

Mauer, recht weisses Papier, Cremserweis, an der Sonne weis gebleichtes Lein, recht weisse Kreide, in Ansehung der Weisse wenig verschieden sind.

289. §.

Eben diese Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ dient, den Glanz eines leuchtenden Körpers mit der Klarheit der von demselben erleuchteten Fläche zu vergleichen. Der Glanz des leuchtenden Körpers sey = S, so hat man $\frac{\Sigma}{S} = \frac{A \times I}{\pi S}$, oder $\frac{S}{\Sigma} = \frac{\pi S}{A \times I}$, und diese Zahl drückt aus, wieviel mahl der Glanz des leuchtenden Körpers die Klarheit der erleuchteten Fläche übertrift. Man nimmt leicht war, daß πS die absolute Erleuchtung sey, welche der leuchtende Körper der erleuchteten Fläche mittheilen kann. Diese verhält sich also zu dem Product $A \times I$, wie der Glanz des leuchtenden Körpers zur Klarheit der erleuchteten Fläche.

Es sey S der Glanz der Sonne, die eine Fläche von der Art senkrecht erleuchtet, deren Weisse = 0,423 gefunden ist, ihr scheinbarer Halbmesser 16′: so ist $I = \pi \cdot S \cdot (\sin 16')^2$, und $\frac{S}{\Sigma}$ =

$$\frac{1}{0{,}423 \cdot 0{,}0046542^2} = \frac{10000000000}{423 \cdot 216} =$$

109437. Soviel mahl ist der Glanz der Sonne grösser, als die Klarheit einer weissen von ihr erleuchteten Fläche. Der wahre Glanz der Sonne ist würklich noch grösser, weil man auf diese Art

eigent-

eigentlich nur den, wegen der nicht völligen Durchsichtigkeit der Atmosphäre, schon geschwächten Glanz der Sonne mit der Klarheit der weissen Fläche vergleichen kann.

290. §.

Was vom scheinbaren Glanz für sich leuchtender Körper im 241. u. f. §. §. vorgetragen ist, läßt sich nunmehro leicht auf die bisher betrachtete Klarheit für sich dunkler Sachen anwenden: **die scheinbare Klarheit** (claritas visa) einer erleuchteten für sich dunklen Fläche ist der Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut im Auge proportional, mithin verhält sie sich, wie der Ausdruck $\frac{\pi . \Sigma . b^2}{\mu^2 a^2}$ (241. §.), wenn b den Halbmesser des Sterns und a den längsten Durchmesser des Auges bezeichnet. Braucht man also den Werth $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$, so ist die scheinbare Klarheit $= \frac{A . I . b^2}{\mu^2 . a^2}$, wobey vorausgesezt wird, daß das erleuchtete Object nur unter einem kleinen Sehewinkel erscheine.

Bey gleicher scheinbaren Grösse und gleicher Klarheit zweyer für sich dunkler erleuchteter Flächen, ist zugleich ihre scheinbare Klarheit einerley. Auch umgekehrt: **Wenn zwey für sich dunkle erleuchtete Flächen,** die man mit einem Blick übersehen **kann, bey gleicher scheinbaren Grösse, gleich klar oder hell zu seyn scheinen; so ist beyder Klarheit würklich gleich groß.** (Man vergleiche den 249. §.)

Aus

Aus diesem allen ist nun mit gröster Deutlichkeit abzunehmen, wie die Bedeutungen der Ausdrücke: **Erleuchtung** einer für sich dunklen Fläche, **Klarheit** der Fläche, und **scheinbare Klarheit** der erleuchteten Fläche verschieden sind. Die wahre Klarheit der Fläche verhält sich wie das Product der auf sie fallenden Erleuchtung in ihre Weisse, und die scheinbare Klarheit, wie das Product der wahren Klarheit ins Quadrat vom Halbmesser der Oefnung des Sterns im Auge, wobey übrigens vorausgesetzt wird, daß das Bild auf der Netzhaut des Auges, mithin die Empfindung selbst deutlich sey. Merkwürdige Anwendungen hievon werden in der Astronomie vorkommen. Weil nemlich die Planeten ihr Licht von der Sonne empfangen, so ist es nicht einerley, ob man frägt: wie groß die Erleuchtung eines Planeten sey, welche ihm die Sonne zuschickt? oder: wie groß seine daher entspringende Klarheit sey? oder endlich: wie groß diese Klarheit dem Beobachter auf der Erde zu seyn scheine? Ein hieher gehöriges Beyspiel wird nicht allein als eine angenehme Vorbereitung zur umständlichern Anwendung dieser Theorie auf die Astronomie, sondern auch zugleich dazu dienen, die erwehnten Begriffe desto mehr ins Licht zu setzen.

Der

Der XXI. Abschnitt.

Anwendung dieser Theorie auf die Ausmessung der Klarheit des Monds in seinen verschiedenen Gestalten.

291. §.

Es ist eine gemeine Erfahrung, daß der volle Mond zwar einen sehr lebhaften, aber doch bey dem allen noch ungemein viel schwächern Glanz als die Sonne habe. Die veränderlichen Gestalten, welche der Mond annimmt, da er bald wie eine Sichel gekrümmt, bald wie ein Halbkreis, bald wie eine ganze helle Scheibe erscheint, und dies allemahl in einer regelmäßigen Folge während seines einmahligen Umlaufs um die Erde, haben längst auf die Vermuthung geführt, daß der Mond eine für sich dunkle Kugel sey, und mit entlehnten Licht glänze, daß ihm die Sonne zuschickt. Es ist sehr leicht, soweit es hier nöthig ist, sich davon einen Begrif zu machen, wie die Verschiedenheit der Mondsgestalten mit seinen jedesmahligen Stande gegen die Sonne und die Erde zusammen hänge. Vorläufig muß man nur wissen, daß der Mond in einer solchen Bahn um die Erde laufe, die zwar eigentlich kein Kreis ist, hier aber für einen Kreis angenommen werden kann, dessen Halbmesser ohngefehr 60 halbe Erddurchmesser groß ist; und daß die Sonne mehr denn 23000 halbe Erddurchmesser von der Erde entfernt sey. Die Sonne, als eine Kugel, deren Grösse die Grösse der Mondskugel

sehr

sehr weit übertrift, erleuchtet würklich etwas mehr, als die halbe Oberfläche des Mondes; und wenn man den jedesmahligen Abstand des Mondes von der Sonne, wie auch das Verhältniß der Halbmesser oder Durchmesser der Sonne und des Mondes gegen einander weis; so läßt sich berechnen, wie groß das erleuchtete Stück der Mondsfläche sey. (72. §. Opt.) Wegen der sehr großen Entfernung der Sonne von der Erde und dem Monde aber ist das erleuchtete Stück der Mondskugel sehr nahe eine Halbkugel, und kann hier dafür angenommen werden. Ferner übersiehet das Auge des Beobachters auf der Erde nie eine völlige Halbkugel vom Monde: wegen der schon beträchtlich großen Entfernung des Mondes von der Erde aber kann man annehmen, daß auch dies Stück der Mondsfläche eine völlige Halbkugelfläche sey.

Diesemnach sey T der Mittelpunct der Erde, 99
L der Mittelpunct des Mondes, der um jene in 100F
einem Kreise läuft, dessen Halbmesser TL ist: TS sey eine grade Linie aus der Erde Mittelpunct, und LS eine andre grade Linie aus des Mondes Mittelpunct nach den Mittelpunct der Sonne gezogen; so laufen TS und LS unter einem so kleinen Winkel zusammen, daß sie hier als parallele Linien angenommen werden können, die in der Ebene der Mondsbahn liegen. Eben diese Ebene schneide die Mondskugel in dem größten Kreise CGDF, und durch L setze man eine Ebene auf LS senkrecht, so ist diese zugleich auf der Ebene des Kreises CGDF senkrecht, schneidet sie in der graden Linie FG, und sie giebt auf der Mondskugel den größten Kreis GAFB, der die Gränze der erleuchteten und dunk-

dunklen Halbkugelflächen des Monds vorstellet. Noch setze man durch L eine andre Ebene auf LT senkrecht, so ist diese ebenfalls auf der Ebene des Kreises CGDF senkrecht, schneidet ihn in der graden Linie HI, und giebt auf der Mondskugel den größten Kreis HAIB, der die der Erde zugekehrte Halbkugelfläche, die man aus T übersehen kann, von der hintern Hälfte absondert. Beyde größte Kreise GAFB, HAIB, schneiden einander in A und B, und diese Durchschnittspuncte sind die Pole des Kreises CGDF. Demnach ist derjenige Theil der erleuchteten Hälfte des Mondes, welchen man aus T übersehen kann, zwischen den Halbkreisen AHB und AFB enthalten, deren Ebenen einander an AB unter dem Winkel HLF schneiden.

Nun ist STL der Abstand des Mondes von der Sonne aus der Erde gesehen (42. §. Opt.), die **Elongation des Mondes von der Sonne**, und FG ist auf LS und TS senkrecht, mithin ist ELF = 90° − STL: aber auch ELF = 90° − HLF, also 90° − STL = 90° − HLF, und HLF = STL. Das heist der Winkel HLF, oder der sphärische Winkel AHF, der die Grösse des erleuchteten der Erde zugekehrten Theils der Mondsfläche bestimmt, ist der Elongation des Mondes von der Sonne gleich. Es soll dieser Theil der Mondsfläche, wie in der Astronomie, künftig der **Mondsbruch** (phasis lunae) heissen.

292. §.

Nun sey P ein Punct in dem Mondsbruch, APB ein größter Kreis durch diesem Punct P und die Axe AB, OPR ein zur Axe AB gehöriger Parallelrallelkreis durch eben den Punct P; so wird die Lage des Puncts P auf der erleuchteten Mondshälfte durch den sphärischen Winkel FAP, als seinem Abstand von der Gränze der erleuchteten und dunklen Mondshälfte, und durch seinen Abstand AP vom Pol A bestimmt. Der Winkel FAP wachse um das Element PAQ, und der Bogen AP um das Element Pp, durch Q und AB lege man noch einen grösten Kreis, so wie durch p einen zur Axe AB gehörigen Parallelkreis, so giebt sich ein Element $PQqp$ der erleuchteten Mondsfläche. Ferner setze man den Halbmesser der Mondskugel $= 1$, den Bogen $AP = x$, den Bogen $FM = y$, als das Maaß des Winkels FAP; so ist $Pp = dx$, $PQ = dy \sin x$, und die Fläche des Elements $PQqp = dxdy \sin x$. Weil übrigens die Entfernung des Monds von der Erde in Vergleichung mit dem Halbmesser des Monds beträchtlich groß ist, so kann man annehmen, eine grade Linie aus P nach T gezogen, sey mit LT parallel, und diese stellt zugleich die Gesichtsaxe für den Beobachter auf der Erde vor. Gegen diese Gesichtsaxe ist das Element $PQqp$ unter einem Winkel geneigt, der den Winkel ELP zu $90°$ ergänzt: denn dies Element ist auf LP senkrecht, mithin ist es auf der Ebene ELP senkrecht, worin auch TP liegt. Wenn man also den erwehnten Neigungswinkel ζ nennt, so siehet man leicht, daß $ELP + 90° + \zeta = 180°$ sey, mithin $\zeta = 90° - ELP$. Eben so erhellet, wenn aus P eine grade Linie PS in den Mittelpunct der Sonne gezogen würde, daß diese gegen das Element $PQqp$ unter einem Winkel $= 90° - DLP$ geneigt wäre.

293. §.

Die Erleuchtung zu finden, die ein Element, dessen Lage in dem erleuchteten Mondsbruch gegeben ist, von der Sonne empfängt.

Aufl. Es sey die Lage des Elements $PQqp$ durch $FM = y$, $AP = x$ gegeben, und überdem sey $EF = \alpha$, so ist im ersten Viertel $\alpha = 0$ und im Vollmond $\alpha = -90°$. Wenn nemlich $HLF = STL = \varepsilon$ gesetzt wird, so ist überhaupt $\alpha = 90° - \varepsilon$. Man ziehe den größten Kreisbogen DP, so giebt sich ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck DMP, worin DP die Hypothenuse ist, also $\cos. DP = \cos MD . \cos MP$ (538. §. Geom. num. III.) oder $\cos DP = \sin y . \sin x$. Aber die Axe des von der Sonne auf das Element $PQqp$ fallenden Strahlenkegels ist gegen dies Element unter einem Winkel $= 90° - DLP$ geneigt (292. §.); wenn also der scheinbare Halbmesser der Sonne aus P gesehen $= \varrho$ gesetzt wird, so ist die Erleuchtung, welche das Element in P empfängt $= \pi S \sin (90° - DLP) \sin \varrho^2$, (59. 60. §. n. 3.) den Glanz der Sonne $= S$ gesetzt. Nimmt man also diese Erleuchtung $= I$ an, so ist $I = \pi S \sin y \sin x \sin \varrho^2$.

Die Erleuchtung ist also nicht überall einerley, sondern sie wächst mit x und y, weil ϱ beynahe für alle Stellen einerley bleibt. Bey D wo $x = y = 90°$ wird, ist sie am größten, und verschwindet im Umfange des Kreises AFBG, welches alles der Natur der Sache gemäß ist.

Wenn

Wenn A die Weisse des Elements und Σ die Klarheit desselben ist, so hat man $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ (232. §.) $= A . S . \sin x \sin y \sin \varrho^2$; mithin ist auch die Klarheit verschiedener Stellen der erleuchteten Mondsfläche veränderlich, und dies nicht allein, weil sich x und y ändern, sondern weil auch A veränderlich seyn könnte.

Im vollen Mond ist $\varepsilon = 180°$, $\alpha = -90°$, und F fällt in I, so wie D in E. Alsdenn ist für die Stelle D die Klarheit $\Sigma = A . S . \sin \varrho^2$, weil x und $y = 90°$ sind, und man hat $S : \Sigma\ 1 : A \sin \varrho^2$. Wie nun ϱ ohngefehr zwischen 15′ und 16′ fallen wird, so nehme man $\varrho = 0{,}0045$ an, so ist $\varrho^2 = 0{,}00002025$. Wie groß A sey, ist nicht bekannt, vermuthlich beträgt A nicht über $\frac{1}{5}$, weil die gröste Weisse der Massen, die wir auf der Erde kennen, ohngefehr nur $\frac{2}{5}$ beträgt. Wäre $A = \frac{1}{5}$, so fände man $\frac{S}{\Sigma} = \frac{1}{0{,}00000404} = 247525$. Soviel mahl wäre der Glanz der Sonne grösser, als die Klarheit der mittelsten Stelle der scheinbaren Mondscheibe im Vollmond.

294. §.

Bey allen bisherigen Anwendungen der Fundamentalgleichung $dI = S d\mu . \sin \vartheta$ (48. §.) ist noch vorausgesetzt worden, daß S eine beständige Grösse, und für alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley sey. In solchen Fällen hat man

allemahl $I = S\int d\mu \sin\vartheta$, also umgekehrt $S = \frac{I}{\int d\mu \sin\vartheta}$. Wäre dagegen die leuchtende Fläche
8 Fig. AB, welche dem Element Mm ihr Licht zuschickt, ungleichförmig glänzend und Σ der Glanz eines unbestimmten Elements Ll, die Erleuchtung, welche AB nach Mm schickt $= Y$, so hätte man $Y = \int \Sigma d\mu \sin\vartheta$. Man stelle sich vor, der über der Fläche AB ungleichförmig verbreitete Glanz werde gleichförmig vertheilt mit der Bedingung, daß Mm von AB noch eben die Erleuchtung wie vorhin empfange, und nun sey der Glanz eines jeden Elements $= S$, so hätte man $Y = S\int d\mu \sin\vartheta$, und beyde Erleuchtungen gleich gesetzt giebt $S = \frac{\int \Sigma d\mu \sin\vartheta}{\int d\mu \sin\vartheta}$. Dieser Glanz S kann der mittlere Glanz der ungleichförmig leuchtenden Fläche heissen, so wie bereits in einem ähnlichen Verstande der Ausdruck: **mittlere Erleuchtung** ist gebraucht worden. (15. §.)

Wenn Σ wie im 275. §. die Klarheit einer für sich dunklen anderswoher erleuchteten Fläche bezeichnet, und man aufs neue die Erleuchtung sucht, welche sie einer andern Fläche zuschickt; so kommt dies Σ eben so in Rechnung, als wenn die dunkle Fläche für sich leuchtend wäre, und Σ ihren Glanz bezeichnete. Wie nun im 293. §. schon ein Beyspiel davon vorgekommen ist, daß dies Σ für verschiedene Elemente der erleuchteten mit fremden Licht strahlenden Fläche veränderlich seyn kann; so erhellet, daß auch hier der Ausdruck: mittlere **Klarheit**, in ähnlicher Bedeutung, wie bey für

sich

sich leuchtenden Flächen der Ausdruck: mittlerer Glanz, gebraucht werden könne. Wenn nemlich AB eine solche ungleichförmig klare Fläche ist, die ihr Licht auf das Element Mm wirft, und die Klarheit des Elements L$l = \Sigma$ gesetzt wird; so ist der Fläche AB mittlere Klarheit $= \frac{\int \Sigma d\mu \sin\vartheta}{\int d\mu \sin\vartheta}$.

Wäre die Entfernung LM in Vergleichung mit den Abmessungen der leuchtenden Fläche AB sehr groß, so wäre beynahe $\sin\vartheta$ für alle auf Mm fallende Strahlen einerley: alsdenn hätte man für die mittlere Klarheit der Fläche AB den Ausdruck $\frac{\int \Sigma \vartheta\mu}{\int d\mu} = \frac{1}{\mu} \int \Sigma d\mu$.

295. §.

Die Elongation des Mondes von der Sonne ist gegeben, man sucht die mittlere Klarheit der von der Erde gesehenen Mondsphase.

Aufl. Wenn die Bezeichnungen hier wie im 293. §. beybehalten werden, so ist das Element PQqp der erleuchteten Mondsfläche $= dxdy \sin x$; (292. §.) und wenn z der Abstand dieses Elements von der Erde ist, so hat man $d\mu = \frac{dxdy \sin x \cos EP}{z^2}$. Ferner ist $\Sigma = A . S . \sin x \sin y \sin \varrho^2$, und wegen der schon beträchtlich großen Entfernung des Monds von der Erde in Vergleichung mit dem Halbmesser des Monds ist für alle Stellen auf der Erde, die der Mond erleuchtet, der Einfallswinkel ϑ beynahe einerley, so wie auch z

für alle Elemente des Monds beynahe einerley bleibt. Wird also die gesuchte mittlere Klarheit des Monds $= s$ gesetzt, so hat man $s = \dfrac{\int \Sigma d\mu}{\int d\mu} =$

$$(294. \S.) = \frac{S . A . \sin\rho^2 . \int dx dy \sin x^2 \sin y \cos EP}{\int dx dy \sin x \cos EP}$$

Es ist aber $\cos EP = \cos E . M \cos PM$ $= \cos(\alpha + y) \sin x = (\cos\alpha \cos y - \sin\alpha \sin y) \sin x$, mithin $dx dy \sin x \cos EP =$
$dx \sin x^2 (dy \cos y \cos\alpha - dy \sin y \sin\alpha)$. Man nehme zuerst allein x als veränderlich an, so findet man hievon das Integral
$= C + \frac{1}{2}(dy \cos y \cos\alpha - dy \sin y \sin\alpha (x - \frac{1}{2} \sin 2x)$.
(Man vergleiche den 59. §. am Ende). Weil dies Integral mit x zugleich verschwinden muß, so findet man $C = 0$. Man integrire noch mahl, und nehme allein y veränderlich an, so findet man
$\int dx dy \sin x \cos EP = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x)(\sin y \cos\alpha + \cos y \sin\alpha) + C$
$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) \sin(y + \alpha) + C$. Mit y muß dies Integral verschwinden, also ist
$C = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) \sin\alpha$, und man erhält
$\int dx dy \sin x \cos EP = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x)(\sin(y + \alpha) - \sin\alpha)$.

Weiter erhält man $dx dy \sin x^2 \sin y \cos EP$ $= dx \sin x^3 (dy \sin y \cos y \cos\alpha - dy \sin y^2 \sin\alpha)$, und um das Integral $\int dx \sin x^3$ zu finden, setze man $\cos x = u$, $\sin x^2 = w$, so ist $dx \sin x . \sin x^2 = - w du$, also $\int - w du = - wu + \int u dw$, oder $\int dx \sin x^3 =$ $- \sin x^2 \cos x + 2\int dx \cos x^2 \sin x = - \sin x^2 \cos x$ $- 2 \cos x + 2\int dx \sin x^3$, und das giebt
$\int dx \sin x^3 = -\frac{1}{3} \sin x^2 \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C$. Soll dies Integral mit x verschwinden, so hat man $C = \frac{2}{3}$. Wenn also zuerst das Integral von

$dxdy \sin x^2 \sin y \cos EP$ in der Voraussetzung gesucht wird, daß allein x veränderlich sey; so findet man $(\frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3} \cos x^3)(dy \sin y \cos y \cos\alpha - dy \sin y^2 \sin\alpha)$. Die zweyte Integration y veränderlich angenommen, giebt das Integral des veränderlichen Factors $= \frac{1}{2} \sin y^2 \cos\alpha - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}\sin 2y) \sin\alpha + C$, wo $C = 0$ wird, weil das Integral mit y verschwinden muß. Eben dieser Ausdruck ist $=$
$\frac{1}{2}((\sin y \cos\alpha + \cos y \sin\alpha) \sin y - y \sin\alpha)$
$= \frac{1}{2}(\sin(y + \alpha) - y \sin\alpha)$;
also giebt sich $\int dxdy \sin x^2 \sin y \cos EP$
$= (\frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3} \cos x^3) . \frac{1}{2}(\sin(y + \alpha) \sin y - y \sin\alpha)$.
Um diese Integrale für den ganzen Mondsbruch zu haben, muß man $x = APMB = 180°$ und $y = FH$ setzen, da dann FH die Elongation des Monds von der Sonne ist. Es sey also nun $y = FH = v$, so ist $EF + FH = v + \alpha = 90°$, also $\sin\alpha = \cos v$, und man findet

$$\int dxdy \sin x^2 \sin y \cos EP = \tfrac{2}{3}(\sin v - v \cos v),$$

$$\int dxdy \sin\alpha \cos EP = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos v),$$

$$\text{also } s = \frac{\frac{2}{3} S . A \sin\varrho^2 (\sin v - v \cos v)}{\frac{1}{2}\pi(1 - \cos v)} =$$

$$\frac{4 S . A \sin\varrho^2}{3\pi} . \left(\frac{\sin v}{1 - \cos v} - \frac{v \cos v}{1 - \cos v}\right).$$ Es

ist aber $\dfrac{\sin v}{1 - \cos v} = \cot \frac{1}{2} v$, (459. §. Geom.)

$$\text{also } s = \frac{4 S . A \sin\varrho^2}{3\pi} (\cot \tfrac{1}{2} v - v \cot v \cot \tfrac{1}{2} v).$$

Für den vollen Mond ist $v = \pi$, also $\sin v = 0$, $\cos v = -1$, und die mittlere Klarheit des Vollmonds $s = \frac{2}{3} S \cdot A \sin \varrho^2$, oder $\frac{S}{s} = \frac{1}{\frac{2}{3} A \sin \varrho^2}$ $= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{A \sin \varrho^2}$. Vergleicht man dies Resultat mit dem 293. §. so erhellet, daß die mittlere Klarheit der vollen Mondscheibe $\frac{2}{3}$ der Klarheit ihrer mittelsten Stelle betrage. Wie nun eben daselbst $\frac{1}{A \sin \varrho^2} = 247525$ gefunden ist in der Voraussetzung $A = \frac{1}{5}$, so giebt sich hier $\frac{S}{s} =$ 371287.

Wenn Σ die centrale Klarheit des Vollmonds bezeichnet, so verhält sich seine sichtbare centrale Klarheit wie $\frac{\pi \Sigma b^2}{\mu^2 \;\; a^2}$, mithin bey einerley Oefnung des Sterns im Auge, wie $A \sin \varrho^2$. Seine sichtbare mittlere Klarheit drückt die Formul $\frac{\pi \; s \; b^2}{\mu^2 \;\; a^2}$ aus, und man hat $s = \frac{2}{3} A \sin \varrho^2$. Diese sichtbare oder scheinbare Klarheit ändert sich nicht merklich, wenn sich die Entfernung des Monds von der Erde ändert. Etwas merklicher ist die Aenderung dieser Klarheit wegen des verschiedenen Abstandes der Sonne vom Mond und der Erde. Diese ist in der Mitte des Winters am kleinsten, und in der Mitte des Sommers am grösten. Der Unterscheid des grösten und kleinsten scheinbaren Halbmessers der Sonne beträgt etwa $\frac{1}{2}$ Minute, oder $\frac{1}{30}$ des kleinsten Halbmessers, mithin ist einerley Phase im Winter etwa um $\frac{1}{15}$ klärer als im Sommer.

Der

Der XXII. Abschnitt.

Von einigen Hülfsmitteln den Glanz leuchtender Körper durch Versuche zu vergleichen.

296. §.

Wenn gleich weisse Flächen ihre Erleuchtung von verschiedenen leuchtenden Körpern erhalten, und diese beyden Flächen eine gleiche Klarheit haben; so sind auch die Erleuchtungen, welche auf beyde fallen, gleich groß.

Beweis. Denn die Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ giebt $I = \frac{\pi . \Sigma}{A}$. Für eine andre Fläche sey die Weisse $= a$, die Erleuchtung $= i$, ihre Klarheit $= \sigma$, so ist $i = \frac{\pi . \sigma}{a}$. Wenn demnach $A = a$, und $\Sigma = \sigma$ ist, so hat man auch $I = i$.

297. §.

Diese Betrachtung wird ein Mittel den Glanz zweyer verschiedenen leuchtenden Körper, durch angestellte Versuche zu vergleichen. Man setze nemlich, die eine Fläche empfange ihre Erleuchtung I von einem Licht, dessen Glanz $= S$ ist, eine andere eben so weisse Fläche aber von einem Licht, das den Glanz $= s$ hat, die Erleuchtung $= i$: so ist die absolute Erleuchtung, welche das erste Licht einer Fläche mittheilen kann, $= \pi S$, und diejenige absolute Erleuchtung, welche das zweyte Licht mittheilen kann, $= \pi s$. Wenn aber der Glanz der leuchtenden Fläche, welche das Licht aussendet, in allen ihren Elementen einerley ist; so läst sich jede andre Erleuchtung durch ein Product der absoluten Erleuchtung in eine Zahl N ausdrücken, die von der scheinbaren Gestalt und Grösse der leuchtenden Fläche abhängt, so daß man $I = \pi . S . N$ erhält. Wird also n für die andere leuchtende Fläche in eben der Bedeutung gebraucht, so ist $i = \pi . s . n$; mithin erhält man $S . N = s . n$, wenn $I = i$ ist, und $\frac{S}{s} = \frac{n}{N}$.

Um also das Verhältniß $S : s$ zu finden, muß man ein Paar gleich weisse Flächen unter die Umstände bringen, daß die eine derselben von dem einen, die andere von dem andern leuchtenden Körper ihre Erleuchtung, und zwar so empfängt, daß beyde eine gleiche Klarheit erlangen, mithin beyde Erleuchtungen gleich groß sind. Man nimmt hiebey an, daß dergleichen Flächen würklich gleich klar sind, die dem Auge des Beobachters gleich klar zu seyn scheinen, und man ist vermöge der im 290. §. vorgetragenen Gründe dazu berechtiget, wenn man zugleich den Bedingungen eine Gnüge leistet, die daselbst zum Grunde gelegt wurden. Man muß beyde Flächen einander so nahe bringen, daß man beyde mit einem Blick übersehen kann: auch giebt man ihnen einerley Gestalt und Grösse.

298. §.

Den Glanz zwoer Lichtflammen zu vergleichen.

Aufl. Man entferne von derjenigen Lichtflamme, die den schwächsten Glanz $= s$ hat, eine weisse Fläche soweit, daß ihre Entfer ng davon, die ich $= \delta$ setze, acht bis zehn mahl grösser ist, als die Höhe der Flamme, damit leztere in Vergleichung der ersten nur klein sey, und lasse das Licht auf die Fläche senkrecht fallen. Wird die Höhe der Flamme $= a$, ihre gröste Breite $= b$ gesetzt, so ist ein Schnitt durch die Axe der Flamme, welche leztere mit der erleuchteten Fläche parallel angenommen wird, beynahe $= \frac{1}{2} a . b$. (284. §.) Ich will die Fläche dieses Schnitts $= e^2$ setzen, und die Erleuchtung, welche auf die mit der Axe der Flamme parallele Ebene senkrecht fällt, $= i$, so ist $i = \frac{e^2 . s}{\delta^2}$. Mit einer andern eben so weissen Fläche fange man das von der stärkern glänzenden Flamme ausgehende Licht senkrecht auf, und dieser Flamme Glanz sey $=$ S; auch sey die erleuchtete Fläche mit der Axe der conisch brennenden Flamme parallel, und ein Schnitt der Lichtflamme durch ihre Axe $= E^2$: so wird man die von der stärker glänzenden Flamme erleuchtete Fläche von dieser Flamme weiter, als um den Abstand δ entfernen müssen, wenn sie eben so stark, als die andre erleuchtet werden soll. Diesen neuen Abstand suche man also durch Versuche zu finden, setze denselben $= \Delta$, die Erleuchtung aber, welche die stärker glänzende Flamme ihrer Fläche zuschickt $=$ I;

so

so hat man $I = \frac{E^2 . S}{\Delta^2}$. Wenn nun der Versuch $I = i$ giebt, so ist $\frac{E^2 . S}{\Delta^2} = \frac{e^2 . s}{\delta^2}$, also $S : s = \frac{e^2}{\delta^2} : \frac{E^2}{\Delta^2}$, oder auch $S : s = e^2 . \Delta^2 : E^2 . \delta^2$.

Dasselbe Gesetz der Vergleichung findet noch statt, wenn gleich die Strahlen schief, jedoch auf beyde Flächen unter einerley Neigungswinkel auffallen. Wenn übrigens beyde Lichtflammen völlig, oder wenigstens beynahe gleich groß sind, so hat man $S : s = \Delta^2 : \delta^2$. Hr. **Bouguer** (Traité d' optique sur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. VIII.) nennt das Product $E^2 . S$ quantité totale de la lumiere: es ist würklich der Menge Lichts proportional, welche die Flamme nach allen Seiten aussenden würde, wenn sie nur an ihrer Oberfläche glänzend wäre, oder die innern Lichttheilchen nicht durchscheinen könnten. Oben im II. Abschnitt ist schon erinnert worden, daß es in diesem Stück mit Lichtflammen eine andre Bewandniß, als mit leuchtenden Flächen habe, und in Rücksicht dessen müste statt E^2 der körperliche Inhalt der Flamme genommen werden, wenn man eine vollkommene Durchsichtigkeit derselben voraussetzen könnte, wozu man aber auch keinen Grund hat. Die äussern Lichttheilchen an der Oberfläche der Flamme sind es wohl vornemlich, welche nach allen Seiten ihre Strahlen verbreiten, und so kann man mit H. Bouguer $E^2 . S : e^2 . s$ =

$= \frac{1}{\delta^2} : \frac{1}{\Delta^2} = \Delta^2 : \delta^2$ behalten. Was hier S ist, heist bey ihm intensité de la lumiere.

299. §.

Damit der Versuch richtig ausfalle, muß von der erleuchteten Fläche alles fremde Licht abgehalten werden, damit jede derselben sonst gar kein Licht ohne nur von der dazu gehörigen Lichtflamme empfange. Wenigstens müsten beyde Flächen auch von dem übrigen fremden Licht gleich stark erleuchtet seyn. Am besten wird der Versuch im finstern Zimmer angestellet, und Herr Bouguer (sur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. II. p. 9.) empfielt dabey folgende Verrichtung. Man setzt ein Paar ebene Flächen AB, BC, unter einem stum- 101F
pfen Winkel zusammen, so daß BD ihre Durchschnittslinie vorstellt. Man kann ein Stück Pappe, daß die Gestalt eines Rechtecks hat, dazu gebrauchen, wenn man es so bricht, daß DE den Falz vorstellt. In F und G werden ein Paar gleich große kreisrunde Löcher von 3 bis 4 Linien im Durchmesser geschnitten, und diese werden mit weissen Papier auch wohl mit mattgeschliffenen Glase bedeckt. Die Kerzen oder Lampen stellt man nun hinter AB und BC auf der erhabenen Seite des Flächenwinkels ABDC. Weil aber die eine Lichtflamme nur nach F, die andre nur nach G hinscheinen soll, so bringt man eine Art von Scheidewand, wie DE vorstellt, dazwischen. Die Farbe der Pappe, oder was man sonst wählt, muß die schwarze seyn, um nicht allein alle Zurückwerfungen

des

des Lichts möglichst zu vermeiden, sondern auch um deswillen, damit sich die erleuchteten Papierscheiben desto besser unterscheiden. Diese muß man mit einem Blick bequem übersehen können, um die Vergleichung der Helligkeit desto richtiger anzustellen: deswegen müssen sie auch der Durchschnittslinie DB nahe seyn.

Das Auge siehet auf solche Art das durchs Papier oder matte Glas durchscheinende Licht, und um deswillen wird auch wohl das Papier in Oel getränkt, damit es durchsichtiger werde. Man muß dabey voraussetzen, daß beyde Papierblätter, oder beyde Stücken Glas das Licht gleich stark durchlassen, und selbige um deswillen mit Vorsicht von gleicher Beschaffenheit wählen.

Ich habe hiemit von des Herrn Bouguer Verfahren eine Beschreibung geben wollen, so wie ich nun bald mehr Veranlassung haben werde, von seinen Methoden zu reden, nach welchen er photometrische Versuche angestellet hat. Sonst siehet man wohl, daß die Versuche sich auch so anstellen lassen, wie die Lambertischen, davon ich im 12. §. Nachricht gegeben habe. Bey diesem Lambertischen Verfahren siehet man grade zu die von den Kerzen erleuchteten Flächen, und das Auge empfängt das von ihnen zurück geworfene, nicht durchscheinende Licht. Diese Art den Versuch anzustellen scheint mir sicherer als jene zu seyn.

300. §.

Läßt man das Licht durch ein Sammlungsglaß fallen, so ist die Erleuchtung des deutlichen Bil-

des

des $I = \frac{M}{\varepsilon^2}$, wenn M die auf das Glas fallende Lichtmenge, und ε die Fläche des deutlichen Bildes bezeichnet. Ich nehme an, das Object sey vom Glase so weit entfernt, daß es nicht nöthig ist, die centrale Erleuchtung von der mittlern Erleuchtung des Bildes zu unterscheiden, weil alsdenn das deutliche Bild beynahe überall gleichförmig erleuchtet ist. Der Halbmesser der Oefnung des Glases sey $= b$, so kann man in dem Fall des 298. §., wenn das Licht von einer Kerze kommt, annehmen, es falle davon auf das Glas die Erleuchtung $\frac{E^2 \cdot S}{\delta^2}$, also die Strahlenmenge $M = \frac{\pi E^2 S b^2}{\delta^2}$, und daraus giebt sich die Erleuchtung des deutlichen Bildes $I = \frac{\pi E^2 \cdot S \cdot b^2}{\delta^2 \cdot \varepsilon^2}$. Ferner sey g die Entfernung des Bildes vom Glase, so ist $\frac{E^2}{\delta^2} = \frac{\varepsilon^2}{g^2}$, also $\delta^2 \cdot \varepsilon^2 = E^2 \cdot g^2$, und $I = \frac{\pi \cdot S \cdot b^2}{g^2}$.

Wenn demnach für einen andern leuchtenden Körper β, γ, s, das sind, was für den ersten b, g, S, waren; so hat man für die Erleuchtung des zweyten Bildes $i = \frac{\pi \cdot s \cdot \beta^2}{\gamma^2}$. Richtet man alsdenn wiederum den Versuch so ein, daß $I = i$ wird, so hat man $\frac{S \cdot b^2}{g^2} = \frac{s \cdot \beta^2}{\gamma^2}$ mithin $S : s$

$=$

$= \frac{\beta^2}{\gamma^2} : \frac{b^2}{g^2}$.

Man kann beyden Gläsern einerley Oefnung geben, so ist $b = \beta$, also $S : s = \frac{1}{\gamma^2} : \frac{1}{g^2} = g^2 : \gamma^2$. Des ersten Glases Brennweite sey $= f$, des andern $= \varphi$, so ist $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$, und $\gamma = \frac{\Delta \cdot \varphi}{\Delta - \varphi}$: mithin $S : s = \frac{\delta^2 \cdot f^2}{(\delta - f)^2} : \frac{\Delta^2 \cdot \varphi^2}{(\Delta - \varphi)^2}$, und wenn beyde Brennweiten gleich sind, $S : s = \frac{\delta^2}{(\delta - f)^2} : \frac{\Delta^2}{(\Delta - f)^2}$.

Wenn $S > s$ ist, so muß $g > \gamma$, also $\delta < \Delta$ seyn, mithin das stärker glänzende Licht dem Glase näher gebracht werden, als das schwächer glänzende, damit das Bild des erstern sich in einen
102F größern Raum ausbreite. In der 102. Fig. stellen AB, BC, dieselben Ebenen vor, die in der 101sten durch AB, BC vorgestellet wurden, F und G sind die Oefnungen, FL, Gl, die auf AB, BC, senkrechten Linien, worin man die Lichtflammen L, l, stellen kann, um ihren Glanz zu vergleichen. Eben diese Linien müssen die Axen der Sammlungsgläser D und K abgeben. Man kann die eine Entfernung GK, die grösser als die Brennweite des Glases seyn muß, willkührlich annehmen, und um l so weit entfernen, bis auf BC das deutliche Bild fällt. Wenn nun L stärker als l glänzt, und anfangs LF ohngefehr $= l$G genommen, D aber so weit von AB entfernt ist, daß das Bild der

Flamme L sich deutlich darstellet; so wird es heller, als das Bild der Flamme l seyn. Man muß also L näher nach AB rücken, und weil dadurch das Bild undeutlich gemacht wird, das Glaß D von AB weiter entfernen, bis das Bild von L deutlich wird. Hiemit wird so lange fortgefahren, bis beyde Bilder gleich helle erscheinen.

301. §.

Man kann bey eben dem Gebrauch der Sammlungsgläser den Versuch so anstellen, daß die Entfernungen FL, Gl willkührlich, also auch gleich groß, imgleichen die eine Entfernung GK ebenfalls willkührlich angenommen werden kann, da denn nur nöthig ist, das Glaß D allein zu verrücken, um in F und G eine gleiche Erleuchtung zuwege zu bringen. Alsdenn muß man die Gründe der Vergleichung des Glanzes beyder Lichtflammen aus dem 206 bis 215 §. hernehmen. Man rücke nemlich das Glas D weiter als um den Abstand des deutlichen Bildes vor AB weg, so wird das Bild auf AB undeutlich: es muß aber nunmehro das falsche Bild von dem ganzen undeutlichen Bilde unterschieden werden. Man setze die Entfernung der Ebene AB vom Glase D, wie im 207 §. $= a$, so wird hier $a > g$ genommen, und von dem im 215 §. von einander unterschiedenen sechs Fällen können hier nur die drey lezten eintreten. Das falsche Bild ist eigentlich der Raum, welchen alle Zerstreuungskreise mit einander gemein haben, dasselbe ist gleichförmig erleuchtet, und zwar so stark, als wenn alle Zerstreuungskreise mit dem mittlern TS (74 bis 79 Fig.) zusammen fielen. Der Halbmesser dieses Zerstreuungskreises sey $= R$, die auf das Glas fallende Strahlenmenge $= M$, so ist des falschen Bildes Ereluchtung $I = \frac{M}{\pi \cdot R^2}$, und $R = \frac{(a-g)b}{g}$ wofern anders $a > \frac{bg}{b-g}$ ist, welches im 215 §. der zuletzt betrachtete Fall war. Wäre zwar $a > g$, aber doch $a < \frac{bg}{b-q}$, ferner des projicirten deutlichen Bildes Fläche $= \zeta^2$, so hätte man $I = \frac{M}{\zeta^2}$, und $\zeta^2 = \frac{a^2}{g^2} \cdot \varepsilon^2$, des deutlichen Bildes Fläche $= \varepsilon^2$ gesetzt.

Für das andre Licht, dessen Glanz man vergleichen will, sey $i, \mu, \varrho, \alpha, \beta, \gamma, \varkappa$, was für das erstere I, M, r, a, b, g, q, war; auch sey $\alpha > \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta - \varkappa}$: so ist für dasselbe $i = \frac{\mu}{\pi \varrho^2}$, und $\varrho =$

102F $\frac{(\alpha-\gamma)\beta}{\gamma}$. In der 102. Fig. stellen OP, QR die Zerstreuungskreise vor, denen die Halbmesser R und ϱ zugehören. Wenn nun anfangs $FL = Gl$, und $FD = GK$ genommen ist, L aber stärker als l glänzt; so wird OP stärker als QR erleuchtet seyn. Demnach rücke man das Glas D weiter von AB weg, so wächst der Kreis OP, und seine Erleuchtung wird kleiner: also kann man es allein durch Verrückung des Glases D dahin bringen, daß

daß I = i werde, und das giebt $\frac{M}{\pi \cdot R^2} = \frac{\mu}{\pi \cdot \varrho^2}$. Weil nun M von dem Glanz S und μ von dem Glanz s abhängt, so kann aus dieser Gleichung das Verhältniß S : s gefunden werden: wenn man M und μ gehörig ausdrückt.

302. §.

Es sey demnach L sowohl als l eine Lichtflamme, so kann man dem 284. §. gemäß die Erleuchtung, welche die Vorderfläche des Glases D von L empfängt, = $\frac{E^2 \cdot S}{DL^2}$, also die auffallende Strahlenmenge M = $\frac{\pi E^2 \cdot S \cdot b^2}{DL^2}$ annehmen. Aus eben dem Grunde ist die Lichtmenge, welche die Flamme l auf das Glas K wirft oder $\mu = \frac{\pi \cdot e^2 \cdot s \cdot \beta^2}{Kl^2}$. Diese Werthe in die Gleichung $\frac{M}{\pi R^2} = \frac{\mu}{\pi \varrho^2}$ gesetzt, geben $\frac{E^2 \cdot S \cdot b^2}{R^2 \cdot DL^2} = \frac{e^2 \cdot s \cdot \beta^2}{\varrho^2 \cdot Kl^2}$, also E^2. S : e^2. s = $\frac{\beta^2}{\varrho^2 \cdot Kl^2}$: $\frac{b^2}{R^2 \cdot DL^2}$. Ferner war R = $\frac{(a-g)\,b}{g}$, $\varrho = \frac{(\alpha-\gamma)\,\beta}{\gamma}$, also hat man E^2. S : e^2. s = $\frac{\gamma^2}{(\alpha-\gamma)^2 \cdot Kl^2} : \frac{g^2}{(a-g)^2\, DL^2}$,

 oder

oder $E^2 . S : e^2 . s = \frac{\gamma^2}{GN^2 . Kl^2} : \frac{g^2}{FM^2 . DL^2}$.

Wenn die Gläser gleiche Brennweiten haben, so werden auch g und γ beynahe gleich groß seyn, wenn DL, Kl in Vergleichung mit der Brennweite ziemlich groß, und dabey einander nicht sehr ungleich sind: also kann man beynahe $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{GN^2 . Kl^2} : \frac{1}{FM^2 . DL^2}$ annehmen, oder $E^2 . S : e^2 . s = FM^2 . DL^2 : GN^2 . Kl^2$.

Nach dieser Regel verfährt H. **Bouguer** a. a. O. 10. u. f. S. Richtiger ist es, wenn man g und γ durch die Brennweite der Gläser ausdrückt, da dann wenn diese gleich groß $= f$ angenommen wird, $g = \frac{DL . f}{DL - f}$, $\gamma = \frac{Kl . f}{Kl - f}$ gesetzt werden muß, und man erhält $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{GN^2 . (Kl - f)^2} : \frac{1}{FM^2 (DL - f)^2}$ oder $E^2 . S : e^2 . s = FM^2 (DL - f)^2 : GN^2 (Kl - f)^2$. Man findet also, wie H. **Bouguer** a. a. O. Liv. I. Sect. I. Art. VIII. pag. 40. richtig erinnert, auf diese Art das Verhältniß der Lichtmengen, welche die Flammen nach allen Seiten um sich her verbreiten, nicht das Verhältniß des Glanzes beyder Lichtflammen: letzteres wäre $S : s = \frac{FM^2 . (DL - f)^2}{E^2} : \frac{GN (Kl - f)^2}{e^2}$

Wenn alles Glas vollkommen durchsichtig wäre, so würde es nicht nothwendig seyn, bey dem Versuch Glaslinsen von gleicher dicke und mit gleichen

Oef-

Oefnungen zu wählen. Weil aber dickeres Glas undurchsichtiger als dünneres ist; so wählt man Linsen so viel möglich aus einerley Glasart, und mit völlig gleichen Abmessungen, damit nicht zu fürchten sey, daß die verschiedene Undurchsichtigkeit der Gläser das Resultat des Versuchs unsicher mache.

303. §.

Sonst giebt die Voraussetzung $b = \beta$, auch $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{\varrho^2 . Kl^2} : \frac{1}{R^2 . DL^2}$, oder $E^2 . S : e^2 . s = R^2 . DL^2 : \varrho^2 . Kl^2$, und vermittelst dieser Proportion liesse sich ebenfalls die Vergleichung zwischen $E^2 . S$ und $e^2 . s$ anstellen, wenn man nur R und ϱ richtig messen könnte. Wofern so wohl L als auch l nur ein einziger Punct wäre; so würde das deutliche Bild so wohl in M als auch in N nur ein einziger Punct seyn; hinter dem Bilde würden sich die Strahlen wieder ausbreiten, und wo man sie nun auch hinter dem Bilde mit einer Ebene wie AB, BC, senkrecht auffienge, da würden die Kreise OP, QR, gleichförmig erleuchtet seyn. Was im 208. §. das falsche Bild hies, wäre nun mit dem Zerstreuungskreise einerley, weil es bey der angenommenen Voraussetzung nur einen einzigen Zerstreuungskreis geben würde. Eben das ergeben die im 215. §. angegebenen Formuln, weil hier $r = \frac{a . q}{g} = 0$ wäre, $q = 0$ gesetzt, also des falschen Bildes Halbmesser $s = \varrho - r = \varrho =$ dem Halbmesser des Zerstreuungskreises. H. Bouguer a. a. O. empfielt die zulezt angegebene Proportion, zeichnet die Figur so, wie hier die 102te, und nimmt OP, QR für die Durchmesser 2R und 2ϱ. Dagegen könnte man nun wohl einwenden, daß die Grösse der Lichtflammen zu beträchtlich sey, als daß der ganze erleuchtete Kreis OP, oder QR für denjenigen anzunehmen wäre, wozu der Halbmesser R oder ϱ gehörte, welche leztern eigentlich die Zerstreuungshalbmesser sind; statt dessen, daß man nach Herrn Bouguer die Halbmesser oder Durchmesser der beyden undeutlichen Bilder messen soll. Das deutliche Bild der Lichtflamme ist kein Kreis, weil die Lichtflamme nicht kreisförmig ist: demnach ist auch so wenig das projicirte deutliche Bild, als das undeutliche Bild Kreisförmig. Man kann sich indessen von der Mitte der Flamme nach allen Seiten bis an ihren Umfang Halbmesser vorstellen, deren Grösse sich mit ihrer Lage ändert; so wird auch q nach eben dem Gesetz veränderlich seyn, wovon hiernächst bey jeder gegebenen Lage der Halbmesser des projicirten deutlichen Bildes $r = \frac{a \cdot q}{g}$, und der Halbmesser des undeutlichen Bildes $r + R$, so wie auch des falschen Bildes $r - R$ abhängt. Hat nun das Glas eine kurze Brennweite, so wächst $R = \frac{(a-g)\,b}{g}$ schneller mit a als $r = \frac{a \cdot q}{g}$, wenn jedes q in Vergleichung mit b ziemlich klein ist; also nähern sich die Halbmesser des undeutlichen Bildes einander desto mehr, je grösser a wird, und die Gestalt des undeutlichen

Bildes

Bildes nähert sich der Gestalt eines Kreises. Mißt man nun den Halbmesser dieses undeutlichen Bildes, so mißt man $r + R = \frac{aq}{g} + \frac{ab}{g} - b$, und man sollte eigentlich $R = \frac{ab}{g} - b$ messen: mithin ist der Fehler $= \frac{a \,.\, q}{g}$, und derselbe ist desto weniger beträchtlich, je kleiner q in Vergleichung mit b ist. Dieser Fehler ist hier um so weniger beträchtlich, weil es hier nur auf das Verhältniß $r + R : r + \varrho$ ankomint: dasselbe ist $= \frac{R + r}{\varrho + r} : 1$ $= \left(\frac{R}{\varrho} + \frac{r}{\varrho + r} - \frac{rR}{\varrho(R + r)}\right) : 1$ beynahe $=$ $\frac{R}{\varrho} : 1 = R : \varrho$.

304. §.

Bey Versuchen dieser Art bedient sich H. Bouguer eines Instruments unter dem Nahmen eines Lichtmessers, dessen Einrichtungen oben im 253 und 254 §. schon ist beschrieben worden. Man kann jede der beyden Röhren AB, CD, welche das Werkzeug ausmachen, gegen ein eigenes leuchtendes oder erleuchtetes Object richten, und durch Bedeckung eines Theils der Oefnung des einen dem Object zugekehrten Glases es dahin bringen, daß beyde Bilder eine gleiche Klarheit erhalten. Sehr weit entlegene Gegenstände werden im Brennraum der Gläser ein deutliches Bild machen. Wenn also die Glä- 91 F.

ser gleiche Brennweiten haben, so können beyde Röhren gleich lang seyn, und bey gleicher Klarheit der Bilder wird sich der Glanz des einen Objects zum Glanz des andern, umgekehrt wie die Oefnung der Gläser verhalten. Bey nicht so gar weit entlegenen und ungleich weit entfernten Gegenständen, ist der Abstand des deutlichen Bildes nicht einerley für beyde Gläser: demnach werden die Röhren so eingerichtet, daß man sie nach Gefallen verlängern oder verkürzen kann, um jedesmahl ein paar deutliche Bilder zu haben, deren centrale Klarheit man vergleicht: da dann im Fall der Gleichheit dieser centralen Klarheit aus dem 300. §. die Proportion

$$S : s = \frac{\beta^2}{\gamma^2} : \frac{b^2}{g^2}, \text{ oder } S : s = \beta^2 . g^2 : b^2 . \gamma^2$$

ihre Anwendung findet.

305. §.

103F Noch einfacher wird dies Instrument, wenn man es aus zweyen Röhren GA, GB, die an der innern Fläche schwarz seyn müssen, bey FG vermittelst eines Gewindes zusammensetzt, so daß man die Axen beyder Röhren unter einem gefälligen Winkel gegen einander neigen, und jede derselben gegen ein gefälliges Object richten kann. Bey C und D sind ein paar kleine kreisrunde, mit weissem Papier oder mattem Glase bedeckte Löcher, und die vordern Enden bey A und B haben kreisförmige Oefnungen, etwa von einem Zoll im Durchmesser, beyde von gleicher Grösse: auch muß die Axe einer jeden Röhre auf den Ebenen der kreisförmigen Oefnungen bey A und C in ihren Mittelpuncten senkrecht

recht seyn. Noch muß eine dieser Röhren AC so eingerichtet seyn, daß man sie nach Gefallen länger als die andre machen kann, und um deswillen wird das Stück EA bey E in das andre GE hineingeschoben.

Man richte nun die Röhre DB grade gegen dasjenige Object, welches den schwächsten Glanz hat, und hiernächst CA gegen dasjenige, welches am stärksten glänzt. Wofern nun beyde Objecte, wie hier vorausgesetzt werden muß, eine so große scheinbare Ausdehnung haben, daß das Auge in C oder D angenommen, keines von beyden durch die Oefnungen bey A oder B übersehen könnte, so wird C stärker als D erleuchtet seyn, wenn beyde Röhren gleich lang sind. Um also die Klarheit in C zu vermindern, verlängert man die Röhre CA, und sobald nun auf C und D gleichviel Erleuchtung fällt, verhält sich der Glanz oder die Klarheit beyder Objecte wie die Quadrate der Länge der Röhren.

Es sey nemlich HL ein Schnitt durch die Axe der Röhre, und AC stelle selbst die Axe vor, AL den Halbmesser der vordern Oefnung; so ist ACL der scheinbare Halbmesser des Objects, soweit es aus C übersehen werden kann: und wenn S der Glanz des Objects ist, so fällt auf C die senkrechte Erleuchtung $\pi S \sin ACL^2$. Setzt man nun $AC = a$, $AL = b$, so ist diese Erleuchtung $= \frac{\pi S \cdot b^2}{a^2 + b^2}$. Für das andre Object sey s, α, β, was hier S, a, b, sind, so fällt auf D die Erleuch- 104F 103F tung $\frac{\pi \, . \, s \, . \, \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$; und wenn beyde Erleuchtungen gleich sind, hat man $\frac{S \, . \, b^2}{a^2 + b^2} = \frac{s \, . \, \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Weil überdem $b = \beta$ ist, so erhält man $S : s = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} : \frac{1}{a^2 + b^2}$, oder $S : s = a^2 + b^2 : \alpha^2 + \beta^2$ beynahe $= a^2 : \alpha^2$.

306. §.

In solchen Fällen, wenn der Glanz des einen Objects den Glanz des andern sehr viel mahl übertrift, kann man auch ein Zerstreuungsglas auf ähnliche Art, wie im 303. §. das Sammlungsglas brauchen, um die durchfallende mit einer weissen Fläche senkrecht aufgefangene Erleuchtung zu schwächen. Das deutliche Bild *qr* liegt vor dem
81 F. Zerstreuungsglase BD, und die Strahlen fahren hinter demselben nach eben dem Gesetz auseinander, nach welchem sie hinter dem deutlichen Bilde des Sammlungsglases (74. Fig.) auseinander fahren. Der Raum *ef*, welchen alle Zerstreuungskreise mit einander gemein haben, das falsche Bild, (216. §.) ist gleichförmig erleuchtet, und wenn M die auf das Glas fallende Strahlenmenge bezeichnet, so ist die Erleuchtung dieses falschen Bildes $= \frac{M}{\pi \, . \, cs^2}$ oder $= \frac{M}{\pi \, . \, R^2}$, $cs = R$ gesetzt. Kann man nun $cs = R$ messen, welches sich wenigstens, so weit es hier erfordert wird, beynahe richtig bewerkstelligen läßt; (M. s. die am Ende des 303 §.

bey-

beygefügte Erinnerung,) so hat man die Erleuchtung $I = \frac{M}{\pi R^2}$, sobald M gehörig ausgedruckt ist. Alsdenn wird M vom Glanz S des leuchtenden Objects abhängen, und man vergleicht denselben mit dem Glanz eines andern leuchtenden Objects eben so, wie im 302 und 303 §. schon gewiesen ist.

307. §.

Herr Bouguer hat auf diese Art den Glanz der Sonne vermittelst des Glanzes einer Kerze mit dem Glanz oder der Klarheit des Mondes verglichen. Am 22 Sept. 1725 als die Sonne 31° hoch über dem Horizont war, ließ er ihr Licht in ein finsteres Zimmer durch eine kreisrunde Oefnung von 1 Linie im Durchmesser fallen, worin er ein Zerstreuungsglas gesetzt hatte. In einer Entfernung von 5 bis 6 Fuß vom Glase fing er das durchfallende Licht auf, da es sich dann in einen Kreis von 108 Linien im Durchmesser ausgebreitet hatte. Hier war also R = 54 Linien, und den Halbmesser der Oefnung $= b$, den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \alpha$ gesetzt, war die auf das Glas fallende Strahlenmenge $M = \pi b^2 . \pi S \sin \alpha^2$, und die Erleuchtung der Fläche, die das Licht auffieng $= \frac{\pi b^2 S \sin \alpha^2}{R^2}$. In einer Entfernung $d = 16$ Zoll ward dieselbe Ebene von einer Kerze eben so stark erleuchtet. Setzt man also den Glanz der Kerze $= s$, den Schnitt durch die Axe der conisch brennenden Flamme $= E^2$; so war $\frac{\pi b^2 S \sin \alpha^2}{R^2}$

=

$= \frac{E^2 . s}{d^2}$. In der darauf folgenden Nacht, als der Vollmond gleichfalls die Höhe von 31° erreicht hatte, ließ er das Mondlicht durch eben das Zerstreuungsglas fallen, und fing es mit derselben Fläche so nahe beym Glase auf, daß es nur einen Kreis von 8 Linien im Durchmesser einnahm. Es war also $\varrho = 4$ Linien, und wenn der Glanz des Monds $= \Sigma$ gesetzt wird, so war $\Sigma = \frac{\pi b^2 \Sigma \sin \alpha^2}{\varrho^2}$, weil der scheinbare Durchmesser der Sonne und des Monds gewöhnlich beynahe gleich groß sind. Zugleich ward dieselbe Ebene von der vorhin gebrauchten Kerze in einer Entfernung $\delta =$ 50 Fuß = 600 Zoll eben so stark erleuchtet, also hatte man $\frac{\pi b^2 \Sigma \sin \alpha^2}{\varrho^2} = \frac{E . s}{\delta^2}$. Das giebt nun

$$S : s = \frac{E^2}{d^2} : \frac{\pi b^2 \sin \alpha^2}{R^2}$$

$$s : \Sigma = \frac{\pi b^2 \sin \alpha^2}{\varrho^2} : \frac{E^2}{\delta^2}$$

$$\text{also } S : \Sigma = \frac{1}{d^2 . \varrho^2} : \frac{1}{\delta^2 . R^2}$$

$$\text{oder } S : \Sigma = \delta^2 . R^2 : d^2 . \varrho^2.$$

Demnach ist vermöge des Versuchs $S : \Sigma = 600^2 . 54^2 : 16^2 . 4^2 = 75^2 . 27^2 : 4^2 = 4100625 : 16$, oder $S : \Sigma = 256289 : 1$. Versuche dieser Art sind, wie leicht zu erachten ist, so sicher nicht, daß bey Wiederhohlung derselben nicht merklich verschiedene Zahlen sollten gefunden wer-

den,

den, wie denn auch die Verschiedenheit der scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Monds oft nicht so ganz unbeträchtlich ist, daß bey genauerer Rechnung nicht darauf Rücksicht genommen werden müste. Setzt man den scheinbaren Halbmesser des Monds $= \beta$, so ist eigentlich $S : \Sigma = \delta^2 . R^2 . \sin \beta^2 : d^2 . \varrho^2 . \sin \alpha^2$. Als im Julius des Jahrs 1725 der Vollmond ein fiel, fand Herr Bouguer $S = 284089 . \Sigma$, und im August $S = 331776 . \Sigma$; noch einander mahl $S = 302500 . \Sigma$: er schließt daraus, man könne als eine Mittelzahl annehmen, der Glanz der Sonne sey 300000 mahl grösser, als die Klarheit des Vollmonds. Man wird nach angestellter Vergleichung wahrnehmen, daß diese Zahlen von den im 293 und 295 §. gefundenen nicht gar sehr verschieden sind: diesemnach dürfte die dortige Voraussetzung $A = \frac{1}{5}$ auch nicht gar sehr unrichtig seyn, wiewohl diese Zahl doch nur so anzusehen wäre, daß sie die mittlere Weisse der uns zugekehrten Mondsfläche ausdrücke, weil selbige nicht überall einerley Weisse hat, wie die Flecken beweisen.

Der XXIII. Abschnitt.

Von der scheinbaren Klarheit beym undeutlichen Sehen.

308. §.

Eine Sache wird deutlich gesehen, wenn ihre äussere Gränzen vollkommen und wohl bestimmt

stimmt erscheinen, und ihre verschiedenen Theile, wofern sie nicht zu klein sind, nach ihrer verschiedenen Gestalt, Grösse und Farbe sich gut unterscheiden lassen. Ohne Zweifel siehet man in diesem Verstande deutlich, wenn alle Strahlen, die von einerley Punct der Sache ausgehen, sich wieder in einem einzigen empfindlichen Punct der Netzhaut vereinigen: und wofern bey einiger Undeutlichkeit des Bildes auf der Netzhaut auch die Empfindung des Sehens gleichfalls undeutlich ist; so giebt es bey einerley Beschaffenheit des Auges nur eine bestimmte Entfernung des Gegenstandes vom Auge, worin derselbe recht deutlich gesehen werden kann. Bey dem allen lehrt die Erfahrung, daß wir einerley Sache in ziemlich verschiedener Entfernung vom Auge ohne sehr merkliche Veränderung der Deutlichkeit sehen. Dies hat bey einigen die Vermuthung erreget, es mögten vielleicht die Häute, welche die Capsel der Krystallinse und die processus ciliares ausmachen, die bewundernswürdige Eigenschaften haben, daß sie durch ihre mehrere oder mindere Ausdehnung der Linse nach Erfordern eine plattere oder mehr erhabene Gestalt geben, und dadurch zuwege bringen können, daß der verschiedenen Entfernung des Gegenstandes ungeachtet, doch die Entfernung des deutlichen Bildes dieselbe bleibe: auch hat man vermuthet, die ganze Krystallinse könnte vielleicht nach Erfordern beym entlegenen Gegenstande sich der Netzhaut nähern, beym nähern Gegenstande aber sich davon weiter entfernen. Bey dem allen aber läßt sich aus folgenden Versuchen schliessen, daß eben nicht die vollkommenste

Ver-

Vereinigung der Lichtstrahlen auf der Netzhaut zum deutlichen Sehen erfordert werde.

309. §.

Man nehme ein Titelbladt von einem Buche, worauf sich Schrift von drey- oder viererley Grösse befindet. Dies Buch bringe man Anfangs in eine solche Entfernung vom Auge, daß man jede dieser Art Schriften ohne Anstrengung des Auges vollkommen deutlich siehet, so kann man voraussetzen, daß in dieser Entfernung jeder auf den Stern im Auge fallende Strahlenkegel, der von einem Punct eines Buchstaben kommt, seinen Vereinigungspunct auf der Netzhaut habe. Hiernächst nähere man das Buch dem Auge, oder entferne es dem Auge soweit, daß die kleinere Schrift unleserlich zu werden anfängt, so wird man doch die grössere noch ohne sonderliche Anstrengung des Auges ganz gut lesen können.

Diesemnach kann man mit Hn. Jurin (in der oben im 237. §. schon angeführten Abhandlung: vom deutlichen und undeutlichen Sehen) das **vollkommen deutliche vom unvollkommen deutlichen Sehen** unterscheiden. Wenn man Kürze halber lezteres schlechthin das **deutliche Sehen** nennt, so beweiset die eben angeführte Erfahrung, daß selbiges beydes zugleich auf die Entfernung und Grösse der sichtbaren Sache beruhe; so wie zum **vollkommen deutlichen** Sehen nur eine bestimmte Entfernung vom Auge erfordert wird, damit sich alle zu einerley auffallenden Lichtkegel gehörige Strahlen genau wieder in einerley Punct der Netzhaut sammlen: der Gegenstand mag übrigens groß oder klein seyn, nur daß er nicht wegen seiner

Klei-

Kleinigkeit ganz unempfindlich werde. Alle Sachen, sie mögen groß oder klein seyn, erscheinen in eben der Entfernung vollkommen deutlich, worin eine einzige so erscheint. Weil aber das unvollkommen deutliche Sehen von der Grösse und Entfernung der betrachteten Sache zugleich abhängt, so kann von zweyen ungleich großen und gleich weit entfernten Sachen die eine deutlich, die andre undeutlich erscheinen. Vermöge der Erfahrung giebt es bey jeder Grösse des sichtbaren Objects eine kleinste und eine gröste Entfernung, wobey die Empfindung anfängt undeutlich zu werden, falls die Entfernung des Objects die eine oder die andre dieser Gränzen überschreitet.

310. §.

Soviel ist man indessen berechtiget anzunehmen, daß die Empfindung nicht vollkommen deutlich sey, wenn das Bild der empfundenen Sache auf der Netzhaut im Auge nicht vollkommen deutlich ist. Ist dies Bild bey nahe gelegenen Sachen deutlich, so wird dasselbe bey weit entlegenen Sachen undeutlich seyn; und das aus der Ursache, weil das deutliche Bild entlegener Sachen der Krystallinse näher liegt als die Netzhaut. Die Strahlen, welche in den Puncten des deutlichen Bildes sich vereinigen, fahren hinter demselben auseinander, und breiten sich auf derselben in Zerstreuungskreise aus, wodurch ein undeutliches Bild von der Art entstehet, wie es die 78ste und 79ste Figur vorstellt, womit der 213 und 214 §. zu vergleichen ist. Diese Beschaffenheit hat es mit Augen, die man kurzsichtige nennt, so wie es mit weit-

sichtigen

sichtigen Augen im Gegentheil folgende Bewandniß hat.

Das deutliche Bild eines weit entlegenen Gegenstandes fällt auf die Netzhaut: wenn aber der Gegenstand dem Auge näher rückt, so werden die Kegel der hinter der Krystallinse zusammen gehenden Strahlen länger, und ihre Vereinigungspuncte, die das deutliche Bild ausmachen würden, fallen hinter der Netzhaut. Auf der leztern also breitet sich das zu jedem dieser Strahlenkegel gehörige Licht in einen Zerstreuungskreis aus, und es entsteht ein undeutliches Bild von der Art, als die 75, 76, oder 77ste Figur vorstellt, und worüber im 207 = 212 §. nähere Untersuchungen sind angestellet worden.

311. §.

Die Grösse einer Sache beurtheilen wir aus der Grösse ihres optischen Winkels POQ am Auge, 87 F.
und diesem ist zugleich der Winkel pOq proportional. Wenn man sich vorstellt, daß das Bild undeutlich sey, und daß die Strahlen, welche sich in q sammlen sollten, sich in einen Zerstreuungskreis ausbreiten, dessen Halbmesser qr ist; so kann pOr der zum undeutlichen Bilde gehörige optische Winkel heissen. Wofern nun die scheinbare Grösse einer undeutlich gesehenen Sache allein von der Grösse des erleuchteten Theils der Netzhaut abhängt, so scheint es, daß man annehmen könnne: diese scheinbare Grösse sey dem Winkel pOr proportional. Herr Jurin setzt diese Voraussetzung bey seinen Untersuchungen über das undeutliche Sehen zum Grunde, und ich werde sie bis auf fernere Prüfung mit ihm annehmen, weil es

noch darauf ankommen wird, ob alle Erscheinungen beym undeutlichen Sehen sich der Erfahrung gemäß daraus erklären lassen.

312. §.

Gehet man nun bis auf diejenigen Untersuchungen zurück, welche im 206 und f. §. §. über die Erleuchtung des undeutlichen Bildes einer durchsichtigen Linse sind angestellet worden; so ist zuförderst
74 F. zu bemerken, daß die Halbmesser $C\pi$, CI, CS, CE, des projicirten Bildes, des falschen Bildes, des Zerstreuungskreises, und des ganzen undeutlichen Bildes, sich wie die Winkel $CK\pi$, CKI, CKS, CKE verhalten, wenn diese Winkel sehr klein sind: wie sie allemahl seyn werden, wenn nicht allein der betrachtete Gegenstand, sondern auch der Durchmesser BD der Linse selbst sehr klein ist. Man setze also wie oben im 206. u. f. §. §. $KC = a$, nehme aber nun die Winkel $CK\pi = \frac{C\pi}{a} = r$, $CKS = \frac{CS}{a} = \varrho$ an, und drücke diese Winkel in Minuten und Secunden aus; so ist auch $r = \frac{q}{g}$, und $\varrho = \pm \frac{(g-a)\,b}{a\,.\,g}$. Wird ferner $CKI = s$ gesetzt, so bleibt $s = \pm (\varrho - r)$, so wie $CKE = \varrho + r$. Wenn das r in der eben angezeigten Bedeutung gebraucht wird, so ist r zugleich der scheinbare Halbmesser des betrachteten Objects, und in dieser Rücksicht kann man dies r mit H. Jurin den Halbmesser des wahren Bildes nennen, wie denn auch $C\pi$, $p\,r$, als kleine zum Mittelpunct K gehörige

hörige Kreisbogen betrachtet, gleich viele Minuten und Secunden fassen. Uebrigens braucht Hr. Jurin den Ausdruck: Zerstreuungskreis, auch so lange $\varrho < r$ ist, den Ausdruck: falsches Bild in eben der Bedeutung, die oben im 207. und 208. §. festgesetzt ist; nur versteht er nicht den ganzen Ring, der das gleichförmig erleuchtete falsche Bild umgiebt, und dessen Erleuchtung vom Umkreis des falschen Bildes bis an die äussere Gränze des ganzen undeutlichen Bildes abnimmt, wenn er den Ausdruck: ringförmiger Halbschatten, braucht.

So lange nemlich $\varrho < r$ mithin des falschen Bildes Halbmesser $= r - \varrho$ ist, wie in der 77 und 78 Fig., so lange wird die Breite LE des Ringes zwischen dem Umkreis des falschen und des ganzen undeutlichen Bildes durch den Umfang des wahren Bildes in π halbirt; und H. Jurin nennt den äussersten Theil zwischen dem Umfang des wahren Bildes und die äusserste Gränze des undeutlichen Bildes den ringförmigen Halbschatten. Ich sehe nicht, aus welchem Grunde, weil der innere eben so breite Ring zwischen dem Umfang des falschen und wahren Bildes würklich eben sowohl im Halbschatten liegt, als der äussere.

313. §.

Wird $\varrho > r$, wie in der 79 Fig., mithin des falschen Bildes Halbmesser $= \varrho - r$; so nennt H. Jurin das ein mattes falsches Bild, was bisher schlechthin das falsche Bild geheissen hat. Die Ursache werde ich unten anführen, hier bemerke ich nur, daß H. Jurin nun abermahl die Fälle $\varrho - r < r$, und $\varrho - r > r$, unterscheidet. So lange

$\varrho - r < r$ ist, so lange rechnet er den Ring zwischen des falschen und wahren Bildes Umkreis, dessen
79 F. Breite $F\pi$ nun $= r - (\varrho - r) = 2r - \varrho$ ist, nicht mit zum Halbschatten: mithin ist bey ihm in beyden betrachteten Fällen des Halbschattens Breite $= \varrho$. Wird dagegen $\varrho - r > r$; so übertrift das falsche Bild das wahre so, wie es die 75ste Fig. vorstellt: nun versteht H. Jurin durch den Halbschatten den ganzen Ring zwischen dem Umfang des falschen und des ganzen undeutlichen Bildes, dessen Breite $= 2r$ ist. (M. s. H. Kästners Uebers. von Smiths Optik, 485 - 488. S.)

314. §.

Was Herr Jurin hier das wahre Bild nennet, der kleine Bogen $\pi\kappa$, oder $\varepsilon\zeta$, $\omega\sigma$, (74 Fig.) muß nicht mit dem vollkommen deutlichen Bilde qr verwechselt werden. Es kann sonst der Nahme: das wahre Bild zum Mißverstand Anlaß geben, und deswegen habe ich oben im 207 §. den Kreis $\pi\kappa$, oder $\varepsilon\zeta$, $\omega\sigma$, lieber das projicirte Bild nennen wollen. Es ist wahr, was H. Jurin a. a. O. num. 9 am Ende sagt: (ich verstehe die Nummern des Kästnerischen Auszugs aus Jurins Abhandlungen) jeder Punct innerhalb des Kreises IL (77 Fig. oder EF 78 Fig.) wenn man ihn als den Mittelpunct eines darum beschriebenen Zerstreuungskreises betrachtet, bekömmt Licht von jedem Punct innerhalb seines Zerstreuungskreises, und theilt jedem dieser Puncte eben soviel Licht wieder mit; es ist aber zweydeutig, wenn daraus geschlossen wird: also wird er (jeder Punct innerhalb des Kreises IL oder EF, 77. 78 Fig.) gleich so stark erleuch-

erleuchtet, als behielte er sein Licht allein, und bekäme kein fremdes, wie bey einem vollkommen deutlichen Bilde geschehen würde. Eben so zweydeutig ist die Erklärung num. 10 wenn es heist: diesen Theil des wahren Bildes, der durch die Zerstreuung kein Licht verliert, sondern eben so stark, und durchaus gleich stark erleuchtet ist, als wenn das Sehen vollkommen wäre, heisse ich das falsche Bild. Was hier in der 78 Fig. $\pi\kappa$, EF, ist, das ist in der 74sten $\omega\sigma$, $\varphi\psi$; die Ebene uv stellt die Netzhaut vor, das Auge ist kurzsichtig und das Object zu weit entfernt, als daß es deutlich gesehen werden könnte. Wäre dagegen das Auge weitsichtig, so würden die Kegel BrD, BpD, BqD, länger seyn, ihre Spitzen würden in $\omega\sigma$ fallen, oder $\omega\sigma$ würde das deutliche Bild seyn, und dies wäre nun eben so stark erleuchtet, als vorhin $\varphi\psi$ erleuchtet war. Ohne zweifel ist dies die Meinung, und so hat alles seine Richtigkeit. Wenn aber in dem weitsichtigen Auge alles übrige mit dem vorigen kurzsichtigen einerley, die Entfernung der Netzhaut von der Krystallinse aber kürzer wäre, so daß für dasselbe qr auf der Netzhaut läge, so wäre für dies Auge das deutliche Bild qr stärker erleuchtet, als das falsche $\varphi\psi$ für jenes kurzsichtige Auge. Man vergleiche den 213 §., und erinnere sich, daß die Erleuchtung des vollkommen deutlichen Bildes $I = \frac{M}{\pi q^2}$ sey, so wie die Erleuchtung des falschen Bildes $\varphi\psi$, oder $Y = \frac{M}{\pi r^2}$ $= \frac{g^2 M}{\pi a^2 q^2}$ ist.

315. §.

Ich habe im 312 §. bemerkt, daß Herr Jurin die Fälle $\varrho < r$ und $\varrho > r$ unterscheide, daß er im ersten Fall den gleichförmig erleuchteten Kreis, wozu der Halbmesser $r - \varrho$ gehört, schlechthin das falsche Bild, im zweyten Fall aber den gleichförmig erleuchteten Kreis, wozu der Halbmesser $\varrho - r$ gehört, ein **mattes falsches Bild** nenne. Was zur Rechtfertigung dieses Sprachgebrauchs a. a. O. 487 S. num. 14. 15. angeführt wird, ist nur nicht recht deutlich, und wenn es damit seine Richtigkeit haben soll, so muß es, wie ich dafür halte, so verstanden werden. Der Kreis *ef* (74 Fig.) ist so stark erleuchtet, als *st* erleuchtet wäre, wenn alle Zerstreuungskreise damit zusammen fielen: mithin ist diese Erleuchtung $= \frac{M}{\pi \cdot cs^2}$. Das Auge ist kurzsichtig, der Gegenstand zu weit entfernt, als daß er vollkommen deutlich gesehen werden könnte, und *il* stellt die Netzhaut vor. Hätte das Auge bey eben der Entfernung der Netzhaut vom Auge diejenige Einrichtung, welche zum vollkommen deutlichen Sehen erfordert wird, so würden die Spitzen r, p, q, der Strahlenkegel BrD, BpD, BqD, in Θ, c, Δ, liegen, und der Kreis $\Delta\Theta$ wäre das deutliche Bild, so wie die Erleuchtung desselben $= \frac{M}{\pi \cdot c\Delta^2}$. Weil aber $cs > c\Delta$, so ist jene Erleuchtung kleiner, als diese seyn würde.

316. §.

Beym undeutlichen Sehen wird das Auge von dem gleichförmig erleuchteten Kern des Bildes auf der

der Netzhaut eben so gerührt, als wenn ein in allen Elementen gleich stark glänzendes kreisförmiges Object von einem scheinbaren Durchmesser so groß, als der Durchmesser des falschen Bildes in Minuten und Secunden ausgedrückt, von eben dem Auge deutlich gesehen würde: von dem Halbschattenringe auf der Netzhaut aber eben so, als wenn jenes Object noch mit einem Ringe umgeben wäre, dessen Glanz gegen den äussern Umfang zu abnähme. Wenn also gleich das Object für sich überall gleich stark glänzt, so muß es doch so scheinen, als wäre nur ein kreisförmiger Theil desselben überall gleich stark glänzend, die Klarheit des übrigen Ringes aber muß gegen den äussern Umfang bis auf nichts abzunehmen scheinen. Drückt man die beyden Halbmesser r und ϱ in Minuten und Secunden aus, so wird $r + \varrho$ der Halbmesser des Objects zu seyn scheinen, das eigentlich unter dem halben optischen Winkel r gesehen wird. Weil jedoch der Halbschattenring ganz nahe bey seinem äussern Umfang sehr schwach erleuchtet ist; so kann es seyn, daß er daselbst nicht empfindlich genug bleibt, und daß das Object unter einem Halbmesser gesehen wird, der nicht völlig $= r + \varrho$ ist.

317. §.

Hat das Object einen sehr starken Glanz, so ist der Halbschatten in der Nähe seines äussern Randes empfindlicher, als wenn der Glanz des Objects schwächer wäre: denn in gegebener Entfernung vom Mittelpunct des Ringes, wenn alles übrige gleich ist, verhält sich die Erleuchtung wie der Glanz des Objects selbst. Zwey ungleich stark glänzende Objecte also, die soweit entfernt sind, daß sie beym vollkommen deutlichen Sehen einen gleichen scheinbaren Halbmesser hätten, würden doch beym undeutlichen Sehen, wofern alles übrige gleich bliebe, ungleich groß, das stärker glänzende grösser als das schwächer glänzende, zu seyn scheinen.

Wenn man aber hiebey zur Betrachtung der 74 Fig. zurück geht, so nimmt man leicht wahr, daß die Grösse des Zerstreuungshalbmessers von der Oefnung BD der Linse abhänge, und in einerley Entfernung KC von der Linse dem Halbmesser der Oefnung proportional sey. Wie nun die Oefnung des Sterns im Auge veränderlich, bey stärkerer Erleuchtung des Bildes kleiner, bey schwächerer Erleuchtung grösser ist; so erhellet, daß bey gleicher Entfernung gleich grosser und ungleich stark glänzender Objecte, der undeutlich gesehene Halbmesser des stärker glänzenden Objects um deswillen kleiner sey als der Halbmesser des schwächer glänzenden, weil der stärkere Glanz die Oefnung des Sterns im Auge, mithin zugleich den Zerstreuungshalbmesser vermindert.

318. §.

Bey den meisten Personen hat das Auge die Einrichtung, welche zum vollkommen deutlichen Sehen bey mittelmäßiger Entfernung des betrachteten Objects erfordert wird: deswegen müssen sehr weit entfernte Objecte, dergleichen die Gegenstände am gestirnten Himmel sind, undeutlich gesehen werden. Die Fernröhre, wovon die Dioptrik umständlicher handeln wird, zeigen ihren deutlich gesehenen scheinbaren Durchmesser: könnte man den

undeut-

undeutlich gesehenen scheinbaren Durchmesser auch messen, so liesse sich daraus der Durchmesser oder Halbmesser des Zerstreuungskreises finden. Wenn nemlich r und ϱ ihre bisherige Bedeutung behalten, und δ den undeutlich gesehenen scheinbaren Halbmesser bezeichnet; so ist $\delta = r + \varrho$, mithin könnte $\varrho = \delta - r$ aus r und δ gefunden werden. Hr. Jurin a. a. O. n. 20. muthmaßet, daß bey Augen, die man für gut hält, der Zerstreuungshalbmesser 2 Minuten betrage, wenn sie Gegenstände am gestirnten Himmel betrachten. Hätte dies seine Richtigkeit, so würde man aus dem deutlich gesehenen scheinbaren Durchmesser der himmlischen Körper ihren undeutlich gesehenen scheinbaren Durchmesser leicht finden: auch würde sich der Durchmesser des gleichförmig erleuchteten Kerns vom undeutlichen Bilde auf der Netzhaut daraus ergeben, und unter einem eben so grossen scheinbaren Durchmesser müste der mittlere Theil des himmlischen Körpers einerley Glanz zu haben scheinen.

319. §.

Wäre demnach der deutlich gesehene scheinbare Durchmesser des Vollmonds 32 Minuten, so würde sein undeutlich gesehener scheinbarer Durchmesser 36 Minuten, der Durchmesser des gleichförmig glänzenden Kerns 28 Minuten betragen. Wegen der Schwäche der Erleuchtung gegen den äussern Umfang des Halbschattens würde der empfindliche Durchmesser jedoch nicht völlig 36 Minuten betragen. Der Vollmond zeigt indessen diese Erscheinung nicht, der Rand erscheint nicht schwächer erleuchtet, als die übrigen Stellen näher beym Mittelpunct. Hr. Jurin führt einige Gründe an, woraus nach seiner Meinung die Abweichung der würklichen Erscheinung des Vollmonds von derjenigen, so jener Voraussetzung gemäß zu erwarten wäre, erklärt werden könne. Mich dünkt aber, die Ursache könnte wohl vornemlich diese seyn, weil wegen der schon ziemlich starken Erleuchtung, die der Vollmond ins Auge schickt, der Stern im Auge bey Betrachtung desselben nur eine sehr kleine Oefnung hat, weswegen also auch der Zerstreuungshalbmesser keine beträchtliche Grösse haben kann. (317. §.) Gesetzt also, dieser Halbmesser betrüge, wie H. Jurin annimmt, bey Betrachtung eines Planeten oder eines Fixsterns zwey Minuten, so wird er bey Betrachtung des Vollmonds gewiß sehr viel kleiner seyn, und vielleicht so klein, daß die äussere Hälfte der Breite des Halbschattenringes nicht mehr empfunden werden kann. Betrüge der Zerstreuungshalbmesser etwa nur $\frac{2}{3}$ einer Minute, so würde vermöge des 20 §. der Optik wegen der schwachen Erleuchtung des äussern Halbschattenringes die Erscheinung eines äussern Halbschattens um den Vollmond wegfallen. Der innere Halbschatten hätte nur eine eben so geringe Breite, seine Helligkeit nimmt von der Helligkeit des Kerns durch unmerkliche Stuffen ab, die das Auge sobald nicht unterscheidet, und hiezu kommt noch der Vortheil, daß dem äussern Rande die Vergleichung mit dem darum befindlichen dunklen Himmel ein noch helleres Ansehen giebt. Auf solche Art würde der scheinbare Durchmesser des Mondes mit bloßen Augen gesehen von demjenigen, welchen die Fernröhre zeigen, nicht merklich verscheiden seyn: auch

könnten

könnten die alten Sternforscher, und besonders Hevel, deren Augen ohnehin sehr dazu gewohnt waren, weit entlegene Sachen deutlich zu sehen; gar wohl den Durchmesser des Mondes mit blossen Augen gemessen, sehr nahe eben so groß gefunden haben, als ihn die Fernröhre zeigen.

Sehr kurzsichtigen Personen scheint indessen der Vollmond merklich grösser, als solchen, die scharf und deutlich in die Ferne sehen, und es ist wohl kein Zweifel, daß sich denselben nicht ohngefehr eine solche Erscheinung darstelle, wie den Schlüssen des 318. §. gemäß ist.

320. §.

Wenn man in einer sonst heitern vom Mondenlicht aber nicht erleuchteten Nacht einen Planeten, oder einen Fixstern betrachtet, so empfängt das Auge nur eine sehr geringe Erleuchtung, und der Kern hat fast seine gröste Oefnung: sind also die übrigen Umstände einerley, so ist der Zerstreuungshalbmesser ohne Zweifel beträchtlich grösser, als bey Betrachtung des Vollmonds, und er könnte wohl, wie H. Jurin annimmt, zwey Minuten betragen. Wie nun unter den Planeten keiner ist, dessen wahrer scheinbarer Halbmesser auch in seiner kleinsten Entfernung von der Erde eine Minute beträgt, und die Fixsterne durch die besten Fernröhre nur wie helle Puncte erscheinen, so fällt von denselben auf die Netzhaut ein mattes falsches Bild, daß bey den Fixsternen dem ganzen undeutlichen Bilde wenigstens ungemein nahe gleich ist. Für die Fixsterne hätte man nemlich $\varrho = 2' = 120''$

und

und gewiß $r < 1''$, also auch $\varrho - r$ fast $= 120''$. H. Jurin nimmt an, in der mittlern Entfernung von der Erde sey

für den Jupiter
$$2r = 38'',\ 2\varrho = 240'',\ \text{das giebt}$$
$$2\varrho - 2r = 202'',\ \text{und}\ 2\varrho + 2r = 278'';$$

für den Mars
$$2r = 6'',\ 2\varrho = 240'',\ \text{also}$$
$$2\varrho - 2r = 234'',\ 2\varrho + 2r = 246'';$$

für die Venus
$$2r = 18'',\ 2\varrho = 240'',\ \text{mithin}$$
$$2\varrho - 2r = 222'',\ 2\varrho + 2r = 258''.$$

321. §.

Hat es mit allen diesen Voraussetzungen seine Richtigkeit; so fließt daraus noch diese Folge. Wenn zwey Fixsterne einander so nahe stehen, daß ihre scheinbare Entfernung dem Durchmesser des Zerstreuungskreises gleich ist, so müssen beyde einander zu berühren scheinen, so wie überhaupt ihre Entfernung von einander, der Bogen zwischen ihren Mittelpuncten seyn wird, um den Durchmesser des Zerstreuungskreises vermindert. Ist der Abstand beyder Fixsterne von einander kleiner, als der Zerstreuungsdurchmesser, mithin nach Jurins Bestimmung kleiner, als 4 Minuten; so sehen beyde wie ein einziger Stern aber heller aus, als einer allein aussehen würde, weil ihre undeutlichen Bilder zum Theil zusammen fallen. Dies würde also eine Methode an die Hand geben, den Zerstreuungshalbmesser zu finden, wenn man den Abstand zweyer

Fix-

Fixsterne, die einander zu berühren scheinen vermittelst des Fernrohrs und anderer in der Astronomie zu beschreibenden Verrichtungen suchte: der gefundene Abstand wäre der gesuchte Zerstreuungsdurchmesser. Umständliche Anwendungen hievon auf die Fixsterne und Planeten gehören in die Astronomie: hier musten indessen die optischen und photometrischen Gründe davon vorgetragen werden.

322. §.

So sinnreich übrigens H. Jurins Vortrag über die Erscheinungen des undeutlichen Sehens ist; so wenig scheinen doch seine Voraussetzungen demjenigen, was bekannte Erfahrungen lehren, völlig gemäß zu seyn. Die Formul für den Zerstreuungshalbmesser war $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$, (213. §.) und in derselben ist b der Halbmesser der Oefnung des Sterns im Auge, g die Länge der Axe der Strahlenkegel hinter der Krystallinse als ihrer Grundfläche, aus deren Spitzen das deutliche Bild bestehet, $a - g$ der Abstand der Netzhaut von dem deutlichen Bilde, oder die Länge der Axe der den vorigen entgegen gesetzten Strahlenkegel, wovon jeder einen Zerstreuungskreis auf der Netzhaut zur Grundfläche hat. Diese erwehnten drey Grössen sind für alle Fixsterne einerley; mithin müste auch ϱ für alle einerley seyn, und das heist: alle Fixsterne müsten gleich groß zu seyn scheinen. Es ist aber eine sehr bekannte Sache, daß die Fixsterne, eben wegen ihrer sehr merklich verschiedenen scheinbaren Grösse, schon von den ältesten Astronomen in sechs bis sieben

ben Classen nach der Ordnung ihrer scheinbaren Grösse sind eingetheilt worden. Noch jetzt unterscheidet man aus demselben Grunde Sterne erster, zweyter Grösse, und so ferner bis zur sechsten und siebenden Grösse von einander. Es muß also entweder für Sterne die zu verschiedenen von den erwehnten Classen gehören, der Zerstreuungshalbmesser verschieden seyn; oder es muß beym undeutlichen Sehen noch ein anderer vom Hn. Jurin nicht bemerkter Umstand hinzu kommen, aus welchem sich diese Verschiedenheit in der scheinbaren Grösse der Fixsterne erklären läßt.

323. §.

Herr **Lambert** (Photom. Part. VI. Cap. II. §. 117. sqq. pag. 495. sqq.) hebt diese Schwierigkeit auf folgende Art. Er nimmt an, das undeutliche Bild auf der Netzhaut sey zwar für alle Fixsterne gleich groß, und dem Zerstreuungskreise gleich, es sey aber nicht für alle in seinem ganzen Umfange empfindlich. Deswegen unterscheidet er das erleuchtete Bild des Fixsterns von dem **empfindlichen** Bilde desselben, da dann das letztere für verschiedene Fixsterne, wegen der Verschiedenheit ihres Glanzes und der verschiedenen Lebhaftigkeit, womit das von ihnen ins Auge geschickte Licht die Netzhaut und ihre Fibern rührt, gar wohl verschieden seyn könnte, wenn gleich das erste für alle gleich groß wäre. Es könnte wohl seyn, daß diejenigen Fibern und Nervenfäserchen der Netzhaut, welche das erleuchtete Bild zunächst umgeben, wegen ihrer Verbindung unter einander mit gereizt werden, und daß dadurch die Empfindung

dung einer mehrern Grösse des betrachteten Objects veranlasset wird, als dem erleuchteten Bilde allein gemäß wäre. Bey lebhafterm Lichte könnte also wohl der Umfang des empfindlichen Bildes grösser als beym schwächern Licht seyn, wenn letzteres die Fibern der Netzhaut nicht so lebhaft rührt. Hiernach würden also sowohl die Sätze des 321 §. als auch andere Folgen, die H. Jurin aus seinen Voraussetzungen herleitet, zu berichtigen seyn. Wie aber bey verschiedenen Personen die Beschaffenheit der Augen sehr verschieden ist, so wird doch fast jeder Beobachter denselben Fixstern unter einer eigenen scheinbaren Grösse sehen, und es läßt sich für die Grösse des Halbmessers des erleuchteten so wenig, als des empfindlichen Bildes etwas gewisses festsetzen.

Der XXIV. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Schwächung des Lichts in durchsichtigen Massen.

324. §.

Wenn das Licht auf eine durchsichtige Masse fällt, so hängt die Menge des zurückgeworfenen Lichs nicht allein von der Dichtigkeit dieser durchsichtigen Masse, sondern zugleich von der Dichtigkeit derjenigen Masse ab, aus welcher das Licht auf jene auffällt. Es scheint daß diese mehrere oder mindere Zurückwerfung des Lichts von eben

eben den Ursachen herrühre, welche die Brechung des in die Masse eindringenden Lichts verursachen, denn die Versuche lehren, daß mit einer stärkern Brechung des Lichts, auch eine stärkere Zurückwerfung verbunden ist, als mit einer geringern Brechung. Wofern aber eben die Ursachen, welche die Brechung des Lichts bewürken, auch die Zurückwerfung zu wege bringen, so wird, falls alles übrige einerley bleibt, auch die Menge des zurückgeworfenen Lichts einerley bleiben, es mag die Masse, welche es zurück wirft, das hineindringende Licht mehr oder weniger zerstreuen, sie mag mehr oder weniger durchsichtig seyn, wenn sich nur ihre übrige Beschaffenheit nicht ändert.

Herr Lambert füllte ein irdenes inwendig schwarz glasürtes Gefäß mit dem klärsten Wasser, ein anderes Gefäß von eben der Art aber mit recht schwarzer Dinte. Er brachte beyde Gefäße unter den freyen Himmel, betrachtete das Bild desselben, in beyden Gefäßen, und fand dasselbe von gleicher scheinbaren Klarheit. Eben den Versuch wiederhohlte er zur Nachtzeit, und betrachtete in beyden Gefäßen das Bild einer weissen Wand, die er mit einem davon etwas entfernten Licht erleuchtet, und wobey er alles so eingerichtet hatte, daß die Einfalls- und Zurückwerfungswinkel auf den Flächen beyder flüßigen Massen einerley Grösse erhielten. Beyde Bilder hatten wiederum eine gleiche scheinbare Klarheit. (Photom. P. II. C. I. §. 328.) Die Gefäße musten um deswillen inwendig eine schwarze Fläche haben, weil sonst der weisse Grund durch das klare Wasser durchgeschienen, das daher rührende Licht sich mit dem Licht, was das Bild ins Auge schickte,

schickte, vermischt, und es klärer gemacht hätte, als es die Zurückwerfung allein machte.

325. §.

Bey dergleichen scheinbaren Klarheit war also zugleich die würkliche Klarheit beyder Bilder einerley, und jeder Punct des einen Bildes schickte soviel Licht ins Auge, als der damit zusammengehörige Punct des andern Bildes. Weil nun für beyde auch die auffallende Strahlenmenge einerley war, so hatte für beyde Massen die zurückgeworfene Lichtmenge zur auffallenden einerley Verhältniß, obgleich die eine Masse sehr durchsichtig, die andre völlig undurchsichtig war. Der in der Dinte aufgelösete Vitriol, mogte die Brechung des Lichts in derselben wohl etwas vermehren, weswegen der angenommenen Regel gemäß, auch die Zurückwerfung von der Dinte stärker, als von dem klaren Wasser seyn muste; es war aber der Unterschied für das Auge unempfindlich, wie denn auch dadurch die brechende Kraft der Dinte nur um ein geringes vergrössert ward.

Es scheint, daß gegen den Schluß nichts erhebliches einzuwenden sey: es werde eben das von allen Graden der Undurchsichtigkeit gelten, was von den beyden äussersten gilt. Diesemnach wird bey einerley Einfallswinkel und gleicher auffallenden Lichtmenge das Wasser gleichviel Licht zurück werfen, es mag so undurchsichtig seyn, als es wolle. Die Rede ist hier, wie man leicht siehet, von dem spiegelartig zurückgeworfenen Licht, und die Menge desselben hängt, vermöge des Versuchs, von der Undurchsichtigkeit der zurückwerfenden Masse nicht ab.

326. §.

Man erinnere sich nun wieder an dasjenige, was von der dreyfachen Zertheilung des auf eine durchsichtige Masse fallenden Lichts im 195 bis 197 §. vorgetragen ist, und halte sich an die daselbst schon festgesetzten Begriffe einer vollkommenen und unvollkommenen Durchsichtigkeit. In dem Verstande ist keine Masse in der Natur durchsichtig, daß sie alles auffallende Licht durchliesse, gar nichts zurück würfe. Die mehrere oder mindere Durchsichtigkeit hängt ab von der geringern oder grössern Menge des innerhalb der Masse, wie auch an der zurückwerfenden und brechenden Fläche selbst zerstreueten Lichts. Eine vollkommen durchsichtige Masse wäre diejenige, welche gar kein Licht zerstreuete, und alles, was nicht spiegelartig zurückgeworfen wird, durchliesse. In vollkommen durchsichtigen Massen sind die Theilchen, welche den Durchgang des auf sie fallenden Lichts hindern, oder selbiges innerhalb der Masse zerstreuen, entweder durch die ganze Masse gleichförmig, oder ungleichförmig vertheilt. Im ersten Fall kann sie eine gleichförmig durchsichtige Masse, im letztern Fall eine ungleichförmig durchsichtige Masse heissen. Die folgenden Untersuchungen werden vor der Hand allein auf die erste Art der unvollkommen durchsichtigen eingeschränkt seyn, bis ausdrücklich das Gegentheil wird erinnert werden.

227. §.

Es sey nun HFGI eine zwischen zwoen parallelen Ebenen FG, HI, eingeschlossene durchsichtige Masse; man stelle sich selbige in soviele Schichten von gleicher Dicke als man will, mittelst solcher Ebenen eingetheilt vor, die mit den vorigen parallel sind. Wenn nun in B die Lichtmenge L senkrecht auffält, so geht gleich anfangs wegen der Zurückwerfung ein Theil davon ab, der übrige Theil dringt in die Masse hinein. Es sey dieser Theil $= \Lambda$, und derselbe vermindere sich in dem Verhältniß $1 : m$, indem er um die Tiefe BC eindringt, so daß in C die Lichtmenge $m\Lambda$ anlangt. Man nehme ferner $CD = BC$ an, und setze $m\Lambda = \lambda$, so frägt sich nun: in welchem Verhältniß dieser Theil λ abnimmt, indem er ferner um die Tiefe CD eindringt? Weil die Masse von gleichförmiger Durchsichtigkeit angenommen wird, so sind von C bis D eben die Ursachen der Zerstreuung des Lichts vorhanden, die von B bis C vorhanden waren; und deswegen hat man keinen Grund anzunehmen, daß sich die Lichtmenge λ von C bis D in einem andern Verhältniß vermindere, als dasjenige war, in welchem sich die Lichtmenge Λ von B bis C verminderte. Man nehme also bis auf weitere Prüfung an, die Lichtmenge λ vermindere sich von C bis D wiederum in dem Verhältniß $1 : m$, so wird in C die Lichtmenge $m\lambda = m^2\Lambda$ anlangen. Es sey $BC = c$, so will diese angenommene Voraussetzung soviel sagen: wenn das Licht in der durchsichtigen Masse die Wege c, $2c$, $3c$, $4c$, u. s. f. zurück gelegt hat; so hat sich die anfänglich bey B hineindringende Lichtmenge Λ in die Lichtmengen 105. Fig.

$m\Lambda$, $m^2\Lambda$, $m^3\Lambda$, $m^4\Lambda$, mithin überhaupt in die Lichtmenge $m^n\Lambda$ verändert, wenn der Weg, welchen das Licht in der durchsichtigen Masse zurück gelegt hat, $= nc$ ist.

328. §.

Nun sey $m^n\Lambda = Z$, so ist $m^n = \frac{Z}{\Lambda}$, und wenn man die Logarithmen hievon nimmt, so hat man $n \cdot lm = l\,\frac{Z}{\Lambda}$. Weiter sey $nc = x$, so ist $n = \frac{x}{c}$, und man erhält die Gleichung $\frac{x}{c}\,lm = l\,\frac{Z}{\Lambda}$. Das Verhältniß $Z : \Lambda$ läßt sich durch ein paar Linien ausdrücken, die ich mit y und a bezeichnen will, so daß $Z : \Lambda = y : a$ ist, und man erhält $\frac{x}{c}\,lm = l\,\frac{y}{a}$. Wie nun jede unbestimmte Gleichung zwischen zwoen veränderlichen Grössen die Natur einer gewissen krummen Linie ausdrückt; so nehme man an, daß CEM diejenige Linie (106. Fig.) sey, wofür die Gleichung $\frac{x}{c}\,lm = l\,\frac{y}{a}$ gehört. Ferner sey AB die Abscissenlinie, die Ordinaten PM $= y$ darauf senkrecht, und A der Anfangspunct der Abscissen AP $= x$; so wird erfordert, daß $y = a$ sey, wenn $x = 0$ ist, also AC $= a$. Weiter sey AD $= c$, so muß $\frac{y}{a} = m$ seyn, wenn x $=$ AD

$= AD = c$ ist, oder $\frac{y}{a} = \frac{\lambda}{\Lambda}$. Es sey $\Lambda : \lambda$ $= a : b$, und $DE = b$, so hat man $m = \frac{b}{a}$, und $\frac{x}{c}\; l\, \frac{b}{a} = l\, \frac{y}{a}$. Weil übrigens $l\, \frac{a}{b} = -$ $l\, \frac{b}{a}$, und $l\, \frac{a}{y} = -\, l\, \frac{y}{a}$ ist, so hat man auch $l\, \frac{a}{y} = \frac{x}{c}\; l\, \frac{a}{b}$. Aus dieser Gleichung kann für jede Abscisse $x = AP$ die dazu gehörige Applicate $y = PM$, vermittelst der Logarithmen Tafeln gefunden werden, und die solchergestalt verzeichnete krumme Linie, stellt mit ihren Abscissen und Applicaten ein ganzes logarithmisches System vor: deswegen heist sie auch in der höhern Geometrie die logarithmische Linie.

Nimmt man statt A einen andern Anfangspunct der Abscissen in H an, und setzt $HP = w$, $AH = k$, $HK = \alpha = \frac{1}{n}\, a$, also $a = n\alpha$, so hat man $x = k + w$, und es ist $l\, \frac{n\alpha}{y} = \frac{k + w}{c}\, l\, \frac{a}{b}$, oder $l\, \frac{\alpha}{y} + ln = \frac{k + w}{c}\; l\, \frac{a}{b}$. Es ist aber $ln = l\, \frac{a}{\alpha} = \frac{k}{c}\; l\, \frac{a}{b}$, also erhält man auch $l\, \frac{\alpha}{y} = \frac{w}{c}\; l\, \frac{a}{b}$, oder $\frac{w}{l(\alpha : y)}$

 =

$= \frac{c}{l(a:b)}$, und diese Gleichung ist der vorigen $l \frac{a}{y} = \frac{x}{c} \, l \, \frac{a}{b}$, die man auch so ausdrücken kann $l \frac{x}{(a:y)} = \frac{c}{l(a:b)}$, in allem ähnlich. Wenn also die logarithmische Linie schon verzeichnet ist, und man nimmt ein Paar Abscissen AD, HP, wo man will, durch deren Endpuncte die Applicaten AC, DE, und HK, PM, gezogen sind; so verhalten sich die Abscissen, wie die Logarithmen der Verhältnisse der beyden zu jeder Abscisse gehörigen Applicaten.

329. §.

Es ist an sich gleichgültig, was man für Logarithmen brauchen will, wenn man aus der Gleichung $l \frac{a}{y} = \frac{x}{c} \, l \, \frac{a}{b}$ rechnet: wenn man aber die beständige Linie $\frac{c}{l(a:b)} = f$ setzt, so hat man $\frac{x}{l(a:y)} = f$ und man muß nun bey den Rechnungen aus der lezten Gleichung die Logarithmen desselben Systems behalten, welches man bey Berechnung der Linie f gebraucht hat. Es sey nemlich $x = f$, wenn $y = FG$ ist, so hat man $\frac{f}{l(AC:FG)} = \frac{c}{l(a:b)}$: wenn also $f = \frac{c}{l(a:b)}$ seyn soll, so muß $l\,(AC:FG) = 1$ seyn. Demnach

nach ist AC : FG das Fundamental-Verhältniß des Systems, welches die Logarithmische Linie vorstellt, und in der Gleichung $\frac{x}{l(a:y)} = f$, ist f die Abscisse zwischen zweyen Applicaten, deren Verhältniß gegen einander das Fundamental-Verhältniß des Systems ist. Es sey also AC : FG $= e : 1$, und e die basis der natürlichen Logarithmen, so ist von nun an in der Gleichung $l\frac{a}{y} = \frac{x}{f}$ allemahl das l das Zeichen des natürlichen Logarithmen.

Man nehme an, die Abscisse AP $= x$ wachse um das Stück P$p = \Delta x$, pm sey die Applicate durch p, und mR, Mr, mit Pp parallel; so ist rm $=$ RM $= \Delta y$, die Differenz um welche y abnimmt, wenn x um die Differenz Δx wächst. Die Sehne durch M und m schneide die Axe AB in t, so ist tang PM$t = \frac{Rm}{RM} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Wenn aber Δx und zugleich Δy nach und nach abnehmen, so nähert sich die Lage der Linie Mt der Lage der Linie MT, welche die Krumme Linie CEM in M berührt, und fällt mit ihr zusammen, wenn Δx und Δy verschwinden, so daß man $\frac{dx}{dy} =$ tang PMT erhält. Nun ist PT die Subtangente (299. §. Persp.) und man hat für selbige die allgemeine Formul PT $= y$. tg PMT $= \frac{ydx}{dy}$.

Die Gleichung für die Logarithmische Linie läßt sich so ausdrücken $la - ly = \frac{x}{f}$, und die Differentialrechnung giebt $- \frac{dy}{y} = \frac{dx}{f}$, also $\frac{ydx}{dy} = -f$, oder die Subtangente PT $= -f$. Das Zeichen (—) bezieht sich nur auf die Lage der Linie PT, die wenn y, wie im gegenwärtigen Fall abnimmt, indem x wächst, nicht mit PA auf einerley Seite von PM, sondern PA gegen über liegt; so wie gegentheils PT mit PA auf einer Seite von PM liegt, wenn y mit x wächst. **Demnach ist die Subtangente der Logarithmischen Linie überall von einerley Grösse, wo auch der Punct M genommen wird**, sie ist der Absciſſe zwischen zweyen Ordinaten gleich, deren Verhältniß gegen einander das Fundamental-Verhältniß des natürlichen Logarithmen-Systems ist. Auch findet man die Subtangente $f = \frac{c}{\text{log. nat. } (a : b)}$ für eine gegebene Logarithmische Linie, wenn irgend ein Stück der Absciſſenlinie AD $= c$, und das Verhältniß der Applicaten AC : DE $= a : b$ durch die Endpuncte deſſelben gegeben ist.

330. §.

Nun sey wie im 328 §. $a : b = \Lambda : \lambda$ das Verhältniß, in welchem sich das Licht vermindert, wenn es in die durchsichtige Maſſe HFGI um die
105. Fig. Tiefe BC $= c$ eindringt; so stellt die Logarithmische Linie CEM (106 Fig.) mit ihren Absciſſen und Ordinaten das Gesetz vor, nach welchen das Licht in der

der durchsichtigen Masse abnimmt. Die Absciſſe x stellt jede unbestimmte Tiefe BP vor, um welche das Licht eindringt, und das Verhältniß der Ordinaten $a : y = A : Z$ ist dem Verhältniß gleich, in welchem das Licht abnimmt, wenn es um diese Tiefe eindringt. Hat man durch einen Versuch gefunden, in welchem Verhältniß $a : b$ sich das Licht vermindert, wenn es in eine gewisse Masse um die bekannte Tiefe c eindringt, so findet man leicht die Subtangente $PT = \frac{c}{\text{log. nat. } (a : b)}$ für die logarithmische Linie, deren Ordinaten nach eben dem Gesetz abnehmen, wie das Licht in der durchsichtigen Masse abnimmt. Herr **Bouguer** nennt sie die **Lichtverminderungslinie** (Gradulucique) für diese Masse. (Traité d'optique ſur la gradation de la lumiere Liv. III. Sect. I. p. 235.) Uebrigens kann man am bequemsten, vermittelst der Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{c}\;l\,\frac{a}{b}$ das Verhältniß $a : y$ **gefunden werden, in welchem sich das Licht vermindert, wenn es in eben der Masse jeden andern Weg x zurück leget:** und weil es gleichgültig ist, welche Logarithmen man bey dieser Rechnung brauchen will, so können die Briggischen Tafeln gebraucht werden. Auch **umgekehrt findet man den Weg** $x = \frac{c \,.\, l\,(a : y)}{l\,(a : b)}$, **den das Licht in eben der Masse zurück legen muß, wenn es in jedem andern Verhältniß** $a : y$, **daß von** $a : b$ **verschieden ist, abnehmen soll.**

331. §.

Wenn Massen von verschiedener Art nicht gleich durchsichtig sind, so sind die Subtangenten für die Lichtzerstreuungslinien dieser Massen verschieden. Man nehme an, daß F und f diese Subtangenten für zwey verschiedene Massen sind; die der erstern zugehörige Gleichung sey $l\,\frac{A}{Y} = \frac{X}{F}$, für die andere aber gehöre die Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{f}$. Soll nun in beyden Massen das Licht in gleicher Verhältniß abnehmen, so soll $A : Y = a : y$ seyn, und das giebt $\frac{X}{F} = \frac{x}{f}$, oder $X : x = F : f$. Diesemnach verhalten sich die Tiefen um welche das Licht eindringen muß, wie die Subtangenten der Lichtzerstreuungslinie, wenn das Licht in ungleich durchsichtigen Massen in gleicher Verhältniß abnehmen soll.

Soll dagegen das Licht in beyde Massen gleich tief eindringen; so soll $x = X$ seyn, mithin $F \,.\, l\,\frac{A}{y} = f \,.\, l\,\frac{a}{y}$, und $l\,\frac{A}{Y} : l\,\frac{a}{y} = f : F$. Demnach stehen die Logarithmen der Verhältnisse in welchen das Licht abnimmt, wenn es in ungleich durchsichtigen Massen gleiche Wege zurück legt, im umgekehrten Verhältniß der Subtangenten ihrer Lichtzerstreuungslinien.

332. §.

Die Durchsichtigkeit zwoer Massen von verschiedener Art, wovon jedoch jede

für sich gleichförmig durchsichtig ist, mit einander zu vergleichen.

Aufl. Je tiefer das Licht in eine solche Masse eindringt, bevor es in einem gegebenen Verhältniß abnimmt, desto durchsichtiger ist die Masse. Wäre das Verhältniß der Lichtverminderung in beyden gleich, und die eine zweymahl so dick wie die andre, so wäre jene noch mahl so durchsichtig als diese: alsdenn aber wäre die der ersten zugehörige Subtangente nochmahl so groß, als diejenige, so der zweyten zugehört. Bleibt dasselbe Verhältniß der Lichtverminderung, wenn die eine n mahl dicker als die andre ist; so ist jene n mahl durchsichtiger: aber auch die zur ersten gehörige Subtangente ist n mahl grösser, als die, welche zur zweyten gehört. (331. §.) **Demnach verhalten sich die Durchsichtikeiten zweyer Massen, wie die Subtangenten der dazu gehörigen Lichtzerstreuungslinien.**

Man kann sich auch vorstellen, eine dieser Massen sey noch mahl so durchsichtig als die andre, wenn bey gleicher Dicke das Verhältniß der Lichtverminderung bey der ersten nur halb so groß, als bey der zweyten ist: also des ersten Verhältnisses Logarithme halb so groß, als des zweyten Logarithme. Ueberhaupt würde sich also die **Durchsichtigkeit umgekehrt verhalten, wie der Logarithme des Verhältnisses der Lichtverminderung bey gleicher Dicke.** Aber der Logarithme dieses Verhältnisses verhält sich umgekehrt, wie die Subtangente der Lichtzerstreuungslinie, mithin kommt man auch auf diesem Wege auf die vorhin schon gefundene Regel.

333. §.

Braucht man bey Berechnung der Subtangente $f = \frac{c}{l\ (a : b)}$ die Briggischen Logarithmen, so wird f diejenige Tiefe, um welche das Licht in die Masse dringen muß, wenn das Verhältniß der Lichtverminderung, $= 10 : 1$ seyn soll. Braucht man dagegen die natürlichen Logarithmen, so ist das Verhältniß der Lichtverminderung $= e : 1 = 2,71828 : 1$, wenn das Licht in der Masse den Weg f zurück legt. Sucht man nur das Verhältniß der Durchsichtigkeiten, so ist es gleichgültig, ob man die Briggischen oder die natürlichen Logarithmen braucht, nur muß man für beyde Massen, wie für sich klar ist, einerley Logarithmen brauchen. Bey sehr durchsichtigen Massen ist indessen der Weg sehr groß, den das Licht zurück legen muß, wenn es zehnmahl schwächer werden soll; alsdenn setzt man bequemer das Verhältniß $e : 1$ zum Grunde. wenn nun m den Modulus des Briggischen Systems bedeutet, so ist log. nat. $\frac{a}{b} = \frac{1}{m}$. log. tab. $\frac{a}{b}$, und man findet $f = \frac{m\ .\ c}{\text{log. tab.}\ (a : b)}$. Alsdenn nimmt das Licht in dem Verhältniß $e : 1$ ab, wenn es in der Masse den Weg $= f$ zurück legt, und die Lichtzerstreuungslinie stellt das natürliche Logarithmen-System vor. Aus dem 163 §. Allg. Rech. weis man, daß $m = 0,4342944 = \frac{1}{2,302585}$ sey, mithin

mithin ist $f = \frac{0,4342944 \,.\, c}{\text{log. tab. } (a : b)}$, oder $f = \frac{c}{2,302585.\ \text{log. tab. } (a : b)}$ als das Maaß der Durchsichtigkeit der Masse zu betrachten. Eben diese Linie giebt auch für sich schon einen Begrif von der Durchsichtigkeit der Masse, weil sie mit derjenigen Tiefe einerley ist, um welche das Licht eindringen muß, bevor es in dem Verhältniß $e : 1$ beynahe $= 19 : 7$ oder $= 8 : 3$ geschwächt wird.

334. §.

Das Gesetz zu finden, nach welchem das Licht geschwächt wird, wenn es sich in einer durchsichtigen Masse von einem leuchtenden Punct nach allen Seiten ausbreitet. 106. Fig.

Aufl. Es sey AB die Axe der Logarithmischen Linie CEM, deren Ordinaten AC, DE, PM die Verminderung des Lichts anzeigten, wenn dasselbe wegen keiner andern Ursache, als wegen der Undurchsichtigkeit des Raums, worin es sich ausbreitet, schwächer würde, und L der leuchtende Punct, von dem es ausgehet. Man setze, wie oben im 328 §. AC $= a$, DE $= b$, PM $= y$, AP $= x$. AD $= c$, und überdem LA $= h$. Auf der andern Seite der Axe AB sey eine krumme Linie cem verzeichnet, deren Ordinaten AC $= \alpha$, De $= \beta$, Pm $= z$, die Lichtverminderung ausdrücken, welche von beyden Ursachen zugleich herrührt, nemlich von der Ausbreitung des Lichts nach allen Seiten, und der Undurchsichtigkeit des Raums, worin es sich ausbreitet: so hat man

$\alpha : \beta =$

$$\alpha : \beta = \left\{\begin{matrix}(h + c)^2 & : & h^2 \\ a & : & b\end{matrix}\right\}$$

oder $\alpha : \beta = a\,(h + c)^2 : b \,.\, h^2$;

ferner eben so

$$\alpha : z = \left\{\begin{matrix}(h + x)^2 & : & h^2 \\ a & : & y\end{matrix}\right\}$$

oder $\alpha : z = a\,(h + x)^2 : h^2\, y$.

Das giebt $\frac{a}{y} = \frac{\alpha h^2}{z\,(h + x)^2}$, und wenn man diesen Werth in die Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{c}\; l\,\frac{a}{b}$ (328. §.) setzt, so erhält man $l\,\frac{\alpha h^2}{z\,(h + x)^2} = \frac{x}{c}\; l\,\frac{a}{b}$, oder $l\,\frac{\alpha}{z} = \frac{x}{c}\; l\,\frac{a}{b} - l\,\frac{h^2}{(h + x)_2}$.

Weil die Durchsichtigkeit der Masse, worin sich das Licht ausbreitet, als bekannt vorausgesetzt wird, so weis man, welches Verhältniß $\frac{a}{b}$ mit einem bekannten Werth c zusammen gehöre. Sind also zwo Stellen A und P gegeben, nach welche der leuchtende Punct L hinscheinen kann; so zeigt die gefundene Gleichung, wie viel mahl das Licht in der entferntern Stelle schwächer, als in der nähern sey.

Umgekehrt, wenn die Differenz x zwoer Entfernungen $h =$ LA, und $h + x =$ LP von dem leuchtenden Punct gegeben ist, und das Verhält-

niß

niß $\frac{\alpha}{z}$ der auf beyde Stellen A und P fallenden Erleuchtungen; so giebt die Gleichung $l\frac{h^2}{(h+x)^2} = \frac{x}{c}\, l\,\frac{a}{b} - l\,\frac{\alpha}{z}$ das Verhältniß $\frac{h}{h+x}$ mithin auch h, weil x gegeben ist, und so findet man beyde Entfernungen LA und LP selbst.

335. §.

Wenn man auf ein Stück Glas, oder sonst ein Stück einer durchsichtigen Masse, das von zwoen ebenen und parallelen Seitenflächen eingeschlossen ist, wie RFQS (73. Fig.) das Licht senkrecht fallen läst; so giebt es zwar Mittel, die auffallende Lichtmenge mit der durchgehenden zu vergleichen: allein das Verhältniß jener Lichtmenge zu dieser ist noch nicht das gesuchte Verhältniß $a:b$, in welchem das Licht wegen der Undurchsichtigkeit der Masse vermindert wird, indem es darin den Weg c so groß, als die Dicke der Masse zurück legt. Um nunmehro völlig deutlich zu übersehen, was es mit dieser Sache für eine Bewandniß habe, stelle man sich anfangs noch vor, der Strahlencylinder AB falle auf PQ unter dem schiefen Winkel PBA, und erinnere sich daran, was vermöge des im 196 §. beschriebenen Versuchs erfolget. Auf B falle die Lichtmenge L, nach B*b* werde der Theil q. L zurückgeworfen, in die Lage BC aber der Theil n. L gebrochen, so würde eben dieser

dieser Theil in C anlangen, wenn die Masse vollkommen durchsichtig wäre. Nun aber langt daselbst nur der Theil λnL an, der übrige wird zerstreuet. Von dieser Lichtmenge λnL wird abermahl in C ein Theil $= p\lambda n$L nach CD zurück geworfen, der übrige $m\lambda n$L in die Lage Cc gebrochen. Von jener Lichtmenge $p\lambda n$L langt nur der Theil $p\lambda^2 n$L in D an, hievon wird der Theil $p^2\lambda^2 n$L nach DE zurück geworfen, ein anderer Theil $mp\lambda^2 n$L nach Dd gebrochen, da dann in E nur die Menge $p^2\lambda^3 n$L anlangt. Diese Schlüsse setzt man leicht fort, da sich denn folgendes ergiebt.

Aufwärts wird zurück geworfen,

nach Bb die Lichtmenge $q \;.\; L$

nach Dd = = = = $mp\lambda^2 n \;.\; L$

nach Ff = = = = $mp^3\lambda^4 n \;.\; L$

nach Hh = = = = $mp^5\lambda^6 n \;.\; L.$

So entstehet, das erste Glied qL ausgenommen, eine geometrische Progreßion, wovon $p^2\lambda^2$ der Exponent ist, und diese Progreßion läuft ins unendliche fort. Die Summe aller Glieder ist also

$$= \left(q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2\lambda^2}\right) L \text{ (223 §. Allg. Rech.)}$$

weil der Exponent $p^2\lambda^2$ ein eigentlicher Bruch ist. Man setze den Coefficienten von L = M, so ist die Lichtmenge, welche von der Vorderfläche PQ wieder zurück gehet, = ML, und man hat $M = q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2\lambda^2}$.

Weiter fällt durch die hintere Fläche RS

nach Cc die Lichtmenge $m\lambda n \;.\; L$

nach Ee = = = $mp^2\lambda^3 n \;.\; L$

nach

nach Gg die Lichtmenge $mp^4\lambda^5n$. L
nach Ii = = = $mp^6\lambda^7n$. L.
Alle diese Glieder machen abermahl eine geometrische Progreßion, wovon die Summe $= \frac{m\lambda n}{1 - p^2\ \lambda^2}$. L ist. Setzt man demnach $\frac{m\lambda n}{1 - p^2\ \lambda^2} = N$, so ist die durch die hintere Fläche RS durchgehende Lichtmenge = N . L. Uebrigens giebt die Vergleichung der Werthe von M und N auch die Gleichung $M = q + p\lambda N$. Je mehr sich das in der Richtung AB einfallende Licht der auf PQ senkrechten Lage nähert, desto näher rücken die Puncte B, D, F, H, u. s. f, ingleichen C, E, G, I, u. s. f. zusammen: und jene sowohl, als diese, fallen zusammen, wenn AB auf PQ senkrecht fällt. Allemahl aber ist die gesammte zurück geworfene Lichtmenge = M . L, die durchfallende = N . L, die zerstreuete Lichtmenge = (1 — M — N) L. Man vergleiche H. Lamberts Photom. Part. II. Cap. I. §. 403. pag. 193.

336. §.

Wäre die Masse vollkommen durchsichtig, so wäre $\lambda = 1$, also $M = q + \frac{mpn}{1 - p^2}$, $N = \frac{mn}{1 - pp}$ und $M = q + pN$. Ferner wäre $q + n = 1$ und $p + m = 1$, oder $m = 1 - p$, $n = 1 - q$; mithin $M = q + \frac{p\,(1 - q)}{1 + p} = \frac{q + p}{1 + p}$

$N = \frac{1 - q}{1 + p}$, und $M + N = 1$, wie erfordert wird, weil gar kein Licht zerstreuet würde. M. s. Lamberti Photom. Part. II. Cap. I. §. 342. sq. pag. 106 sq. Wäre dagegen die Masse vollkommen undurchsichtig, so könnte man $\lambda = 0$ setzen. Das würde $M = q$, $N = 0$ geben. Vermuthlich giebt es dergleichen vollkommen undurchsichtige Massen in der Natur eben so wenig, als es vollkommen durchsichtige Massen giebt: für jeden noch so kleinen Weg, den das Licht in einer solchen Masse zurück legte, würde $\lambda = 0$ seyn. Allein vermöge der Erfahrungen die bereits oben im 256 §. sind angeführt worden, werden alle uns bekannte Massen nur alsdenn (und vielleicht nur für unsre Empfindung) völlig undurchsichtig, wenn sie eine gewisse bestimmte Dicke haben; sehr dünne Blättchen davon haben allemahl einige Durchsichtigkeit. Der Fall, daß $\lambda = 0$ wird, kann also doch in der Natur statt haben, wenn die Masse, welche das Licht auffängt, so dick ist, daß das Licht, bis an die hintere Fläche derselben nicht eindringen kann. Wofern es indessen mit dem im 327 §. angenommenen Gesetz seine Richtigkeit hat, wofern das Licht beym Durchgang durch die Masse in geometrischer Progreßion abnimmt, wenn der zurück gelegte Weg in arithmetischer Progreßion wächst; so kann nie $\lambda = 0$ werden: doch könnte wohl bey einer geringen Dicke λ so klein werden, daß der durchfallende Theil des Lichts für unser Auge unempfindlich wäre. Vermuthlich hat es diese Bewandniß mit den Massen, die wir undurchsichtig nennen.

Der XXV. Abschnitt.

Vergleichung des von durchsichtigen Massen spiegelartig zurückgeworfenen, wie auch des durchscheinenden und zerstreueten, mit der Menge des auffallenden Lichts.

337. §.

Unter den undurchsichtigen festen Massen, die eine gute Politur annehmen, und alsdenn einen ansehnlichen Theil des auffallenden Lichts spiegelartig zurück werfen, sind vornemlich die Metalle merkwürdig. Auch ist wohlgereinigtes Quecksilber zwar undurchsichtig, aber die äussere Fläche desselben, wenn es in einem Gefäß ruhig steht, hat die Natur einer polirten Fläche, und wirft einen beträchtlichen Theil des auffallenden Lichts spiegelartig zurück. Für dergleichen Massen ist demnach allemahl $M = q$, und $N = o$. Diejenigen ebenen Spiegel aber, welche am meisten gebraucht werden, bestehen aus einer zwischen zwoen parallelen Ebenen eingeschlossenen Glastafel, und die von dem Object abgekehrte Seite ist mit der sogenannten Spiegel-Folie, einer aus Zinn und Quecksilber zubereiteten Masse belegt. Diese Folie hat an der Seite, womit sie am Glase anliegt, wie sonst ein metallener Spiegel ihre Politur, und wirft das durchs Glas darauf fallende Licht stark zurück. Allein eben dies verursacht einen sehr beträchtlichen Unterschied unter der Würkung eines gläsernen, und eines metallenen Spiegels. Der leztere hat nur eine polirte zurückwerfende Fläche: dagegen wirft der gläserne Spiegel einen Theil des auffallenden Lichts von seiner Vorderfläche zurück, von dem übrigen durch das Glas hindurch scheinenden Licht, welches zugleich an eben der Vorderfläche in eine andere Lage gebrochen wird, gehet, wegen der Zerstreuung im Glase von neuen etwas ab, und das übrige wirft die hintere polirte Fläche zurück. Da, wo dies von der hintern Fläche zurück geworfene Licht die Vorderfläche wieder erreicht, wird es zum Theil gebrochen, indem es zum Spiegel herausgeht, zum Theil wieder nach der hintern Fläche zurück geworfen, die es aufs neue der vordern Fläche zuschickt. Der Erfolg ist völlig so, wie er im 196 §. ist beschrieben worden, nur mit dem Unterschied, daß die hintere Fläche des gläsernen polirten Spiegels undurchsichtig ist, und kein Licht durchläßt.

338. §.

Will man für die gesammte Lichtmenge, welche der polirte gläserne Spiegel zurück wirft, eine ähnliche Formul haben, wie im 335 §. die Formuln für die durchsichtige Glastafel waren, so wähle man nur statt das p für die hintere Fläche einen andern Buchstaben, wenn sie foliirt ist. Demnach setze man, es theile sich die auf C fallende Lichtmenge in dem Verhältniß $\pi : m$, so wird zurückgeworfen

nach Bb die Lichtmenge $q \,.\, L$
nach Dd " " " $m\pi\lambda^2 n \,.\, L$
nach Ff " " " $m\pi^2 p\lambda^4 n \,.\, L$
nach Hh " " " $m\pi^3 p^2 \lambda^6 n \,.\, L$

Das erste Glied, q ausgenommen, giebt dies eine geometrische Reihe, deren Exponent $\pi p \lambda^2$ ist, und man hat nun $M = q + \frac{m\pi\lambda^2 n}{1 - \pi p \lambda^2}$. Für die durchsichtige Glastafel ist alsdenn $\pi = p$, und die gesammte hindurch fallende Lichtmenge $= N \,.\, L$, wenn $N = \frac{m\lambda n}{1 - p^2 \lambda^2}$ angenommen wird.

339. §.

Die Werthe der Buchstaben q, n, p, m, λ, (334 §.) sind nicht allein bey einerley Einfallswinkel für verschiedene Massen, sondern auch bey einerley Masse und verschiedenen Einfallswinkeln verschieden, und sie lassen sich nur durch regelmäßig angestellte Versuche für jede besondre Art durchsichtiger Massen, oder zurückwerfender polirter Flächen, und jeden gegebenen Einfallswinkel finden. Eigentlich kommt es nur darauf an, daß man q, p, und λ suche, weil allemahl $q + n = 1$, und $p + m = 1$ seyn muß. Für undurchsichtige polirte Flächen läßt sich q besonders finden, und die Zahlen p und λ kommen dabey nicht vor. Bey Glastafeln und andern durchsichtigen Massen läßt sich ebenfalls q besonders auf ähnliche Art, wie für undurchsichtigen Spiegelflächen finden: nur werden die folgenden Untersuchungen ergeben, daß die Sache ihre Schwierigkeit habe, wenn das Licht völlig, oder beynahe senkrecht, oder auch unter einem kleinen Neigungswinkel gegen die polirte Fläche auffällt. Wenn nicht allein q sondern auch p gefunden ist, so kann man ohne große Schwierigkeit λ finden: allein es ist so leicht nicht die Zahl p zu finden, so lange λ noch unbekannt ist. Das Licht was die hintere Fläche zurück wirft, leidet in der durchsichtigen Masse, wegen der Zerstreuung, einen neuen Abgang, und da, wo es durch die Vorderfläche wieder in die Luft geht, wird abermahl ein Theil davon zurück geworfen. Was man also in der Luft auffangen kann, ist nur ein Theil desjenigen Lichts, was die hintere Fläche zurück wirft. Herr **Bouguer** im Traité d'optique Liv. I. Sect. I. Art. III. IV. V. giebt dazu eine nähere Anleitung, wie man das spiegelartig zurück geworfene Licht mit dem einfallenden vergleichen kann, und sein Verfahren läßt sich nicht allein auf undurchsichtige Spiegelflächen, sondern auch auf Glastafeln und andre durchsichtige Massen anwenden. Will man aber bey der Anwendung auf Glastafeln nur dasjenige Licht, was die vordere Fläche an der Stelle, wo es auffällt, zurück wirft, mit dem einfallenden vergleichen, und auf solche Art die Zahl q finden; so muß man versichert seyn, daß beym Versuch dasjenige Licht, was die hintere Fläche zurück schickt, sich nicht mit jenem vermische: das ist aber alsdenn, wenn der Einfallswinkel entweder völlig, oder beynahe ein rechter Winkel, oder auch ein kleiner Winkel von wenigen Graden ist, nicht wohl zu vermeiden.

340. §.

Die blosse Betrachtung der 73 Figur ergiebt, daß die Stellen B, D, F, H, u. s. f. zusammen fallen, und alle zurück gehende Strahlen Bb, Dd, Ff, Hh, sich mit einander selbst, und mit dem einfallenden Strahl AB vermischen, wenn AB senkrecht auf PQ fällt. Wächst der Winkel LBA, so wachsen BD, DF, FH u. s. f., und mit diesen Linien zugleich die senkrechten Entfernungen der zurückgehenden Strahlen Bb, Dd, Ff, von einander: leztere aber nehmen wieder ab, wenn LBA sich dem rechten Winkel nähert, und PBA ein kleiner Winkel von wenigen Graden wird. Man setze den Neigungswinkel LBA $= \alpha$, den gebrochenen Winkel MBC $= \beta$, die Dicke der Glastafel BM $= c$, so ist BD $= 2c \tang \beta$, und der senkrechte Abstand Db der zurückgehenden Strahlen Bb, Dd, u. s. f. $= 2c \tang \beta \cos \alpha$. Das Verhältniß der Refraction sey, $1 : \mu$, so ist $\sin \beta = \mu \sin \alpha$, $\cos \beta = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}$, also $\tang \beta = \frac{(n \sin \alpha)}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}}$, und der Abstand $Db = \frac{2 \mu c \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}} =$ $\frac{\mu c \sin 2\alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}}$. Dieser Ausdruck verschwindet nicht allein, wenn $\alpha = 0$, sondern auch wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, er wächst bis auf eine gewisse Gränze und nimmt nachher wieder ab, wenn α von 0° bis 90° zunimmt, und der gröste Werth wird gefunden, wenn man $d \,.\, \frac{\mu c \sin 2\alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}} = 0$

setzt. Das giebt $\cos 2\alpha\,(1 - \mu^2 \sin\alpha^2) + \frac{1}{4}\mu^2 (\sin 2\alpha)^2 = 0$, oder $(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)(1 - \mu^2 \sin\alpha^2) + \mu^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 = 0$, und wenn man $1 - \sin\alpha^2$ statt $\cos\alpha^2$ schreibt, hiernächst aber alles gehörig ordnet, so erhält man

$$\sin\alpha^4 - \frac{1}{\mu^2}\sin\alpha^2 = -\frac{1}{\mu^2},$$

mithin $\sin\alpha^2 = \frac{1}{\mu^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\mu^4} - \frac{1}{\mu^2}\right)}$.

Das zeichen $+$ kann vor dem Wurzelzeichen nicht gebraucht werden, weil μ ein eigentlicher Bruch ist, und $\sin\alpha$ nicht grösser als 1 seyn kann.

Nimmt man für Luft und Glas $\mu = \frac{2}{3}$ an, so ist $\sin\alpha^2 = \frac{9}{4} - \sqrt{\left(\frac{81}{16} - \frac{9}{4}\right)} = \frac{9}{4} - \sqrt{\frac{45}{16}}$, oder $\sin\alpha^2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4} = \frac{3(3-\sqrt{5})}{4}$, und $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3\,(3 - \sqrt{5})} = 0{,}756934$ und $\alpha = 49^\circ\, 12'$. Je dicker uebrigens das Glas ist, desto grösser ist Db für einerley Neigungswinkel α; und wenn dieser Abstand Db nicht so gar klein ist; so kann man den Strahl Bb allein mit einer kleinen Fläche auffangen, und dadurch eine Erleuchtung zu wege bringen, die von demjenigen Licht herrührt, welches die Vorderfläche allein von der Stelle, wo es auffällt, zurück schickt.

Diese Erinnerung wegen der Glastafeln und foliirten gläsernen Spiegel, setze ich nun ein für allemahl bey der folgenden Beschreibung derjenigen Art von Versuchen voraus, welche man nach des Hn. Bouguer Anleitung anstellen kann, um das spie-

spiegelartig zurück geworfene Licht mit dem einfallenden zu vergleichen.

341. §.

Man richte ein Paar kleine viereckte Tafeln B und D so ein, daß man sie etwa auf einem ebenen Tisch vertical, und beyde mit einander parallel stellen kann. Diese kleinen Tafeln müssen gleich weiß seyn, auch einerley Gestalt und Grösse haben. In A stehe ein ebener Spiegel von eben der Gestalt wie die Tafeln, von Grösse allenfalls noch etwas kleiner. Stellt man nun in B eine von den Tafeln mit dem Spiegel parallel, so wird derselbe das Licht, was er in der Richtung BA von B empfängt, nach AO zurück werfen. Man stelle sich die Ebene BAO horizontal, also auf den Ebenen A und B senkrecht vor, sie schneide die Ebene des Spiegels in AC: ferner sey BC der Einfalls-Cathetus; so werden BC und OA einander in D schneiden, als der Stelle des Bildes von B, und es ist BC=BD, so wie AB=AD (84. §.) Würde nun die andre Tafel in D gestellt, so könnte ein Auge, daß in O stehet, sie wegen des Spiegels nicht sehen. Damit man also aus O beydes, das Bild der Tafel B im Spiegel, und die Tafel D grade zu auf einem Blick sehen könne, stelle man die Tafel D ein wenig höher, als die Stelle, wohin das Bild der Tafel B fällt, oder auch ein wenig mehr seitwärts; so wird man es ohne Schwierigkeit dahin bringen, daß diese Tafel D und das Bild der Tafel B im Spiegel, beyde aus O gesehen, einander zu berühren scheinen. In der graden Linie BD zwischen beyden Tafeln stelle man eine Lichtflamme L, um die

107. Fig.

Tafeln zu erleuchten, so wie übrigens der Versuch im finstern Zimmer angestellet, auch das Licht der Flamme L durch eine Vorsetzung sowohl vom Auge O, als auch vom Spiegel A abgehalten werden muß.

Stellte man die Lichtflamme grade in der Mitte C zwischen beyden Tafeln, so würden selbige eine gleiche Erleuchtung empfangen, und wenn alles Licht vom Spiegel zurück geworfen würde, so würden auch beyde dem Auge in O gleich klar zu seyn scheinen. (290 §.) Weil nemlich beyde gleich weiß angenommen werden, so haben sie bey gleicher Erleuchtung eine gleiche Klarheit: und weil man beyde mit einem Blick übersiehet, mithin die Oefnung des Sterns im Auge für beyde Empfindungen einerley ist; so müste auch die scheinbare Klarheit einerley seyn. Allein der Spiegel wirft nicht alles Licht zurück, was auf ihn fällt, mithin wird das Bild von B nicht so klar, als D zu seyn scheinen, wenn die Lichtflamme L in C steht. Demnach rücke man sie etwas mehr nach B zu, so wird die Klarheit von D abnehmen, die Klarheit der Tafel B aber, also auch ihres Bildes im Spiegel, wird zunehmen. Demnach muß es eine Stelle für das Licht L geben, aus welcher beyde Tafeln so erleuchtet werden, daß die Tafel D und das Bild von B gleich helle zu seyn scheinen.

Nun sey die Klarheit der Tafel D $= \sigma$, der Tafel B $= \Sigma$, so ist die Klarheit des Bildes der leztern, vermöge des Versuchs $= \sigma$. Ein Element $= \omega^2$ des Bildes der Tafel B, wenn der Ausflußwinkel des Lichts $= \alpha$, des Sterns im Auge Halbmesser $= \omega^2$, der Abstand OD $=$ OA $+$ AB $= d$

ist,

ist, schickt die Strahlenmenge $\frac{\pi b^2 \omega^2 \sin\alpha}{\delta^2} \cdot \sigma$ ins Auge: es würde aber die Strahlenmenge $\frac{\pi b^2 \omega^2 \sin\alpha}{\delta^2} \cdot \Sigma$ ins Auge schicken, wenn der Spiegel alles auffallende Licht zurück schickte. Mithin verhält sich die auffallende Strahlenmenge zur zurück geworfenen, wie $\Sigma : \sigma$. Die Erleuchtung der Tafel D sey $= i$, der Tafel B $= I$, so ist $\sigma : \Sigma = i : I$, weil beyde Tafeln gleich weiß angenommen werden. Wird also vorausgesetzt, daß entweder der Spiegel ein metallener sey, oder doch das Bild, was man im gläsernen Spiegel siehet, allein von der hintern foliirten Fläche desselben herrühre; das Verhältniß der auffallenden Strahlenmenge zur zurückgeworfenen $1 : q = I : i$. Es ist aber $I : i = LD^2 : LB^2$, mithin erhält man $1 : q = LD^2 : LB^2$.

342. §.

Wenn man auf diese Art den Versuch mit einerley Spiegel unter verschiedenen Einfallswinkeln BAC wiederhohlt; so findet man q desto grösser, je kleiner der Einfallswinkel ist. Um kleine Einfallswinkel zu erhalten, müssen die beyden Tafeln B und D einander sehr nahe gebracht werden: alsdenn hat es nicht allein seine Schwierigkeit die Lichtflamme L gehörig zu stellen, sondern auch die Entfernungen LB und LD genau genug zu messen, damit das Verhältniß $LD^2 : LB^2$, welches durch den Versuch gefunden wird, nicht zu sehr von dem eigentlich gesuchten richtigen Verhältniß abweiche. Um dies

zu

zu vermeiden, stelle man die Tafel B so, daß sie
108. gegen den Spiegel unter einem Winkel geneigt ist,
Fig. der den Einfallswinkel BAC zum rechten Winkel ergänzt. Nun wird das Bild von B übrigens eben so wie vorhin in D fallen, und man kann in diese Stelle die andre Tafel nur ein wenig höher oder mehr seitwärts bringen, damit man beydes, die Tafel D und das Bild von B, aus O neben einander auf einem Blick übersehen kann. Das Licht L stelle man nun in L über dem Spiegel A nur ein wenig über ihn erhöhet, so wird es zwar auf den Spiegel keine Strahlen unmittelbar werfen, man muß aber auch dahin sehen, daß auf ihn kein anderswoher reflectirtes Licht, sondern allein das Licht von B falle. Das Auge muß ebenfalls gegen das Licht durch eine Vorsetzung gedeckt werden. Nun fallen die Lichtstrahlen von L auf beyde Tafeln beynahe senkrecht, in gleicher Entfernung $LB = LD$ werden beyde gleich stark erleuchtet, aber das Bild von B im Spiegel scheint alsdenn nicht so klar zu seyn, als D. Um die Klarheit gleich zu machen, muß man LB vermindern, oder LD vergrössern, damit entweder die Klarheit des Bildes B zunehme, oder die Klarheit von D abnehme. Hat man nun beyde Tafeln auf solche Art in die Stellung gegen den Spiegel gebracht; daß die scheinbare Klarheit des Bildes von B und der Tafel D gleich groß sind; so findet man das Verhältniß $1 : q = LD^2 : LB^2$, wie im vor. §. Wenn man es nur zugleich dahin bringt, daß die scheinbare Grösse des Bildes B eben so groß bleibt, als die scheinbare Grösse der Tafel D, obgleich nun des Bildes Entfernung $OA + AB$ vom Auge kleiner, als

als der Tafel D Entfernung OA + AD vom Auge ist. In solcher Absicht kann man kleine schwarze Rahmen von etwas wiewohl nur wenig ungleicher Breite machen lassen, um sie vor der Tafel B zu setzen, damit die scheinbare Grösse ihres Bildes dadurch soviel als nöthig ist, vermindert werde.

Weil nemlich die Klarheit des Bildes B und der Tafel D gleich groß scheinen; so ist auch bey diesem Verfahren noch die würkliche Klarheit des Bildes B und der Tafel einerley; obgleich nun des Bildes Entfernung OA + AB kleiner als der Tafel D Entfernung OA + AD vom Auge ist. Die scheinbare Klarheit hängt von der Entfernung nicht ab, wenn die scheinbare Grösse nur einerley ist. (241. 249. 290. §.) Behält man also die Bezeichnungen des vor. §., so ist noch $1 : q = \Sigma : \sigma = I : i = LD^2 : LB^2$.

343. §.

Herr Bouguer (a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. II. pag. 57.) hat auf diese Art mit einem metallenen Spiegel den Versuch unter einem Winkel von 15° angestellt. Alsdenn war $LD = 53''$ und $LB = 40''$; mithin $1 : q = 53^2 : 40^2 = 1000 : 569$. Ein gläserner foliirter Spiegel, der 1 Linie dick, und aus einer sehr reinen Glastafel verfertiget war, warf das Licht etwas stärker zurück in dem Verhältniß 1000 : 628; es war nemlich $LB = 42''$, wenn $LD = 53''$ blieb. Bey kleinern Neigungswinkeln ward die Zurückwerfung merklich stärker, ein Winkel von 3° gab für den gläsernen Spiegel ohngefehr das Verhältniß 1000 : 700, und für den metallenen Spiegel war bey

eben

eben dem Winkel von 3° das Verhältniß 1 : q von dem eben angeführten wenig verschieden. Wegen des gläsernen Spiegels muß ich mich übrigens auf die im 339 §. vorausgesetzten Erinnerungen beziehen: daß von der hintern foliirten Fläche zurückgeworfene Licht vermischt sich bey diesem Versuch mit demjenigen, was die Vorderfläche zurück schickt: man findet also nicht eigentlich das Verhältniß 1 : q in der Bedeutung, wie diese Bezeichnung bisher gebraucht ist. Es wäre dies Verhältniß für die foliirte Fläche, wenn das Glas vollkommen durchsichtig wäre, und die Vorderfläche gar kein Licht zurück würfe.

344. §.

Man kann den Versuch mit einiger Veränderung auch auf folgende Art anstellen. In A stehe
109. der Spiegel, in L das Licht, das seine Strahlen
Fig. auf den Spiegel wirft, der sie nach AB zurück wirft. LC sey das Einfallsperpendicul, welches AB verlängert in Λ schneidet, so ist Λ das Bild des Lichts L. Durch L sey LD mit AB parallel, und LΔ = AB; man stelle in B und Δ die obbeschriebenen Tafeln mit dem Spiegel parallel, so wird B von dem reflectirten Licht, so wie Δ unmittelbar von L, und beyde gleich stark erleuchtet, wofern der Spiegel alles auf ihn fallende Licht zurück wirft. Es empfängt nemlich B, wenn alles auffallende Licht zurück strahlet, eben die Erleuchtung, die darauf fallen würde, wenn das Licht in Λ stünde, und der Spiegel nicht da wäre. Weil aber der Spiegel nicht alles auffallende Licht zurück schickt, so ist Δ stärker als B erleuchtet, und man

muß

muß die Tafel aus der Stelle Δ vom Licht L weiter entfernen, wenn beyde Erleuchtungen gleich werden sollen. Um dies zu prüfen, sucht man für das Auge eine Stelle in O, aus der beyde Tafeln ganz nahe an einander zu stehen scheinen: wenn alsdenn beyder scheinbare Klarheit einerley ist, so ist auch ihre würkliche Klarheit, mithin beyder Erleuchtung gleich groß. Auf jedes Element $= \omega^2$ der Tafel B fällt also nun die Strahlenmenge $\frac{\omega^2 \ S \ \sin \alpha^2}{LD^2}$, wenn der Einfallswinkel $= \alpha$, und der Glanz der Flamme $=$ S ist. Schickte aber der Spiegel alles Licht zurück, so wäre diese Strahlenmenge $= \frac{\omega^2 S \sin \alpha}{L\Delta^2} = \frac{\omega^2 S \sin \alpha}{\Delta B^2}$, mithin hat man $1 : q = LD^2 : \Delta B^2$, oder $1 : q = LD^2 : (L\Delta + \Delta B)^2$.

345. §.

Metallene und gläserne Spiegel kann man auf die bisher beschriebene Art bequem, so wie die Tafeln, welche das Licht auffangen, vertical stellen: allein die Oberflächen flüßiger Massen, des Wassers, des Quecksilbers u. a. m., werfen das Licht spiegelartig zurück, wenn sie ruhig in einem Gefäß stehen, und alsdenn sind diese Oberflächen wagerecht. Wie stark die Zurückwerfung sey, untersucht man nun am bequemsten im finstern Zimmer auf folgende Art. Durch ein paar kleine Oefnungen B und D im Fensterladen, läßt man an einem völlig heitern Tage das Tageslicht ins Zimmer fallen, und zwar von einer Gegend des Himmels, die der Sonne grade gegen über liegt. Was durch 110. Fig.

die eine Oefnung fällt, fängt man mit der horizontalen Fläche A einer stillstehenden flüßigen Masse, oder wenn man auch will, jeder andern zurückwerfenden Fläche auf, und beydes, das von der Spiegelfläche zurückgeworfene, und das durch D grade hinein scheinende Licht, fängt man mit einer ebenen Tafel RS auf, die eben so wie die Wand PQ vertical stehen, und mit PQ parallel seyn muß. Wenn nun E die helleste von dem durch D hinein fallenden Licht beschienene Stelle ist, so stelle man die Spiegelfläche A so, daß BA mit DE parallel sey. Wenn alsdenn AC das zurückgehende Licht ist, so wird BA + AC = DE seyn. Denn würde AB verlängert die Fläche RS in G treffen, so wäre BG = BA + AG = DE, und es ist AC = AG, mithin auch BA + AC = DE. Die parallele Lage der Wege des Lichts BF, DE ist auch deswegen nöthig, damit daß auf C und E fallende Licht von einerley Stelle des scheinbaren Himmels-Gewölbes komme. Man muß ferner alles so einrichten, daß die Stellen E und C nahe bey einander liegen. Zu dem Ende muß die Oefnung B der Oefnung D nahe zur Seite, und dabey ein wenig niedriger, als D angebracht werden. Am bequemsten wird selbige in ein dünnes Bret, oder ein Stück schwarzer Pappe geschnitten, das mit einer Einfassung versehen ist, worin man es nach Erfordern etwas höher oder niedriger schieben kann. Die Tafel RS muß schwarz seyn, in E und C aber schneidet man ein paar Kreisrunde Löcher, die mit dem weissesten Papier verschlossen werden. Auf E muß nichts von demjenigen Licht fallen, daß durch B hineinscheint, und auf C nichts von

von dem durch D hineinscheinenden Licht: deswegen muß man dies durch die Hülfe eines Vorhangs, oder wie es sich sonst am bequemsten bewerkstelligen läßt, verhindern: auch grade über der Spiegelfläche A etwas undurchsichtiges hindern, daß kein anderes als das Spiegelartig zurückgeworfene Licht auf C fallen kann.

Weiter muß man sich mit kleinen Rahmen oder Ringen aus schwarzer Pappe versehen, um die Oefnung D nach Gefallen zu vermindern. Wenn nemlich alles Licht von der Spiegelfläche A zurück strahlte, so würden die Stellen C und E gleich stark erleuchtet seyn, mithin gleiche scheinbare Klarheit haben, wenn man die Fläche der Oefnungen B und D gleich groß machte. Weil aber nicht alles auf A fallende Licht zurück strahlt, so muß man entweder B grösser oder D kleiner machen, damit die auf C und E fallenden Erleuchtungen gleich groß werden. Ist alsdenn der Oefnung B Fläche $= h^2$, der Oefnung D Fläche $= k^2$, so findet man $1 : q = h^2 : k^2$.

Wenn nemlich die Abmessungen der Oefnungen B und D in Vergleichung mit der Entfernung DE sehr klein sind, so ist die Erleuchtung, welche B nach C schicken würde, wenn alles Licht zurück strahlte, $= \frac{h^2 \sin \alpha^2}{DE^2}$, den Ausfluß- und Einfalls-Winkel, die hier beyde gleich groß sind, $= \alpha$ genommen. (36. §.) Allein die Erleuchtung in C ist $= \frac{k^2 \sin \alpha^2}{DE^2}$. Demnach ist das Verhältniß der Strahlenmengen, welche C im ersten und lezten Fall auffängt $= h^2 : k^2 = 1 : q$.

 346. §.

346. §.

Wenn eine Spiegelfläche von der auffallenden Lichtmenge L den Theil l zurück wirft, eine andre aber von der Lichtmenge Λ den Theil λ, so ist für jene Spiegelfläche $q = \frac{l}{L}$ für diese $= \frac{\lambda}{\Lambda}$. Setzt man also für leztere die Spiegelfläche $\frac{\lambda}{\Lambda} =$ Q, so ist $q : Q = \frac{l}{L} : \frac{\lambda}{\Lambda} = l \,.\, \Lambda : \lambda \,.\, L$, und in dem Fall $l = \lambda$ hat man $q : Q = \Lambda : L$. Um also das Zurückwerfungsvermögen zweyer Spiegelflächen von verschiedener Art mit einander zu vergleichen, bringe man die Oefnungen B und D gleich hoch an, und lasse das Licht auf C und E grade zu scheinen. Hinter der Tafel RS lege man beyde Spiegelflächen neben einander hin, so daß man in der einen das Bild von C, in der andern das Bild von E sehen kann. Das Verhältniß der Oefnungen B und D ändere man so lange, bis die Bilder von C und E in beyden Spiegeln gleiche Klarheit erlangen, so ist für diese Spiegel $l = \lambda$. Wenn also B > D, mithin C klärer als E ist, und die Buchstaben q, L, l, und Q, Λ, λ, mit den Spiegeln zusammen gehören, welche die Bilder von C und E auffangen; so hat man $q \ldots : Q = \frac{1}{L} : \frac{1}{\Lambda} = \Lambda : L = k^2 : h^2$.

Es ist nicht nothwendig, daß bey diesem Versuch die Tafel RS vertical stehe, man kann sie ein wenig rückwärts neigen, damit C und E das Licht

senk-

senkrecht auffangen, und desto mehr erleuchtet werden. Auch kann man alsdenn die Bilder von C und E in den Spiegeln bequemer sehen.

347. §.

Damit die Erleuchtung nicht zu schwach ausfalle, können die Oefnungen B und D nicht so gar klein seyn. Hr. **Bouguer** machte sie viereckt, und wenn sie am grösten waren, 7 bis 8 Zoll im Quadrat, da dann DE 7 bis 8 Fuß lang war. Alsdenn ist das Verhältniß 1 : M (339. §.) nur beynahe $= h^2 : k^2$, und wenn man es genauer haben wollte, so könnte man die Oefnungen B und D kreisrund einrichten, alsdenn aber die Formul des 75 §. brauchen, um die Erleuchtungen zu berechnen, welche B und D nach C und E schicken. Es sey DF auf der Ebene RS senkrecht, so ist nach der im 75 §. gebrauchten Bezeichnung DF $= a$, FE $= b$, und DE $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, wofür ich hier f schreiben will. Ferner sollen nun h und k die Halbmesser der Oefnungen B und D bedeuten. Dies vorausgesetzt, wäre die Erleuchtung, welche B nach C schickte, wenn der Spiegel alles auffallende Licht zurück würfe dem 75 §. gemäß $= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{f^2 - h^2}{\sqrt{(f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2}}\right)$, und man erhielt

$$1 : q = 1 - \frac{f^2 - h^2}{\sqrt{(f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$$: 1 - \frac{f^2 - k^2}{\sqrt{(f^2 - k^2)^2 + 4a^2k^2}}.$$ Bey dem Versuch im 346 §. aber wär $q : Q =$

 1 —

$$1 - \frac{f^2 - k^2}{\sqrt{((f^2 - k^2)^2 + 4a^2k^2)}} : 1 - \frac{f^2 - h^2}{\sqrt{((f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2)}}.$$

Wenn $h < \frac{1}{10} f$ ist, so ist die Formul

$$\frac{f^2 - h^2}{\sqrt{((f^2 - h^2) + 4a^2h^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 4a^2h^2 : (f^2 - h^2))}}$$

schon ziemlich nahe $= \frac{1}{\sqrt{(1 + 4a^2h^2 : f^2)}}$

$= \frac{1}{1 + 2a^2h^2 : f^2}$ 1 und 1 −

$$\frac{1}{1 + 2a^2h^2 : f^2} = \frac{2a^2h^2 : f^2}{1 + 2a^2h^2 : f} = \frac{2a^2h^2}{f^2 + 2a^2h^2},$$

oder beynahe $= \frac{2a^2h^2}{f^2}$. Das giebt alsdenn $1 : q = h^2 : k^2$, wie im 344 §., und $q : Q = k^2 : h^2$, wie im 345. §.

348. §.

Daß die Menge des zurückgeworfenen Lichts bey einerley Spiegelfläche zunehme, wenn der Einfallswinkel abnimmt, ist oben schon bemerkt worden, (341 342 §.) Diese Aenderung der Zurückwerfung bey Aenderung des Einfallswinkels richtet sich aber bey verschiedenen Spiegelflächen nicht nach einerley Gesetz. Hr. Bouguer hat diese Aenderung beym schwarzen Marmor am stärksten gefunden. (a. a. O. Liv. II. Sect. II. Art. II. p. 125.) Unter einem Winkel von

von 3° 35′ war das Verhältniß 1 : q = 1000 : 600. Unter den Winkeln von 15°, 30°, 80°, aber war es 1000 : 156, 1000 : 51, 1000 : 23. Bey metallenen Spiegeln war diese Aenderung der Zurückwerfung bey Aenderung des Einfallswinkels lange nicht so stark. Bey einem Versuch mit Quecksilber im finstern Zimmer unter dem Einfallswinkel von 21° war das Verhältniß 1 : q = 1000 : 637, ein andermahl = 1000 : 666. Weiter verglich Herr **Bouguer** das Zurückwerfungsvermögen des Quecksilbers und eines metallenen Spiegels nach der im 345 §. beschriebenen Methode; er fand bey kleinen Winkeln die Zurückwerfung des Quecksilbers etwas stärker, als des metallenen Spiegels, bey grössern Einfallswinkeln blieb der Unterschied kaum merklich. Uebrigens erinnert Hr. **Bouguer** noch, daß bey den Versuchen mit dem Quecksilber viele Vorsicht nöthig sey, theils weil die zärtsten Stäubchen, die auf das Quecksilber fallen, einen Theil des zurückgehenden Lichts aufhalten, theils weil die Oberfläche desselben in kleinen Gefäßen ein wenig erhaben, zuweilen aber in kleinen runden Gefäßen in der Mitte ein wenig hohl ausfällt: es wird aber bey allen den oben beschriebenen Arten, das zurückgeworfene Licht mit dem einfallenden zu vergleichen, vorausgesetzt, daß die Spiegelfläche völlig eben sey.

349. §.

Vor Herrn **Lambert** hat sich niemand mehr Mühe gegeben, als Hr. **Bouguer**, das Gesetz ausfündig zu machen, nach welchem sich das Verhältniß der einfallenden Strahlenmenge zur zurückgeworgeworfenen ändert, wenn der Einfallswinkel geändert wird: er glaubt aus einer Menge sorgfältig angestellter Versuche gefunden zu haben, daß die allgemeine Formul $q = A + B(\cos v \,.\, \eta)^3 + C \,.\, (\cos v \,.\, \eta)^6$ wenigstens für Wasser und Glaß richtig genug die Menge des zurückgeworfenen Lichts ausdrücke, wenn die Menge des einfallenden $= 1$ angenommen wird, und η den Einfallswinkel bezeichnet. (Traité d'optique Liv. II. Sect. II. Art. IV. V. pag. 134. — 137.) Wäre dies richtig, so würden drey Versuche für drey verschiedene Einfallswinkel genügen, die Coefficienten A, B, C, zu bestimmen. Beym Wasser glaubt Hr. Bouguer gefunden zu haben, sey $q = \frac{1}{55}$ für den Einfallswinkel $\eta = 90°$, und das giebt $A = \frac{1}{55}$. Eben so findet er $q = 0{,}097$ für $\eta = 25°$, und $q = \frac{3}{4}$ wenn η fast verschwindet. Das giebt ihm die Formul $q = \frac{1}{55} + \frac{1}{3}(\cos v \,.\, \eta)^3 + \frac{2}{5}(\cos v \,.\, \eta)^6$, und er theilt dabey für die Zurückwerfung von der Wasserfläche folgende Tafel mit, die er wie es scheint, aus Versuchen geschlossen hat.

η	q	η	q	η	q	η	q
$\frac{1}{2}$	0,721	5	0,501	$17\frac{1}{2}$	0,178	50	0,022
1	0,692	$7\frac{1}{2}$	0,409	20	0,145	60	0,019
$1\frac{1}{2}$	0,669	10	0,333	25	0,097	70	0,018
2	0,639	$12\frac{1}{2}$	0,271	30	0,065	80	0,018
$2\frac{1}{2}$	0,614	15	0,211	40	0,090	90	0,018

Beym Spiegelglase ist nach Hn. Bouguer $q = \frac{1}{40} + \frac{7}{10}(\cos v \,.\, \eta^3) + \frac{1}{40}(\cos v \,.\, \eta)^6$, und dabey giebt er folgende Tafel an für die zusammengehörigen Werthe von η und q

n	q	n	q	n	q
$2\frac{1}{2}$	0,584	15	0,299	50	0,034
5	0,543	20	0,222	60	0,027
$7\frac{1}{2}$	0,474	25	0,157	70	0,025
10	0,412	30	0,112	80	0,025
$12\frac{1}{2}$	0,356	40	0,057	90	0,025

Obgleich nach der Formul dem Winkel von 90° der Werth $q = \frac{1}{40}$ zugehört; so hat H. Bouguer doch bey andern Glasarten $q = \frac{1}{31}$ gefunden. Er nimmt daher oft im folgenden die Mittelzahl $q = \frac{1}{36}$ beym senkrecht auffallenden Licht. Die Würkung der starken Zurückwerfung der Sonnenstrahlen bey kleinen Einfallswinkeln von der Wasserfläche erfährt man im Sommer, wenn man sich gegen Abend am Ufer eines stillstehenden Wassers, und zwar an einer solchen Stelle befindet, wo man von den Sonnenstrahlen nicht allein grade zu, sondern auch zugleich von denjenigen getroffen wird, welche die Wasserfläche zurück wirft: man spürt daselbst eine merklich stärkere Hitze, als wenn man den Strahlen, die grade zu von der Sonne kommen, allein ausgesetzt ist.

350. §.

Wenn in einer durchsichtigen Masse ein Lichtstrahl auf die gemeinschaftliche Gränze dieser Masse mit einer andern dünnern Masse fällt, so weis man schon aus dem 124 §., daß das Licht nicht allemahl aus der dichtern Masse in die dünnere übergehe. Ist das Verhältniß der Refraction für Licht, daß aus der dichtern Masse in die dünnere übergehen soll, $= n : m$, also $m > n$; so erfolgt die Brechung nur so lange, als der Sinus des

Neigungswinkels $< \sqrt{\frac{n}{m}}$ oder der Sinus des Einfallswinkels $> \sqrt{\frac{m^2 - n}{m^2}}$ ist. Daher kommt es, daß die Menge des von der innern Gränze einer durchsichtigen Masse zurückgeworfenen Lichts, wenn diese Masse an eine dünnere gränzt, anfangs bey kleinen Einfallswinkeln sehr beträchtlich ist, hiernächst aber schnell abnimmt, wenn der Sinus des Einfallswinkels, (desjenigen, den der einfallende Strahl mit der Brechenden Fläche einschließt) größer als $\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}}$ wird. Wenn für Glas und Luft $n : m = 2 : 3$ ist, so hat man $\frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}7453559$ und der zu diesem Sinus gehörige Winkel beträgt 48° 11′ 23″. Wenn also in der 73 Fig. der Winkel MCB $<$ 48° 11′ 23″ ist, so geht gar kein Licht mehr nach Cc durch die Fläche RS. Aus dem 145 §. weis man nun, daß für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit richtiger $n : m = 20 : 31$ gesetzt werden müsse: das giebt hier $\frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m} = \sqrt{\frac{561}{961}} = \sqrt{0{,}58376691} = 0{,}7640464$, und zu diesem Sinus gehört ein Winkel von 49° 49′ 20″. Für Wasser und Luft ist $n : m = 3 : 4$, oder für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit genauer = 396 : 529: daraus findet man $\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}} =$ 0,6629071

0,6629072, und dieser Sinus gehört zu einem Winkel von 41° 32′. So lange demnach in der 73 Fig. beym Glase der Winkel MCB kleiner als 49° 49 $\frac{1}{3}$′ ist, so lange geht kein Licht durch RS, und die Zurückwerfung nach CD ist sehr stark: sobald aber MCB die Gränze von 49° 49′ zu übertreffen anfängt, sobald vermindert sich auf einmahl die Menge des zurückgeworfenen Lichts sehr stark, und ein Theil des Lichts geht durch RS nach Cc. Wie nun oben das Verhältniß des auf RS fallenden Lichts zur Menge des nach CD zurückgeworfenen $= 1 : p$ angenommen ist; so frägt sich, wie man die Zahl p für einen gegebenen Einfallswinkel durch Versuche finden könne?

351. §.

Es sey IK ein Stück Glas, das die Stelle des Spiegels A in der 107 Fig. vertritt, in B und D stelle man sich ein paar kleine weisse Tafeln vor, wie die im 340 §. beschriebenen waren, und aus der Vorderfläche des Glases werde das von B auf A fallende Licht zum Theil nach P zurückgeworfen, zum Theil nach E gebrochen; so würde nun das Auge in AP stehen müssen, wenn man nach Anleitung des 340 §. q finden wollte. Man müßte wie schon bekannt ist, das Bild von B im Spiegel IK, und zugleich D grade zu über dem Spiegel weg, beydes mit einem Blick übersehen, und dabey das Licht L so weit nach B rücken, bis das Bild von B im Spiegel, und D grade zu über dem Spiegel weg gesehen, beyde gleich helle erscheinen. Der nach E gebrochene Theil des Lichts ist der bisherigen Bezeichnung gemäß $= n$, daß in A auffallende

111. Fig.

Licht $= 1$ gesetzt, wegen der Undurchsichtigkeit des Glases aber fällt auf E nur der Theil $= \lambda n$, aus E wird nach F der Theil $p\lambda n$ zurückgeworfen, und auf F fällt davon ein Theil $= p\lambda^2 n$, wovon wiederum nur ein Theil $= mp\lambda^2 n$ in die Lage FO gebrochen wird. Steht nun das Auge in O, so sieht es ein Bild von B, das die hintere Fläche des Glases IK darstellet, wiewohl die Helligkeit desselben schon aus einem doppelten Grunde Abgang gelitten hat.

Nun sey der Neigungswinkel QAB $= \alpha$, der gebrochene Winkel QAR $= \beta$, die Dicke des Glases IK $= c$, so ist AE $= c \,.\, \sec \,.\, \beta =$ EF. Ueber dem Glase IK liege ein andres Stück Glas MN, das nochmahl so dick, als IK ist; so wird das Auge O, wenn es das Bild von B siehet, das die hintere Fläche von IK verursachet, oben über IK weg das Object D durch das Glas MN sehen. Der Strahl HΩ, welcher mit FO parallel ins Auge kommt, fällt aus D in der Lage DG $\#$ HΩ auf, und wird das erste mahl in die Lage GH, das zweyte mahl in die Lage HΩ gebrochen. Demnach ist auch SGD $= \alpha$, und GH $= 2c \,.\, \sec \beta =$ AE $+$ EF $= 2$ AE $= 2$ EF.

In G wird von dem aus D auffallenden Licht der Theil q nach GT zurückgeworfen, der Theil n aber in GH gebrochen; und weil GH $= 2$ AE ist, so fällt wegen der Undurchsichtigkeit des Glases auf H der Theil $\lambda^2 n$ (327 §.), und der Theil $m\lambda^2 n$ wird in HΩ gebrochen. Aus B falle auf A die Lichtmenge L, aus D auf G die Lichtmenge l; so empfängt das Auge O von B die Lichtmenge $mp\lambda^2 n$L, und von D die Lichtmenge $m\lambda^2 nl$.

Man

Man nähere das Licht L dem Object B soweit, bis das Bild von B in der Richtung OF gesehen, und das durch MN gesehene Object D gleich helle erscheinen, so kann man weiter eben so, wie im 340 §. schliessen. Die Klarheit der Tafel D sey $= \sigma$, der Tafel B $= \Sigma$, die Erleuchtung der ersten $= i$, der zweyten $= I$; so ist vermöge des Versuchs die Klarheit des Bildes von B $= m\lambda^2 n \,.\, \sigma$; und weil die von B auf A fallende Lichtmenge sich zu der nach FO zurückgeworfenen verhält, wie $1 : mp\lambda^2 n$; so hat man $1 : mp\lambda^2 n = \Sigma : m\lambda^2 n \,.\, \sigma$, mithin $p = \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{i}{I} = \frac{LB^2}{LD^2}$. Diese Zahl p gehört alsdenn mit dem Neigungswinkel QAR $=$ VEA $= \beta$, oder dem Einfallswinkel, KEA $= 90° - \beta$ zusammen. M. s. Bouguer Traité d' optique Liv. II. Sect. II. Art. VIII. pag. 152. sqq.

352. §.

Bey diesem Versuch hat man ein paar Stücken Glas nöthig, wovon jedes die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, und wovon das eine genau nochmahl so dick als das andre ist: beyde müssen von einerley Glasart, so viel möglich gleichartig und von gleicher Durchsichtigkeit seyn. Aus einem Stück sehr weissen und klaren Glases, daß 5 Linien dick war, lies Hr. Bouguer zwey Parallelepipeda in Form zweyer Lineale schneiden, wovon das eine 4 Linien, das andre 8 Linien breit war, und durch diese lies er das Licht nach der Richtung der Breite durchgehen. In dieser Richtung genommen, ist eine solche Glasart nie so gleichförmig

förmig durchsichtig, als in der Richtung der Dicke der Glastafel, woraus die Stücke geschnitten werden; daher schien auch das von der hintern Fläche zurückgeworfene Bild bey Wiederhohlung des Versuchs sowohl mit eben den Glasstücken, als auch mit andern, gewöhnlich ein wenig röther, als das grade zu durch das andre Stück Glas gesehene Object. Allein diese Unbequemlichkeit war nicht zu vermeiden, weil sonst nicht leicht zwey Stücken Glas wären zu erhalten gewesen, wovon eines genau eine nochmahl so große Dicke, als das andre gehabt hätte. Unter dem Einfallswinkel CAB von 75°, also dem Neigungswinkel QAB $= \alpha = 15°$; war $q = \frac{1}{38} = 0{,}025$, und Hr. Bouguer fand zugleich $p = \frac{1}{27}$ bis $\frac{1}{28}$ ohngefehr $= 0{,}036$. Es war also $\sin.$ VEA $= \sin\beta = \frac{2}{3}\sin 15° = 0{,}1725460$, und $\beta = 9°\ 56'$, mithin der Einfallswinkel KEA $= 80°\ 4'$. Bey mehrmahliger Wiederhohlung des Versuchs (ob auch unter andern Einfallswinkeln der Versuch sey wiederhohlt worden, sagt H. **Bouguer** nicht deutlich, vermuthlich ist es geschehen) schienen zuweilen beyde Zurückwerfungen von der vordern und hintern Fläche gleich stark zu seyn, gewöhnlich aber schein die Zurückwerfung von der hintern Fläche stärker zu seyn, als die von der Vorderfläche.

Es scheint also, daß man vermöge dieser Versuche des Hn. **Bouguer** berechtiget sey, anzunehmen, die Aenderung in der Menge des zurückgeworfenen Lichts von der hintern Fläche des Glases richte sich ohngefehr nach eben dem Gesetz, nach welchem die Zurückwerfung von der Vorderfläche erfolgt. Hätte dies seine Richtigkeit, so würde man

man die im 349 §. mitgetheilte Tafel, welche diese Aenderungen für die Vorderfläche anzeigt, leicht ergänzen können, so daß sie für jeden Einfallswinkel η auch den dazu gehörigen Werth p für die hintere Fläche anzeigte: es wäre nemlich allemahl ohngefehr $p = \frac{4}{3}\, q = \frac{4}{3}\,(A + B \operatorname{cosv} \eta^3 + C \,.\, \operatorname{cosv} \eta^6)$. (349 §.)

353. §.

Herr **Lambert** hat sich im I. und II. Cap. des zweyten Theils seiner **Photometrie** ganz anderer, von den hier beschriebenen sehr verschiedener, ungemein sinnreicher, Methoden bedient, um das von polirten Glastafeln zurückgeworfene, das durchscheinende und das zerstreuete Licht mit dem auffallenden zu vergleichen: sie dienen zugleich als Muster, wie man auch bey Untersuchungen über andere Gegenstände der mathematischen Naturlehre, Rechnungsschlüsse mit Versuchen verbinden kann, um der Natur in ihren geheimsten Würkungen nachzuforschen. Was ich bisher aus Hn. **Bouguers** Traité d'optique vorgetragen habe, dient als eine gute Vorbereitung, wenn man Hn. **Lambert** in seinen Schlüssen folgen will. Die Gründe dieser Lambertischen Theorie von der Durchsichtigkeit der Glastafeln werde ich hier zwar ebenfalls vortragen müssen; nur werde ich nicht alle Rechnungen bey den vom Herrn Lambert gemachten Anwendungen auf besondere Fälle durchführen können, weil ich nach der Absicht dieses Lehrbuchs auf so ganz specielle Untersuchungen, die mehr physikalisch als mathematisch sind, mich nicht einlassen kann. In den übrigen optischen Wissenschaften hat man überdem

dem die Resultate dieser auf Glastafeln eingeschränkten Untersuchungen nicht leicht für andre Fälle nöthig, als für den Fall des senkrecht auffallenden Lichts: und wenn es nur darauf ankommt, das senkrecht durch eine Glaslinse fallende Licht mit dem auffallenden zu vergleichen; so kann das im 218 §. schon erklärte Verfahren völlig genügen.

354. §.

Wofern man nicht mit Vorsatz sehr undurchsichtige Glastafeln zu den Versuchen wählt, so kann man anfangs die Undurchsichtigkeit derselben ganz beyseit setzen, und sie als vollkommen durchsichtig betrachten: wenigstens können die Gleichungen des 336 §. $M = \frac{q + p}{1 + p}$, $N = \frac{1 - q}{1 + p}$, also auch $M + N = 1$ für klare und dünne Glastafeln als beynahe richtig zum Grunde gelegt werden, und Hr. Lambert rechtfertiget diese Voraussetzung umständlich. Kann man nun durch einen Versuch finden, welches bekannte Verhältniß $M : N$ mit einem gleichfalls bekannten Einfallswinkel zusammen gehöre; so hat man vermöge der Gleichung $M + N = 1$ auch M und N. Die Gleichung $M = \frac{q + p}{1 + p}$ giebt ferner $p = \frac{M - q}{1 - M}$, und wenn zugleich q für eben den Einfallswinkel gefunden ist, so kann auch p vermittelst dieser Gleichung gefunden werden. Hat man solchergestalt für mehrere Einfallswinkel p und q durch Versuche gefunden, so entdeckt sich schon einiger massen das Gesetz, wie p und q von dem Einfallswinkel abhängen; also

kann

kann man hiernächst entweder nach einer physikalischen oder sonst muthmaßlich gewählten Hypothese ein paar Gleichungen, eine zwischen q, die andre zwischen p und dem Einfallswinkel annehmen, und daraus für andre Einfallswinkel zuerst p und q, und hiernächst M und N, mithin auch die Zahl $\frac{M}{N}$ berechnen. Wie nun durch anderweitige Versuche wieder geprüft werden kann, welcher Einfallswinkel mit der Zahl $\frac{M}{N}$ zusammen gehöre, so muß sich solchergestalt entdecken, wie weit die angenommenen Gleichungen mit dem Erfolg in der Natur überein kommen, oder nicht.

355. §.

Für einen gegebenen Einfallswinkel η ist das Verhältniß M : N bekannt, wenn das Licht durch eine sehr durchsichtige Glastafel fällt: man soll das Verhältniß des zurückgeworfenen und durchgehenden Lichts zum einfallenden finden, wenn es durch mehrere in paralleler Lage hinter einander gestellte Glastafeln scheint, und der Einfallswinkel auf die vordere derselben bleibt.

Aufl. Es sey x die Anzahl der hinter einander befindlichen Glastafeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und das in der Richtung AB auffallende Licht $= 1$ theile sich so, daß nach C ein Theil $= \varrho$ zurückgeworfen werde, nach D aber ein Theil $= r$ durchgehe, so soll man ϱ und r finden. Man nehme an, es komme noch eine Glastafel ζ hinzu, so daß nun die 112. Fig.

die Anzahl aller Glastafeln $= x + 1$ ist; so wird das durch die übrigen schon durchgefallene Licht die lezte Tafel ζ unter eben dem Einfallswinkel treffen, und vermöge der Voraussetzung ist das Verhältniß des davon zurückstrahlenden Lichts zum auffallenden $= M : 1$, des durchscheinenden zum auffallenden aber $= N : 1$. Es falle also in der Richtung AB auf die vordere Tafel die Lichtmenge $= 1$, so hat man vermöge der Voraussetzung folgende Lichtmengen.

Die nach C zurückstrahlende $= \varrho$
— nach D durchscheinende $= r$
— nach E zurückstrahlende $= Mr$
— nach F durchscheinende $= Nr$
— nach G durchscheinende $= Mr^2$
— nach H zurückstrahlende $= Mr\varrho$
— nach I zurückstrahlende $= M^2 r\varrho$
— nach K durchscheinende $= NMr\varrho$
— nach L durchscheinende $= M^2 r^2 \varrho$
— nach M zurückstrahlende $= M^2 r\varrho^2$
— nach N zurückstrahlende $= M^3 r\varrho^2$
— nach O durchscheinende $= NM^2 r\varrho^2$
— nach P durchscheinende $= M^3 r^2 \varrho^2$,

u. s. f. Demnach geht von allen $x + 1$ Tafeln zurück die Lichtmenge

$$R = \varrho + Mr^2 + M^2 r^2 \varrho + M^3 r^2 \varrho^2 + \dots$$

und durch alle scheint durch die Lichtmenge

$$S = Nr + NMr\varrho + NM^2 r\varrho^2 + NM^3 r\varrho^3 \dots$$

Weil nun, das erste Glied der Reihe R ausgenommen, beyde Reihen geometrische Progreßionen sind, und der Exponent $= M\varrho$ ist, so hat man

$$R = \varrho + \frac{Mr^2}{1 - M\varrho} \text{ und } S = \frac{Nr}{1 - M\varrho}.$$

Wären

Wären die Glastafeln vollkommen durchsichtig, so hätte man $M + N = 1$ und $\varrho + r = 1$. Demnach setze man in der ersten Gleichung $r = 1 - \varrho$, so erhält man $R = \varrho + \frac{M(1 - 2\varrho + \varrho^2)}{1 - M\varrho}$ oder $R = \frac{\varrho + M - 2M\varrho}{1 - M\varrho}$. In der zweyten Gleichung setze man $M = 1 - N$, $\varrho = 1 - r$, so wird $S = \frac{Nr}{N + r - Nr}$. Wäre nun ausser ζ die Glastafel α allein vorhanden, so wäre $M = \varrho$, $N = r$, demnach ist

für 2 Glastafeln

$R = \frac{2M}{1 + M}$ und $S = \frac{N}{2 - N}$. Kömmt ausser α und ζ die dritte Tafel β hinzu, so ist vermöge des gefundenen für 2 Glastafeln α und β die Zahl

$\varrho = \frac{2M}{1 + M}$ und $r = \frac{N}{2 - N}$, also

für 3 Glastafeln

$$R = \left(\frac{2M}{1 + M} + M - \frac{4M^2}{1 + M}\right) : \left(1 - \frac{2M^2}{1 + M}\right)$$

oder $R = \frac{3M - 3M^2}{1 + M - 2M^2} = \frac{3M}{1 + 2M}$,

und $S = \frac{N^2}{2 - N} : \left(N + \frac{N}{2 - N} - \frac{N^2}{2 - N}\right)$

oder $S = \frac{N^2\ N^2}{3N - 2N^2} = \frac{N}{3 - 2N}$.

Schreibt man x statt der Zahl 3, so ist

$$R = \frac{x \cdot M}{1 + (x-1) M}, \text{ und } S = \frac{N}{x - (x-1) N}.$$

Wofern diese Formuln für x Glastafeln wahr sind, so sind sie auch für $x + 1$ Glastafeln wahr. Denn man setze $\varrho = \frac{x \cdot M}{1 + (x-1) M}$, $r = \frac{N}{x - (x-1) N}$, in den allgemeinen Formuln

$$R = \frac{\varrho + M - 2 M \varrho}{1 - M \varrho}, \quad S = \frac{Nr}{N + r - Nr}$$

so findet man

für $x + 1$ Glastafeln

$$R = \left(\frac{x \cdot M}{1+(x-1)M} + M - \frac{2x \cdot M^2}{1+(x-1)M}\right) : \left(1 - \frac{x \, M^2}{1+(x-1)M}\right)$$

$$= \frac{(x+1)M - (x+1)M^2}{1 + (x-1)M - x M^2} = \frac{(x+1) M (1-M)}{(1+xM)(1-M)}$$

oder $R = \frac{(x+1) M}{1 + x M}$.

Ferner findet man

$$S = \frac{N^2}{x-(x-1)N} : \left(N + \frac{N}{x-(x-1)N} - \frac{N^2}{x-(x-1)N}\right)$$

$$= \frac{N^2}{(x+1) N - x \cdot N^2} = \frac{N}{x + 1 - x N}.$$

Wie nun beyde Formuln für 2 und 3 Glastafeln wahr sind, so sind sie vermöge des erwiesenen auch für 4, 5, 6, 7, und jede folgende um 1 grössere Zahl von Glastafeln wahr. Demnach ist überhaupt

für x Glastafeln

$$R = \frac{x \cdot M}{1 + (x-1) M}, \quad S = \frac{N}{x - (x-1) N}.$$

356. §.

Weil der Voraussetzung gemäß $M + N = 1$, also auch $S = \frac{1 - M}{x - (x - 1)(1 - M)} = \frac{1 - M}{1 + (x - 1) M}$ ist, so bleibt auch $R + S = 1$. Man nehme an, für einen gewissen Einfallswinkel η scheine durch alle Glastafeln eben so viel Licht durch, als davon zurück strahlet, so hat man $R = S = \frac{1}{2}$, mithin $\frac{x \cdot M}{1 + (x - 1) M} = \frac{1}{2}$ und $\frac{N}{x - (x - 1) N} = \frac{1}{2}$. Das giebt $2x M = 1 + (x - 1) M$, also $M = \frac{1}{1 + x}$ und $2N = x - (x - 1) N$, mithin $N = \frac{x}{1 + x}$, und $\frac{M}{N} = \frac{1}{x}$. Kann man nun durch einen Versuch finden, wie groß der Einfallswinkel η sey, wenn von demjenigen Licht, das durch x Glastafeln scheint, eben so viel zurück strahlet, als durchgehet; so ist zugleich η der Einfallswinkel, unter welchem das Licht auf eine dieser Glastafeln fallen muß, wenn es sich in dem Verhältniß $M : N = 1 : x$ theilen soll. Hr. Lambert hat den Versuch auf folgende Art angestellet. (Photom. 332. 377. §.)

Auf der weissen wagrecht liegenden Ebene ABCD war ein schwarzer oder sonst gefärbter Strich IK eine Linie breit gezogen, so viel thunlich 113. Fig.

durchgängig von gleiförmiger Schwärze, oder sonst überall gleichförmiger Farbe. Auf dieser Ebene waren eine oder mehrere Glastafeln in paralleler Lage hinter einander lothrecht so aufgerichtet, daß die Grundlinie EH mit der Linie IK in ihrer Mitte bey L einen Winkel ILE machte, der nur um wenige Grade kleiner war, als ein rechter Winkel: solchergestalt sahe das Auge O des Zuschauers den hintern Theil LI des Strichs in LQ vermittelst des gebrochenen Lichts, den vordern Theil LK aber in LP vermittelst des zurückstrahlenden Lichts. Die Ebene AC selbst ward entweder von den auffallenden Sonnenstrahlen, oder vom Tageslicht, oder im ganz finstern Zimmer vom Kerzenlicht gleich stark, und zwar in der Stellung erleuchtet, daß die Strahlen mit den Glastafeln parallel auffielen, mithin leztere keinen Schatten auf den vordern oder hintern Theil der Ebene AC werfen konnten. Keiner von beyden Theilen des Strichs sahe nun völlig schwarz, oder völlig so gefärbt aus, wie derselbe ohne Glas gesehen erschien. Denn mit dem Bilde des hintern Theils LI vermischte sich das weisse von LN reflectirte Licht, und mit dem Bilde des vordern Theils vermischte sich das weisse von LM durchscheinende Licht: daher sahen die Bilder des schwarzen Strichs aschfarbicht, die Bilder des gefärbten Strichs blasser gefärbt aus, als die Striche selbst. Nun kam es darauf an, für das Auge eine solche Stelle zu suchen, aus welcher beyde Bilder gleich aschfärbig, oder sonst gleich blaß gefärbt erschienen: und das ließ sich um deswillen leicht bewerkstelligen, weil die Klarheit des einen Bildes zunimmt, wenn bey geän-

derter

derter Stelle des Auges sich die Klarheit des andern vermindert. Uebrigens muste das Auge O soweit entfernt seyn, daß die Lage der in dasselbe kommenden Strahlen von der parallelen Lage nicht zu sehr verschieden war.

Hatte nun das Auge die erforderliche Stelle, so waren die Winkel NQL, KPK, IQL, MPL, als die Einfallswinkel für das ins Auge kommende zurückstrahlende und gebrochene Licht gleich groß, auch konnte eines jeden Grösse gefunden werden, wenn auf der Glastafel LP oder LQ gemessen war, weil $\frac{LK}{LP} = \frac{LN}{LQ}$ die Tangente eines jeden dieser Winkel giebt. Wegen der gleichen Erleuchtung der Ebene AC auf beyden Seiten der Glastafeln, und der Gleichheit der Ausflußwinkel bey N, K, I, M, fällt auf ein paar zusammen gehörige Stellen P, Q, gleich viel Licht, und wegen dergleichen scheinbaren Klarheit der Bilder kommt von beyden gleichviel Licht ins Auge. Von K oder I falle auf P oder Q die Lichtmenge α, davon strahle zurück der Theil $r\alpha$, und scheine durch der Theil $s\alpha$; von N oder M falle auf P oder Q die Lichtmenge β, so strahlt zurück der Theil $r\beta$, und es scheint durch der Theil $s\beta$. Demnach kommt von P ins Auge die Lichtmenge $r\alpha + s\beta$, und von Q die Lichtmenge $s\alpha + r\beta$. Beyde sind vermöge des Versuchs gleich groß, also $(r - s)\,\alpha = (r - s)\,\beta$. Weil aber α und β ungleich sind, so kann diese Gleichung nur unter der Bedingung bestehen, daß $r = s$ sey. Das heißt, von dem auffallenden Lichte strahlt so viel zurück, als durch die über EH befindliche eine, oder mehrere hinter einander gestell- ten, Glastafeln durchscheint.

Die von Hn. Lambert angestellten Versuche gaben folgende Resultate.

Zahl x d. Glastaf.	Wink. η	M = $1:(1+x)$	N = $x:(1+x)$	Verh. M : N
1	$14\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 : 1
2	22	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1 : 2
3	27	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1 : 3
4	31	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1 : 4
5	35	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1 : 5
6	39	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1 : 6
7	43	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	1 : 7
8	47	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1 : 8
9	$50\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	1 : 9

357. §.

114. Fig. Ueber der weissen Fläche AD stehe eine Glastafel AB lothrecht, welche das in der Richtung LE auffallende Licht auf AH zurück wirft. Neben dieser Tafel sey ein dreyseitiges gläsernes Prisma auf eine von seinen Seitenlinie so gelegt, daß diese Seitenlinie mit der Grundlinie der Tafel in grader Linie liege, und die dem Licht zugekehrte Seitenfläche AC das davon zurück strahlende Licht auf AG werfe. Die Neigung dieser Seitenfläche AC ändre man so lange, bis AG und AH gleich stark erleuchtet erscheinen, wobey man sorgfältig verhüten muß, daß auf diese Stellen sonst kein Licht fällt, als das von der Glastafel und dem Prisma zurückgeworfene. Das von der Glastafel zurückstrahlende Licht ist nach der bisherigen Bezeichnung $=$ M, das vom Prisma zurückstrahlende $= q$, und zu jenem

gehört

gehört der Einfallswinkel BEL = AEH, zu diesem der Einfallswinkel CFL = AFG. Der Winkel BEL = AEH = 90° — AHE läßt sich messen, und wenn auch BAC gemessen ist, so hat man CFL = EFA = BEL — BAC. Es ist aber die Klarheit der Fläche AH $= \frac{M}{AH}$, der Fläche AG $= \frac{q}{AG}$, und die eine ist vermöge des Versuchs der andern gleich: also hat man $q = \frac{M \cdot AG}{AH}$, wenn M schon gefunden ist. Zwey verschiedene Versuche, die Hr. Lambert anstellte, fielen aus, wie folget.

	1. Versuch	2. Versuch.
AE	= 1	= 1
AH	= 0,9	= 2,1
AG	= 0,67	= 1,02
BEL	= 42°	= 65°
BAC	= 15°	= 19°
CFL	= 27°	= 46°

Im ersten Versuch gehörte also zu M der Einfallswinkel $\eta = 42°$, und vermöge des 356 §. ist

$$\text{diff. } \tfrac{1}{56} \begin{array}{l} M = \tfrac{1}{7} \text{ wenn } \eta = 39° \\ M = \tfrac{1}{8} \text{ wenn } \eta = 43°. \end{array} \text{ diff. } 4°.$$

Man subtrahire also $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{56} = \frac{1}{224}$ von $\frac{1}{8}$ und nehme $\frac{1}{8} - \frac{1}{224} = \frac{27}{224} = 0,12054 = M$ für $\eta = 42°$, so findet man $q = \frac{67 \cdot 0,12054}{90} = 0,08972$ für den Winkel $\eta = 27°$. Für eben diesen

sen Winkel ist $M = \frac{1}{4}$, also $p = \frac{M - q}{1 - M}$ (353 §.) $= \frac{4}{3} \cdot 0{,}16028 = 0{,}21371$.

Im zweyten Versuch ist der zu M gehörige Einfallswinkel $\eta = 65°$, und dazu gehört nach einer andern Beobachtung des Hn. Lambert $M = \frac{1}{13}$, mithin ist $q = \frac{1}{13} \cdot \frac{102}{210} = \frac{1}{13} \cdot \frac{51}{105} = 0{,}03736$ wenn der Einfallswinkel $\eta = 46°$ ist. Weil dieser dem Winkel von 47° in der Tabelle am Ende des 356 §. sehr nahe kommt, so ist für $\eta = 46°$ auch noch beynahe $M = \frac{1}{9}$, und man hat für eben den Winkel $p = \frac{M - q}{1 - M} = \frac{9}{8} = 0{,}08297$.

358. §.

115. Fig. Eine Glastafel AB sey gegen die weisse Ebene DF unter dem Winkel FAB $= \alpha$ geneigt, und das in der Richtung LC auffallende Licht werde zum Theil nach CE zurück geworfen, so wie der übrige Theil nach CD durchscheint. Bey stärkerer Neigung der Tafel nimmt der Einfallswinkel BCL ab, da dann zugleich die zurückgeworfene Lichtmenge wächst, und die durscheinende abnimmt. Man kann also die Lage der Tafel suchen, welche erfordert wird, damit beyde Stücke AD und AE der weissen Ebene gleich stark erleuchtet erscheinen, wobey wiederum alles fremde Licht möglichst abgehalten werden muß. Auf AE fällt alsdenn die Erleuchtung $\frac{M}{AE}$, auf AD die Erleuchtung $\frac{N}{AD}$, und

man

man hat vermöge des Versuchs $\frac{M}{AE} = \frac{N}{AD}$, oder $\frac{M}{N} = \frac{AE}{AD}$ für den Einfallswinkel BCL = ACD = ACE. Wenn aber FAC = α gemessen ist, so hat man auch tg . ACE = $\frac{AE \sin\alpha}{AC - AE \cos\alpha}$.

Stellt man diesen Versuch mit Glastafeln von mehrerer und minderer Durchsichtigkeit an, so findet man allemahl sehr nahe das Verhältniß M : N mit einem solchen Einfallswinkel zusammen gehörig, wie es mit der Tabelle am Ende des 356 §. übereinstimmt, und man kann sich solchergestalt versichern, daß das Verhältniß M : N für einen gegebenen Einfallswinkel nur sehr geringe Aenderungen leide, wenn gleich die Durchsichtigkeit der Glastafel nicht allemahl einerley ist.

359. §.

Wenn η den Einfallswinkel, (die Neigung des einfallenden Lichts gegen die zurückwerfende oder brechende Fläche, wie im 349 §.) bezeichnet, und die Buchstaben q, p, eben die Bedeutung behalten, worin sie bey der ganzen bisherigen Untersuchung sind gebraucht worden; so ist nach Hn. **Lambert** (Photom. 425 - 438 §.) $l \frac{1}{1-q} = \alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\eta^2$ und $l \frac{1}{1-p} = \alpha' \,.\, \mathrm{cosec}\,\eta^2$. Ferner bestimmt Herr **Lambert** die Coefficienten α und α' aus seinen Versuchen so, daß $\alpha = 0{,}0087214$ und $\alpha' = 0{,}0199966$ seyn müsse, wenn das l den briggischen Logarithmen bezeichnet. Diesemnach hätte man

$$l\,\frac{1}{1-q} = 0{,}0087214\,.\,\mathrm{cosec}\,\eta^2$$

$$l\,\frac{1}{1-p} = 0{,}0199966\,.\,\mathrm{cosec}\,\eta^2.$$

Wieweit diese Gleichungen mit dem überein kommen, was die Versuche lehren, läßt sich aus der nachstehenden Tafel übersehen.

Winkel	durch Rechnung			aus Beobacht.
η	q	p	M	M
$14\frac{1}{2}°$	0,2741	0,5136	0,5205	0,5000
22	0,1333	0,2753	0,3204	0,3333
27	0,0928	0,1968	0,2421	0,2500
31	0,0729	0,1566	0,1985	0,2000
35	0,0592	0,1283	0,1663	0,1667
39	0,0494	0,1078	0,1428	0,1429
43	0,0423	0,0925	0,1234	0,1250
47	0,0368	0,0810	0,1091	0,1111
$50\frac{1}{2}$	0,0332	0,0731	0,0991	0,1000

Wie nun die Resultate der Rechnung den Resultaten, welche die Versuche gaben, so nahe kommen, wie bey so verwickelten Untersuchungen nur erwartet werden kann; so hat man Grund genug beyde Gleichungen als solche anzunehmen, wonach man benöthigten Falles, ohne sehr zu fehlen rechnen kann. Herr Lambert selbst hat daraus folgende Tafel für Einfallswinkel von 10 zu 10 Graden berechnet.

η	q	p	M	N
10°	0,4862	0,7766	0,7108	0,2892
20	0,1578	0,3204	0,3622	0,6378
30	0,0772	0,1653	0,2070	0,7930
40	0,0474	0,1046	0,1376	0,8624
50	0,0337	0,0705	0,0973	0,9027
60	0,0264	0,0585	0,0802	0,9198
70	0,0225	0,0499	0,0690	0,9310
80	0,0203	0,0450	0,0624	0,9376
90	0,0199	0,0448	0,0619	0,9381

Nach Hn. **Lambert** würde also die Vorderfläche einer Glastafel $\frac{1}{50}$ des senkrecht auffallenden Lichts zurückwerfen, anstatt daß nach Hn. **Bouguer** das senkrecht zurückstrahlende Licht $\frac{1}{36}$ bis $\frac{1}{40}$ des auffallenden betragen würde. (349 §.) Das von der hintern Fläche senkrecht zurückstrahlende beträgt dagegen nach Hn. **Lambert** mehr als nach Hn. **Bouguer**, nemlich $\frac{1}{23}$ ohngefehr, und nach Herrn **Bouguer** nur $\frac{1}{27}$, zuweilen etwas mehr. Uebrigens ist hiebey noch folgende Anmerkung nöthig, wenn man etwa die Resultate der Lambertschen Untersuchungen mit den Bouguerschen im 349 und 352 §. vergleichen will. Herr Lambert setzt voraus, das Licht falle auf eine Glastafel, wie PQRS (73 Fig.), und bey ihm ist η = PBA, oder nach seiner Bezeichnung LBA = γ. Wenn nun q vermittelst der Gleichung $l\,\frac{1}{1-q} = \alpha\,.\,\mathrm{cosec}\,\eta^2 = \alpha\,.\,\mathrm{sec}\,\gamma^2$ gefunden ist, so scheint es, man müsse um p zu finden in der Gleichung $l\,\frac{1}{1-p} = \alpha'\,.\,\mathrm{cosec}\,\eta^2 = \alpha'\,\mathrm{sec}\,\gamma^2$ für η den Winkel MCB oder

für

für γ den Winkel MBC nehmen: allein Hr. Lambert sagt im 437 §. seiner Photometrie, das solches mit seinen Versuchen nicht überein stimme. Bey Berechnung der zuletzt mitgetheilten Tafel ist vielmehr der Winkel $\eta = PBA$, oder $\gamma = LBA$ beybehalten worden, wiewohl es doch scheint, daß H. Lambert Verbesserungen angebracht habe, die sich auf den 439 und 440 §. seiner Photometrie gründen, die er aber nicht deutlich anzeigt. Nach Hn. Bouguer würde man p vermittelst der Gleichung $p = \frac{4}{3}(A + B \,.\, \mathrm{cosv}\,\eta^3 + C \,.\, \mathrm{cosv}\,\eta^6)$ (349. 352 §.) finden, den Winkel $\eta = MCB$ gesetzt: nach Herrn Lambert aber wäre für Glastafeln l

$$\frac{1}{1-p} = \alpha' \,.\, (\sec \mathrm{Ang.} \sin \tfrac{31}{20} \sin (90^\circ - \eta))^2.$$

360. §.

Es sey nun, daß die eine oder die andre dieser Gleichungen den Vorzug verdiene, so kann doch keine derselben für solche Winkel η gebraucht werden, die beym Glase weniger als $49^\circ\ 49\tfrac{1}{3}'$, und beym Wasser weniger als $41^\circ\ 32'$ fassen. Wird $\eta < 49^\circ\ 49\tfrac{1}{3}'$, so ist $90^\circ - \eta > 40^\circ\ 10\tfrac{2}{3}'$, und $\tfrac{31}{20} \sin (90^\circ - \eta) > 1$, mithin kann die Lambertsche Gleichung nicht mehr bestehen. Auch des H. Bouguer Gleichung ist nicht weiter brauchbar: denn für Einfallswinkel, die nur ein wenig kleiner sind, wächst auf einmahl p sehr schnell, und die Zurückwerfung ist beym Glase für alle Winkel, die kleiner als $49^\circ\ 49\tfrac{1}{3}'$ sind, beym Wasser aber für Einfallswinkel die kleiner sind, als $41^\circ\ 32'$ eben so stark, als die Zurückwerfung metallener Spiegel und des gereinigten Quecksilbers. Weil übrigens alsdenn durch die hintere Fläche gar kein Licht mehr durchgehet; so ist sie in so fern, wie die Fläche des Quecksilbers, oder eines metallenen Spiegels als undurchsichtig zu betrachten: der Theil des Lichts, welcher mit zurückgeworfen wird, ist als verlohren anzusehen. Eben diese merkwürdige Eigenschaft der innern Gränze einer durchsichtigen Masse, wenn ausserhalb derselben eine Masse von geringerer Dichtigkeit befindlich ist, kann verursachen, daß ein gläsernes mit Luft umgebenes Prisma die Natur eines undurchsichtigen Körpers annimmt, und gar kein Licht durchläßt, dagegen aber einen großen Theil des auffallenden Lichts zurück wirft. Die Umstände, unter welchen dies erfolgen muß, kennet man schon aus dem 133 §.

Ein Versuch der diese starke Zurückwerfung von der innern Fläche des Wassers beweiset, läßt sich so anstellen. In ein gewöhnliches cylindrisches 116.
Trinkglas, oder noch besser, in ein gläsernes Ge- Fig.
fäß, daß die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, und aus reinen durchsichtigen weissen Glase bestehet, giesse man auf den Boden Quecksilber bis an AB, und oben drüber Wasser bis an CD. Die Figur stellt einen verticalen Schnitt des Gefässes vor, der entweder durch die Axe des Cylinders geht, oder wenn es ein Parallelepipedum ist, zwey einander gegen über stehenden Seitenflächen senkrecht schneidet. In dieser Verticalfläche befinde sich ein weisses erleuchtetes Object bey G, und gegen über in O stehe das Auge, welches das von beyden Flächen AB und CD aus E und F zurück geworfene Licht empfängt: so siehet das Auge

zwey

zwey Bilder von G, das eine in H, das andre in I, und diese beyden Bilder erscheinen allemahl sehr nahe gleich helle, wenn die Winkel BEO, DFO, weniger, als $41\frac{1}{2}$ Grade betragen. Die Menge des von der innern Wasserfläche CD zurückgeworfenen Lichts beträgt also etwa $\frac{2}{3}$ und für die kleinsten Einfallswinkel $\frac{3}{4}$ des einfallenden Lichts, der übrige dritte oder vierte Theil des einfallenden Lichts wird entweder nach allen Seiten zerstreuet, oder ist doch sonst als verlohren anzusehen.

361. §.

Ob nun gleich die innere Fläche des Glases und anderer durchsichtiger Massen so lange kein Licht durchläßt, bis der Neigungswinkel gegen das Einfallsloth bis auf eine gewisse Gränze abgenommen hat, oder der Einfallswinkel, welchen der Strahl mit der Fläche selbst macht, eine gewisse Gränze übertrift; so wirft sie doch bey eben den Umständen, wie schon bemerkt ist, nicht alles auffallende Licht zurück, sondern etwa nur $\frac{3}{4}$ desselben, und $\frac{1}{4}$ wird nach allen Seiten zerstreuet oder geht sonst verlohren. Dies kann auf die Vermuthung leiten, es werde die Fläche etwas von dieser Eigenschaft auch alsdenn noch an sich behalten, wenn die Einfallswinkel so groß werden, daß das Licht wieder durchgehet. Wäre diese Vermuthung gegründet, so könnte man im 336 §. nicht mehr $p + m = 1$ annehmen, es wäre vielmehr $p + m < 1$. Verhielte sich nemlich die Menge des bey C zerstreueten Lichts (73 Fig.) zur Menge des auffallenden, wie $\mu : 1$, so hätte man $p + m + \mu = 1$. Bey so bewandten Umständen würde nun die Untertersuchung über die eigentlichen Werthe der Zahlen q, p, m, n, λ im 339. u. f. §. §. noch weitläuftiger, zumahl da nicht zu zweifeln ist, daß nicht auch ein Theil des bey B auffallenden Lichts nach allen Seiten zerstreuet werde, der nicht in die Masse eindringt. Wäre das Verhältniß der bey B zerstreueten Lichtmenge zur auffallenden $= \nu : 1$, so hätte man $q + n + \nu = 1$. Herr Bouguer scheint anzunehmen, daß die Zerstreuung bey B so beträchtlich nicht sey, als die bey C, und daß ohne merklichen Fehler $q + n = 1$ gesetzt werden könne. Ich beziehe mich hiebey auf sein oft angeführtes Werk Liv. II. Sect. II. Art. IX. pag. 156. sqq. und ich werde seine Gedanken noch weiter zu erläutern suchen.

362. §.

Wenn das Licht durch eine Glastafel RPQS fällt, und die auffallende Lichtmenge = 1 gesetzt 94 F.
wird, so ist vermöge des 335 §. die gesammte durchgehende Lichtmenge $N = \frac{m\lambda n}{1 - p^2 \lambda^2}$. Es ist die Summe aller der Lichtmenge, welche in den Richtungen Cc, Ee, Gg, u. s. f. durchgehen, und eine geometrische Progreßion ausmachen, wovon das erste Glied $m\lambda n$, der Exponent der Glieder $p^2 \lambda^2$ ist. In Fällen, wenn der Strahl AB entweder völlig oder beynahe senkrecht auffällt, fallen die durchgehenden Strahlen Cc, Ee, Gg, u. s. f. zusammen, und man kann die Strahlen Cc, Ee, u. s. f. nicht einzeln auffangen. Wenn demnach das Licht an den Stellen B, C, D, E, u. s. f. wegen

der Zerstreuung nicht geschwächt würde, so wäre die senkrecht durch eine solche Glastafel fallende Lichtmenge $= \frac{m\lambda n}{1 - p^2 \lambda^2}$. Um nun die Verminderung des Lichts wegen der erwehnten Zerstreuung auf die bequemste Art in Rechnung zu bringen, nehme man an, wegen der Zerstreuung an den Stellen B und C zusammen, gehe von der Lichtmenge, die sonst nach C*c* durchgehen würde, ein Theil verlohren, der sich zum ganzen wie $r : 1$ verhält, so geht nur ein Theil $= m \lambda n (1 - r)$ nach C*c* durch. Man nehme $1 - r = s$ an, so erhellet leicht, wenn man die Schlüsse des 335 §. vergleicht, daß nach E*e* die Lichtmenge $mp^2 \lambda^3 ns$ gehe, vorausgesetzt, daß beyde Zerstreuungen an D und E zusammen, das Licht in eben dem Verhältniß vermindern, als die Zerstreuungen an B und C zusammen es verminderten. Nach G*g* geht also die Lichtmenge $mp^4 \lambda^5 ns^3$ u. s. f., und die gesammte durchfallende Lichtmenge ist eine geometrische Progreßion, wovon das erste Glied $m\lambda ns$, der Exponent der Glieder $p^2 \lambda^2 s$ ist. Diesemnach leidet der Ausdruck für N im 335 §. diese Verbesserung, daß eigentlich $N = \frac{m\lambda ns}{1 - p^2 \lambda^2 s}$ angenommen werden muß: und dies ist zugleich die Lichtmenge, welche nach C*c* durchgehet, wenn das Licht senkrecht durchscheint, und alle übrige Strahlen E*e*, G*g*, u. s. f. mit C*c* zusammen fallen. Wenn auf diese Art die Zahl $s = 1 - r$ in die Rechnung eingeführt wird, so bedarf es dessen nicht, daß man die Zahlen μ und ν wie im 361 §. in Rechnung

nung bringe: es bleibt $q + n = 1$, $p + m = 1$: nur muß man alsdenn durch n die Lichtmenge verstehen, die bey B nach der Zurückwerfung übrig bleibt, und sowohl die in B noch zerstreuete als die hineindringende zusammen genommen ausmacht. Eben so ist durch m die nach der Zurüwerfung in C noch übrige Lichtmenge zu verstehen, die zum Theil zerstreuet wird, zum Theil nach Cc durchgehet.

Nun sind die Zahlen $n = 1 - q$, $m = 1 - p$ zwar eigentliche Brüche, sie sind aber von der Einheit nicht viel verschieden: denn man weis schon, daß bey Glastafeln ohngefehr $q = \frac{1}{36}$ vielleicht nur $\frac{1}{30}$, $p = \frac{1}{27}$ sey. Das auch r nur ein kleiner Bruch, mithin $s = 1 - r$ von der Einheit nicht sehr verschieden seyn werde, läßt sich ebenfalls zum voraus vermuthen, so wie auch s von der Einheit nicht sehr verschieden seyn kann; es müste denn das Glas sehr dick, oder für sich sehr undurchsichtig seyn. Uebrigens ist $p^2 = \frac{1}{729}$, also ist gewöhnlich $p^2 \lambda^2 s$ ohngefehr $= \frac{1}{1000}$, weil auch λ^2 und s eigentliche Brüche sind; demnach ist gewöhnlich N ohngefehr $= \frac{1000}{999} . m\lambda n s$, oder es kommt auch wohl die Zahl N der Zahl $m\lambda n s$ noch näher. Wie nun überall bey diesen Rechnungen keine grosse Schärfe statt findet, so kann man zur Erleichterung der folgenden Untersuchungen, auch wenn das Licht senkrecht durch die Glastafel fällt, annehmen, es gehe nach der Richtung Cc die Lichtmenge $m\lambda n s$ durch, wenn gleich das von den übrigen Zurückwerfungen herrührende Licht jene Lichtmenge etwa noch um ihren tausendsten Theil vergrössert.

363. §.

117. Fig. Es stelle nunmehro A ein dickes Stück Glas vor, durch welches das von der weissen Tafel C ausgehende Licht in der Richtung EF völlig, oder beynahe senkrecht durchgehet. Auf E falle die Lichtmenge = 1, so ist die bey F durchgehende Lichtmenge = $m\lambda ns$. (362 §.) In B stelle man sich vier nach einander folgende, übrigens aber durch einen kleinen Zwischenraum von einander abgesonderte Stücken Glas vor, davon jedes nur um den vierten Theil so dick ist, als A war. Durch diese gehe das Licht, was von der weissen Tafel D kommt, in der Richtung GH völlig oder beynahe senkrecht durch, und die bey G auffallende Lichtmenge sey = 1. Wofern man nun mit Hn. Bouguer annehmen kann, das Licht vermindere sich, indem es durch die vier von einander abgesonderte Gläser fällt, nach eben dem Gesetz, nach welchem es sich beym Durchgang durch das einige solide Stück Glas EF verminderte; so geht durch das erste Stück Glas die Lichtmenge $m\lambda^{\frac{1}{4}} ns$ (327 §.) Ferner sind die Lichtmengen, welche durch das zweyte, dritte und vierte Stück Glas fallen, $m^2 \lambda^{\frac{1}{2}} n^2 s^2$, $m^3 \lambda^{\frac{3}{4}} n^3 s^3$, $m^4 \lambda n^4 s^4$. Man ordne die Gläser mit den kleinen Tafeln C und D so, daß C durch das dicke Glas, D aber durch die vier dünnern Gläser gesehen werden kann, wenn das Auge in O stehet. Beyde Tafeln werden gleich groß und gleich weiß angenommen, und in L stehet ein Licht, welches beyde erleuchtet.

Wenn nun diese Tafeln gleich stark erleuchtet sind, so erscheinen sie ohne Gläser dem Auge gleich helle;

helle; durch die Gläser betrachtet, erscheint D nicht so helle als C. Rückt man D dem Licht L näher, so wächst die scheinbare durch die Gläser gesehene Helligkeit von D, und man kann es dahin bringen, daß beyde Tafeln gleich helle erscheinen. Alsdenn sey die Klarheit der Tafel C $= \sigma$, der Tafel D $= \Sigma$, der ersten Erleuchtung $= i$, der lezten Erleuchtung $=$ I; so ist die scheinbare Klarheit von C $= m \lambda n s \sigma$, die scheinbare Klarheit von D $= m^4 \lambda n^4 s^4 \Sigma$, und beyde sind vermöge des Versuchs gleich groß. Das giebt $m^3\, n^3\, s^3\, \Sigma = \sigma$, und $mns = \sqrt[3]{(\sigma : \Sigma)}$, also auch $mns = \sqrt[3]{(i : \mathrm{I})}$.

An sich wäre es nicht nöthig, vier dünnere Gläser zu gebrauchen: es würden zwey genügen, wovon jedes halb so dick als das dickere wäre. Man sieht leicht, daß alsdenn die scheinbare Klarheit von D $= m^2\, \lambda n^2\, s^2\, \Sigma$ wäre, und das gäbe die Gleichung $mns\Sigma = \sigma$, also $m \,.\, n \,.\, s = \sigma : \Sigma$, oder $m \,.\, n \,.\, s = i : \mathrm{I}$. Man fände also mns durch eine kürzere Rechnung, und hätte nicht nöthig eine Wurzel auszuziehen. Allein Hr. Bouguer braucht deswegen mehr Gläser, damit die Verminderung des Lichts desto stärker ausfalle, und mns selbst desto schärfer und richtiger gefunden werde.

Die Zahl $m \,.\, n \,.\, s$ also läßt sich vermittelst des Versuchs finden, und ich will sie $=$ A setzen. Das giebt $mn\,(1 - r) = \mathrm{A}$, also $mn - mnr = \mathrm{A}$, und man findet $r = \dfrac{mn - \mathrm{A}}{mn}$, oder $r = \dfrac{(1-q)\,(1-p) - \mathrm{A}}{(1-q)\,(1-p)}$.

364. §.

Herr Bouguer fand bey einem Versuch dieser Art $A = \sqrt[3]{\frac{243049}{360000}} = \sqrt[3]{0,675136111} = 0,877$, und die Gläser waren ein wenig schief gegen die kleinen Tafeln gestellt, so daß das Licht unter einem Winkel von 75° auffiel. Vermöge seiner übrigen Versuche (M. s. den 349. §.) ist $q = \frac{1}{36} = 0,02777$, $p = \frac{1}{27} = 0,03704$, also $1 - q = 0,97223 \ldots 1 - p = 0,96296 \ldots$, und $(1 - p)(1 - q) = 0,936$. Das giebt $r = \frac{0,936 - 0,877}{0,936} = \frac{0,059}{0,936}$ ohngefehr $= \frac{1}{16}$. Daß Hr. Bouguer diesen Lichtverlust vornemlich der innern Fläche des Glases zuschreibe, sagt er auf der 159 Seite: übrigens läßt er unentschieden, wieweit die äussere Fläche des Glases auch Antheil daran habe, daß weniger Licht durchgehet, als die Zahl $(1 - q)(1 - p)\lambda$ ausdrücken würde. Eine schärfere Untersuchung, die darauf abzielte, μ und ν (M. s. den 361 §.) für sich zu finden, würde verwickelter werden, und ist auch so sehr nothwendig nicht. In den meisten Fällen komnt es nur darauf an, daß man die senkrecht, oder beynahe senkrecht durchfallende Lichmenge mit der auffallenden vergleichen kann, und so genügt es, wenn man sich mit Hn. Bouguer die Sache wie folget vorstellt.

Wegen der Zurückwerfung von der Vorderfläche allein, würde der Theil q von der auffallenden Lichtmenge abgehen, der Theil $1 - q$ durchgehen. Hievon nimmt die Zurückwerfung an der hintern

hintern Fläche abermahl den Theil p weg, mithin würde der Theil $(1-q)(1-p)$ durchgehen. Wegen der Zerstreuung an beyden Flächen gehet hievon noch ein Theil ab, der sich zum ganzen, wie $\nu : 1$ verhält, und der Theil $(1-q)(1-p)(1-r)$ würde durchgehen. Dieser vermindert sich endlich noch, wegen der übrigen Undurchsichtigkeit des Glases in seinem innern Raum, in dem Verhältniß $1 : \lambda$; mithin geht der Theil $(1-q)(1-p)(1-r)\lambda = m \, . \, n \, . \, s \, . \, \lambda$ durch, und es hat weiter keine Schwierigkeit, λ durch Versuche zu finden, wenn die Zahlen m, n, s, schon bekannt sind.

365. §.

Es sollen B und C abermahl ein paar kleine 118. Fig.
gleich große und gleich weisse Tafeln vorstellen, die das Auge in O beyde neben einander sehen kann. Zwischen dem Auge O und der einen Tafel B befinde sich ein gläsernes Parallelepipedum A, oder sonst eine durchsichtige von zwoen parallelen Seitenflächen eingeschlossene Masse, durch welche das Licht von B nach O, wenigstens beynahe senkrecht durchgehet. Ueber A stehe ein Licht L, daß beyde Tafeln B und C erleuchtet. In dem Fall wenn beyde gleich stark erleuchtet sind, wird C heller als B zu seyn scheinen, weil das von B kommende Licht wegen der Undurchsichtigkeit der Masse A geschwächt wird. Man entferne die Tafel C vom Licht L soweit, bis B und C gleich helle zu seyn scheinen. Alsdenn sey die Klarheit von $B = \Sigma$ von $C = \sigma$, die Erleuchtung in $B = I$, in $C = i$; so ist die scheinbare Klarheit von B dem Ausdruck $n\lambda ms \, . \, \Sigma$ proportional, und die scheinbare Klar-

heit von C verhält sich wie σ. Vermöge des Ver-
suchs ist $n\lambda ms \cdot \Sigma = \sigma$, also $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{\sigma}{\Sigma}$ mit-
hin auch $\lambda = \frac{1}{n \cdot m \cdot s} \cdot \frac{i}{I} =$
$\frac{1}{n \cdot m \cdot s} \cdot \frac{LB^2}{LC^2}$. Wenn also n, m, s, nach
den bisher beschriebenen Methoden gefunden sind,
so hat man λ für die bekannte dicke der Masse A,
und kann daraus λ für jede andre dicke eben dersel-
ben Masse finden (330. §.) Setzt man die Dicke
der Masse A = C, und nimmt für λ den mittelst
des Versuchs gefundenen der Dicke c zugehörigen
Werth; so hat man für die Lichtzerstreuungslinie
der Masse A die Subtangente $f = \frac{c}{l\,(1 : \lambda)}$.
Wegen der Zahl nms ist ein für allemahl zu mer-
ken, daß nach Hn. Bouguer $n = 1 - q = \frac{35}{36}$,
$m = 1 - p = \frac{26}{27}$, $s = 1 - r = \frac{15}{16}$ für diejenige
Glasart angenommen werden könne, die zu Spie-
geln und Glaslinsen in Fernröhren gebraucht wird:
mithin wäre für diese Glasart $nms = \frac{2275}{2592}$ ohn-
gefähr $= \frac{9}{10}$.

366. §.

119. Fig. Man kann eben das auch so finden. In L
stehe das Licht, und erleuchte beyde Tafeln B, C:
das von L nach B gehende Licht aber lasse man
durch die durchsichtige Masse A durchscheinen, und
nehme nun in O eine solche Stelle des Auges an,
woraus

woraus man beyde Tafeln B und C neben einander sehen kann. Die vom Licht grade zu erleuchtete Tafel C entferne man davon soweit, bis beyde B und C gleich helle erscheinen, mithin würklich gleich stark erleuchtet sind. Alsdenn weis man, daß die Strahlen durch A und B so fallen, als kämen sie von einem Punct Λ her, der um den Abstand $L\Lambda = \frac{1}{3}C$ näher bey A liegt, als L, wenn die durchsichtige Masse A Glas, und ihre Dicke $= c$ ist. (194 §.) Aus der allgemeinen Formul für x im 164 §. übersiehet man leicht, daß überhaupt in dem Fall, wenn r und ϱ unendlich groß genommen werden $a\Lambda$, welches hier x ist, $= -\delta - \frac{n}{m}c$ werde, da dann $AL = \delta$ ist. Das zeichen ($-$) zeigt nur die Lage von $a\Lambda$ an, also ist $a\Lambda = AL + \frac{n}{m}c$, mithin $A\Lambda = AL + \left(\frac{n}{m} - 1\right)c = AL - \frac{m-n}{m}c = AL - L\Lambda$, mithin überhaupt $L\Lambda = \frac{m-n}{m}c$, welches um deswillen zu bemerken ist, wenn man das Licht auch durch sonst eine andre durchsichtige Masse scheinen lassen, und deren Durchsichtigkeit prüfen wollte. Bräche nun die Masse A nur die Strahlen, ohne auf irgend eine Art das Licht zu schwächen, so wäre die Erleuchtung in $B = \frac{S}{\Lambda B^2}$, den Glanz des Lichts $= S$ gesetzt: nun aber ist sie wegen der Undurchsichtigkeit $= \frac{n\lambda ms \,.\, S}{AB^2}$, so wie die Erleuchtung in C $=$ $\frac{S}{LC^2}$. Weil nun beyde Vermöge des Versuchs gleich groß sind, so findet man $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{AB^2}{LC^2}$, und dieser Werth λ gehört mit der Dicke c der Masse A zusammen. M. s. übrigens H. Bouguer a. a. O. Liv. I. Art. III. IV. pag. 21. 23.

367. §.

Man siehet wohl, daß sich leicht noch mehr Arten erdenken lassen, das gesuchte durch Versuche zu finden. Läßt man in ein finsteres Zimmer das Licht des freyen Himmels durch zwo Oefnungen auf die Art fallen, wie es im 345 §. umständlicher ist beschrieben worden; so kann man das durch die eine Oefnung einfallende Licht durch einen durchsichtigen Körper durchscheinen lassen, alsdenn aber dies durchscheinende Licht sowohl, als auch das durch die andre Oefnung einfallende mit einem paar gleich großer, gleich weisser und von den Oefnungen gleich weit entfernter weisser Flächen auffangen. Die letzte Oefnung vermindert man hiernächst so lange, bis beyde Flächen gleich helle scheinen, so giebt sich das gesuchte aus dem Verhältniß der Oefnungen gegen einander. Der grössern Fläche Oefnung, deren Licht zugleich durch den durchsichtigen Körper scheint, sey $= h^2$, der kleinern Oefnung Fläche $= k^2$; so würden sich die Erleuchtungen, welche die gleich grossen weissen Flächen auffangen, wie diese Oefnungen verhalten. Allein, weil das

Licht

Licht von der grössern Oefnung durch den durchsichtigen Körper durchscheint, so giebt das eine Erleuchtung $= n\lambda ms \cdot h^2$, und vermöge des Versuchs ist diese $= k^2$ mithin $\lambda = \frac{1}{n \cdot m \cdot s} \cdot \frac{k^2}{h^2}$.

Wenn das Licht einer Fackel oder Kerze L ein paar weisse Tafeln B, C, erleuchtet; so kann man das Licht, was diese Kerze nach C wirft, durch ein Sammlungsglas D fallen lassen, und die Entfernung DC so groß nehmen, daß die Erleuchtung in C so groß, als in B wird. Eben diese Erleuchtung ist alsdenn $= \frac{M}{\pi \varrho^2}$, wenn M die auf D fallende Lichtmenge, und ϱ den Halbmesser des Zerstreuungskreises in C bezeichnet. Läßt man hiernächst das von L nach B scheinende Licht durch den durchsichtigen Körper A fallen, so wird die Erleuchtung in $B = n\lambda ms \cdot \frac{M}{\pi \varrho^2}$. Man entferne alsdenn das Sammlungsglas D von C soweit, bis die Erleuchtung in C wieder eben so groß wird, als sie nun in B ist: der Zerstreuungshalbmesser sey nun $= R$, die auf D fallende Lichtmenge $= M'$, so ist die Erleuchtung in $C = \frac{M'}{\pi R^2}$, und vermöge des Versuchs $n\lambda ms \cdot \frac{M}{\pi \varrho^2} = \frac{M'}{\pi R^2}$, woraus man $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{M'}{M} \cdot \frac{\varrho^2}{R^2}$ erhält. Ist die Entfernung CL ziemlich groß in Vergleichung mit den Entfernungen DC, so wird M' ziemlich nahe 120. Fig.

$= M$ bleiben, und wenn man DE als den Abstand des deutlichen Bildes vom Glase $= g$ setzt, so ändert sich auch g nicht sehr bey Aenderung der Entfernung DC. Die grössere Entfernung DC sey $= A$, die kleinere $= a$, so ist $\varrho = \frac{a - g}{g} b$, $R = \frac{A - g}{g} b$, die halbe Breite des Glases D $= b$ gesetzt: also hat man $\frac{\varrho^2}{R^2} = \frac{(a - g)^2}{(A - g)^2}$, und $\lambda =$

$$\frac{1}{nms} \cdot \frac{(a - g)^2}{(A - g)^2}.$$

368. §.

Von diesen beschriebenen Hülfsmitteln die Zahl λ zu finden, hat Hr. Bouguer bald das eine, bald das andre gebraucht, wenn er über die Durchsichtigkeit des Glases und des Wassers Versuche anstellte. Ob er dabey allemahl auf diejenige Verminderung des Lichts Rücksicht genommen habe, welche von der Zurückwerfung des Lichts an der äussern und innern Fläche der durchsichtigen Masse, und der daselbst sich äussernden Zerstreuung des Lichts herrührt, sagt er nicht immer ausdrücklich: indessen verlangt er a. a. O. Liv. III. Sect. I. Art. VI. daß man darauf Rücksicht nehmen müsse. Ich werde die Resultate einiger seiner Versuche, so wie er sie angiebt, anzeigen. Sechs auf einander gelegte Stücken Spiegelglas, zusammen $11\frac{1}{2}$ Linien dick haben das Licht in dem Verhältniß $10:3$ vermindert. So hat es H. Bouguer nicht allein ver-

vermittelst des im 365 §. beschriebenen Verfahrens befunden, sondern auch im finstern Zimmer, woselbst das Verhältniß der Oefnungen für das einfallende Licht 331 : 100 gewesen. Dies zuletzt erwehnte Verhältniß ist sehr nahe 10 : 3, also scheint es, daß man wegen der Zurückwerfung an beyden Flächen des Glases und der daselbst vorfallenden Zerstreuung die Zahl $\frac{3}{10}$ noch mit $\frac{1}{nms} = \frac{10}{9}$ multipliciren müsse, welches $\lambda = \frac{1}{3}$ gäbe. Ein andermahl hat Herr Bouguer das Verhältniß 100 : 27 gefunden, und er hält diese Bestimmung für richtiger als jene. Dabey aber bliebe noch der Zweifel: ob ein einziges solides Stück Glas, das eben die Dicke hätte, als jene zusammen genommen, aber nicht aus mehrern auf einander gelegten Scheiben bestünde, das Licht in eben dem Verhältniß vermindern würde, wenn es übrigens mit jenen dünnern Glasscheiben einerley Durchsichtigkeit hätte? Nach einer andern Erfahrung die Hr. Bouguer a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. V. p. 60 anführt, hat derselbe ein 3 Zoll dickes Stück Glas gesehen, welches das Licht kaum bis zur Hälfte verminderte.

369. §.

Um die Durchsichtigkeit des Seewassers zu prüfen, bediente sich Hr. Bouguer eines 9 Fuß 7 Zoll oder 115 Zoll langen Canals, dessen äusserste Enden mit einer Glasscheibe verschlossen waren. Dadurch ließ er das Licht einer ziemlich weit entfernten Fackel zur Nachtszeit fallen, und fieng es mit einer

ner weissen Fläche auf. Eine andere weisse Fläche war eben so stark erleuchtet, wenn er eine Wachskerze 9 Fuß weit davon enfernte. Nun füllte er den Canal mit Wasser, wodurch die Erleuchtung der ersten Fläche geschwächt ward, und die Kerze muste 16 Fuß weit von der andern Fläche entfernt werden, um ihre Erleuchtung eben so zu schwächen. Das giebt für das Verhältniß der Verminderung des Lichts $16^2 : 9^2$ beynahe $3 : 1$. Ein Mittel aus mehrern Versuchen gab $14 : 5 = 2,8 : 1$, und dies Verhältniß kommt dem Verhältniß $e : 1 = 2,71828 \ldots : 1$ ziemlich nahe, daß also die Subtangente der Lichtverminderungslinie für das Meerwasser ohngefehr 115 Pariser Zoll betragen würde. Indessen hält Hr. Bouguer diese Versuche nicht für zuverläßig genug, und schreibt dem Seewasser aus andern Gründen eine grössere Durchsichtigkeit zu, vermöge der es in der Tiefe von 10 Fuß das Licht nur in dem Verhältniß $5 : 3$, vielleicht nur $5 : 3\frac{1}{2}$ vermindere. Noch an einer andern Stelle giebt er es wie $3 : 2$ an, und berechnet daraus die Subtangente für die Lichtzerstreuungslinie des Meerwassers. (a. a. O. Liv. III. Sect. II. Probl. IV. pag. 260.) Die Formul dafür war $f = \frac{0,4342944 \cdot c}{\text{log. tab. } (a : b)}$ (333 §.), und man findet für Meerwasser $a : b = 3 : 2$ angenommen $f = \frac{434294 4 \cdot 10}{1760913} = 24\frac{2}{3}$ Fuß. Das heist, wenn das Licht um diese Tiefe ins Meerwasser dringt, so hat es in dem Verhältniß $2,71828 \ldots : 1$ beynahe $8 : 3$ abgenommen.

Wenn

Wenn demnach ein 3 Zoll dickes Stück Glas das Licht bis zur Hälfte vermindert, so findet man für diese Glasart $f = \frac{4342944 \cdot 3}{3010300} = 4,318$ Zoll, ohngefehr $4\frac{1}{3}$ Zoll. Hieraus folgt, daß das Meerwasser 68 mahl durchsichtiger, als die damit verglichene Glasart sey.

Das Licht des Vollmonds ist ohngefehr 300000 mahl schwächer, als das Sonnenlicht. Man kann also vermittelst der Gleichung $x = \frac{c\ l\ (a\ :\ y)}{l\ (a\ :\ b)}$ (330 §.) finden, in welcher Tiefe des Meeres der Glanz der Sonne der Klarheit des Vollmonds gleich scheinen wird. Die Rechnung giebt $x = \frac{10 \cdot 5,4771213}{0,1760913} = 311$ Fuß.

370. §.

Alle durchsichtige Massen kommen darin mit denjenigen, die wir undurchsichtig nennen überein, daß sie bey einer gewissen Dicke, sollte diese auch sehr groß seyn, für unsere Empfindung undurchsichtig werden. Nach dem angenommenen Gesetz des 327 §., vermöge dessen das Licht in geometrischer Progreßion abnimmt, wenn die Tiefe, um welche es eindringt, in arithmetischer Progreßion wächst, kann das Licht eigentlich nie ganz verschwinden, und es muß bey jeder Dicke des durchsichtigen Körpers noch etwas durchfallen, es sey so wenig es wolle. Diese noch durchfallende Lichtmenge kann so geringe seyn, daß sie für unsere Empfindung nicht mehr merklich ist, und alsdenn

denn ist der Körper wenigstens für unsere Empfindung undurchsichtig. Das Sonnenlicht ist das stärkste was wir kennen. Wüste man also, wie dick eine Masse von bekannter Durchsichtigkeit seyn muß, wenn das noch durchfallende Sonnenlicht nicht mehr empfunden werden kann; so liesse sich daraus finden, in welchem Verhältniß das Sonnenlicht abnehmen muß, wenn es unser Auge nicht mehr empfindlich rühren soll, und dies Verhältniß würde alsdenn dienen zu finden, bey welcher Dicke jede andere Masse, deren Durchsichtigkeit bekannt ist, durchsichtig zu seyn aufhört. Denn ist ein Körper für das Sonnenlicht undurchsichtig, so ist er es auch für jedes schwächere Licht.

Herr Bouguer legte 16 Scheiben aus gemeinem Glase auf einander, und fand, daß sie das auffallende Licht 247 mahl schwächer machten. Durch 76 bis 77 Scheiben von eben der Glasart konnte er nicht die geringste Spur vom Sonnenlicht mehr sehen, zu einer Zeit, da die Sonne 50 Grad hoch stand. Er nimmt also an, daß sicher durch 80 solche Scheiben kein Sonnenlicht fällt, daß noch empfunden werden könnte, und sucht nun vermittelst der Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{c}\;l\,\frac{a}{b}$ in welchem Verhältniß das Sonnenlicht durch 80 solche Scheiben vermindert werde. Wenn nemlich $x = 80$, $c = 16$, $\frac{a}{b} = 247$ gesetzt wird, so giebt jene Gleichung $l\,\frac{a}{y} = 5\;l\,247 =$

11,9634850

11,9634850, also $\frac{a}{y} = 91935860000$. Das soviel mahl verminderte Sonnenlicht würde also nicht mehr empfunden werden, und eine Masse, die das Licht so viel mahl schwächte, würde für unsere Empfindung undurchsichtig seyn, wenn es mit allen Voraussetzungen bey dieser Rechnung seine Richtigkeit hätte.

Wenn nun das 10 Fuß tief ins Meerwasser eindringende Licht in dem Verhältniß 3 : 2 geschwächt wird, so giebt die Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{10}\,l\,\frac{3}{2}$ die Tiefe x, worin das Meerwasser seine Durchsichtigkeit verliert, oder wohin kein für uns empfindliches Sonnenlicht mehr dringen kann, wenn man statt $\frac{a}{y}$ die eben gefundene Zahl, oder $l\,\frac{a}{y} = 11{,}9634850$ setzt: solchergestalt wird $x = \frac{11{,}9634850 \cdot 10}{0{,}1760913} = 679$ Fuß gefunden.

371. §.

Was bey diesen aus Hn. Bouguers Traité d'optique mitgetheilten Rechnungen zum Grunde gesetzt wird, daß sich das Licht, wenn es durch mehrere auf einander gelegte Glasscheiben dringt, nach eben dem Gesetz vermindere, als wenn es ein einziges eben so dickes Stück Glas von eben der Art wäre; ist nicht genau richtig. Wären die auf einander liegenden Glasscheiben für sich vollkommen

men durchsichtig, so nemlich, wie hier das Wort verstanden wird (196 §.), so weis man aus dem 355. §. wenn die auffallende Lichtmenge = 1 gesetzt wird, daß die durch x Glastafeln durchscheinende Lichtmenge $S = \frac{N}{x-(x-1)N}$ sey, vorausgesetzt, daß eine allein die Lichtmenge M zurück schicke, und die Lichtmenge N durchlasse. Demnach ist auch $S = \frac{N}{N+(1-N)x} = \frac{\nu}{\nu+x}$, wenn $\frac{N}{1-N} = \nu$ gesetzt wird. Betrachtet man nun ν als eine beständige Linie, x als die Absciße, und S als die zugehörige Ordinate einer krummen Linie, so ist $S = \frac{\nu}{\nu+x}$ die Gleichung für eine Hyperbel zwischen ihren Asymtoten. (310 §. Persp.) Der Anfangspunct der Abscißen ist in der Entfernung ν vom Mittelpunct genommen, die Ordinate durch diesen Anfangspunct ist = 1, und die Potenz der Hyperbel = $1 \cdot \nu$. Je durchsichtiger also die Glasscheiben sind, desto mehr nähert sich das Gesetz der Abnahme des hindurch scheinenden Lichts demjenigen, nach welchem die Ordinaten der Hyperbel zwischen ihren Asymtoten abnehmen, wenn die Absciße um gleiche Differenzen wächst. Daraus läßt sich abnehmen, daß das Licht beym Durchgang durch unvollkommen durchsichtige auf einander gelegte Glasscheiben, wenn man die mannigfaltigen Zurückwerfungen an den Gränzen jeder einzelnen Glasscheibe mit in Rechnung bringt, nicht mehr

nach

nach eben dem Gesetz, wie die Ordinaten einer logarithmischen Linie abnehmen werde.

372. §.

Die Formuln $R = \varrho + \frac{Mr^2}{1 - M\varrho}$, und $S = \frac{Nr}{1 - M\varrho}$ (355 §.) sind allgemein, sie finden bey unvollkommen durchsichtigen Glastafeln ebenfalls ihre Anwendung. Wäre in der 112 Fig. 112. Fig. ausser ζ die Glastafel α allein vorhanden, so hätte man $M = \varrho$, $N = r$, also

für 2 Glastafeln

$$R = M + \frac{M \,.\, N^2}{1 - M^2}, \quad \text{und } S = \frac{N^2}{1 - M^2}.$$

Kommt ausser α und ζ die dritte Glastafel hinzu, so ist für die beyden Tafeln, α und β zusammen, vermöge des gefundenen

$$\varrho = M + \frac{M \,.\, N^2}{1 - M^2}, \quad \text{und } r = \frac{N^2}{1 - M^2}.$$

Die erste Zahl setze man $= M'$, die zweyte $= N'$, und brauche allemahl eine ähnliche Bezeichnung, wenn die Zahl der Glastafeln um 1 größer ist, also für 3 Glastafeln $R = M''$ $S = N''$, für 4 Glastafeln $R = M'''$, $S = N'''$ u. s. f., so ist

für 3 Glastafeln

$$R = M' + \frac{M \,.\, N'^2}{1 - M \,.\, M'}, \; S = \frac{N \,.\, N'}{1 - M . M'},$$

 für

für 4 Glastafeln

$$M''' = M'' + \frac{M \,.\, N''^2}{1 - M . M''},\; N''' = \frac{N \,.\, N''}{1 - M . M''},$$

für 5 Glastafeln

$$M'''' = M''' + \frac{M \,.\, N'''^2}{1 - M . M'''},\; N'''' = \frac{N \,.\, N'''}{1 - M . M'''},$$

u. s. ferner.

Aus diesen Formuln läßt sich nicht wohl ein allgemeiner Ausdruck herleiten, der das zurück-strahlende und durscheinende Licht unbestimmt durch die Zahl der Gläser ausdrückte: deswegen bedient sich Hr. Lambert (Photom. 450 - 455 §.) noch anderer analytischer Kunstgriffe, die auf folgenden Gründen beruhen.

373. §.

Wenn in der 112 Fig. statt der einen Glastafel ζ ebenfalls mehrere in unbestimmter Anzahl hinter einander befindlich sind; und man nimmt an, von diesen hintern Tafeln strahle der Theil m zurück, der Theil n scheine durch, die auffallende Lichtmenge = 1 gesetzt; so darf man nur im 355 §. m und n statt M und N schreiben, und man erhält die von der ersten Tafel α zurückstrahlende Lichtmenge $R = \varrho + \frac{m r^2}{1 - m\varrho}$, die durch alle zusammen durchscheinende Lichmenge $S = \frac{n r}{1 - m\varrho}$. Wenn alsdenn oben eben soviel Glastafeln als unten in unbestimmter Anzahl $= x$ befindlich sind, so ist $m = \varrho$, $n = r$, also ist

für

für $2x$ Glastafeln

$R = \varrho + \frac{n^2 \varrho}{1-\varrho^2}$ und $S = \frac{n^2}{1-\varrho^2}$; also auch

$R = (1+S)\varrho$, oder $\varrho = \frac{R}{1+S}$, und $n^2 =$

$(1-\varrho^2)$ S.

Nun soll man ϱ und n durch x ausdrücken: demnach setze man

$\varrho = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$

$n = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots$

so muß $\varrho = R$ und $n = S$ werden, wenn $2x$ statt x gesetzt wird, und das giebt

$R = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8D \,.\, x^3 \ldots\ldots$

$S = a + 2bx + 4cx^2 + 8d \,.\, x^3 \ldots\ldots$

Diese Reihen muß man in den Formuln

$\varrho = \frac{R}{1+S}$, und $n = (1-\varrho^2)^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}$ substituiren, so erhält man zwey andere Reihen für ϱ und n, die man den vorigen gleich setzen, und solchergestalt die Coefficienten, A, B, C, ... a, b, c, ... bestimmen kann.

Wenn gar keine Glastafeln vorhanden sind, so kann kein Licht zurückstrahlen, und alles auffallende Licht muß durchscheinen. Demnach muß $\varrho = 0$ $n = 1$ seyn, wenn $x = 0$ ist. Das giebt $A = 0$, und $a = 1$. Die übrigen Coefficienten zu finden, hat keine andere Schwierigkeit, als daß eine etwas weitläuftige Rechnung nöthig ist, wobey hier noch erfordert wird, daß man die Reihe $\varrho = x\,(B + Cx + \ldots)$ aufs Quadrat, die Reihe $1 + S = 2\,(1 + bx + 2cx^2 \ldots\ldots)$ auf eine Potenz vom Exponenten -1, und das Product $(1-\varrho^2)$ S auf eine Potenz erheben muß, wozu der Exponent $\frac{z}{a}$ gehört. Wie man dergleichen Rechnungen führen muß, davon giebt die mathematische Analysis Unterricht, und Hr. **Lambert** a. a. O. hat die Resultate davon mitgetheilt. Wofern übrigens die Zahlen q, p, m, n, (335 §.) von der Undurchsichtigkeit der Glastafeln nicht abhängen, vielmehr ohne merkliche Aenderung dieselben bleiben, wenn gleich mehr oder weniger durchsichtige Glastafeln gebraucht werden; so kann auch auf folgende Art das Maaß der Durchsichtigkeit für Glastafeln gefunden werden.

374. §.

Ueber einer weissen Ebene AC stehe eine Glas-
121. Fig. tafel AB lothrecht, und eine andere CD von eben der Glasart und eben der Dicke ihr so gegen über, daß beyder Grundlinien parallel sind. Das Licht falle in der Richtung LD ⫲ MC auf diese Tafeln, und werde von der hintern CD nach DE zurückgeworfen; so wird der Raum CE beydes von dem durch AB durchscheinenden und dem von CD zurückgeworfenen Licht erleuchtet. Stehet nun CD lothrecht, so strahlt das Licht unter eben dem Winkel zurück, unter welchem es auf beyde Tafeln fällt, CE empfängt von dem durch AB durchscheinenden Licht den Theil N, von dem, welches auf CD fällt, den zurückstrahlenden Theil M; also zusammen die Lichtmenge M + N. Weil ferner beyde Theile auf CE unter eben dem Winkel fallen, unter welchem das grade zu seitwärts der Tafeln die Ebene CE bescheinende Licht auffällt; so müste der Raum CE eben so stark erleuchtet seyn, als der seitwärts der Tafeln befindliche Raum, wohin das Licht ohne Brechung

Brechung oder Zurückwerfung scheint, wenn $M+N = 1$ wäre: das heist, wenn die Tafeln vollkommen durchsichtig wären. Nun aber, da wegen der Undurchsichtigkeit der Tafeln $M + N < 1$ ist, wird CE nicht so stark als der grade zu beschienene Theil dieser Ebene erleuchtet seyn.

Um also CE stärker zu erleuchten, neige man die Tafel CD gegen AB, so nimmt der Einfallswinkel DCB ab, also wächst die zurückstrahlende Lichtmenge M, auch wächst der Einfallswinkel CED, mithin nimmt die auf CE fallende Erleuchtung zu, und man kann es dahin bringen, daß die auf CE fallende Erleuchtung eben so groß wird, als diejenige, welche dieselbe weisse Ebene seitwärts der Tafeln von dem grade zu dahin scheinenden Licht empfängt. Nun messe man die Einfallswinkel ABC, DCB des Lichts auf die Glastafeln, so kann man q, p, u, m, finden (359 §.), da dann in den Formuln $M = q + \frac{m p \lambda^2 n}{1 - p^2 \lambda^2}$ $N = \frac{m \lambda n}{1 - p^2 \lambda^2}$ (335 §.) nur noch λ unbekannt ist. Ferner messe man die Einfallswinkel AEF, CED, so kann man die auf CE fallende Erleuchtung finden. Wird nemlich die Dichtigkeit des auffallenden Lichts, wenn es senkrecht aufgefangen würde, $= 1$ gesetzt, so ist die auf CE mittelst des durchscheinenden und zurück strahlende Lichts fallende Erleuchtung $= M \sin CED + N \sin AEF$, und die grade zu auf eben die weisse Fläche seitwärts fallende Erleuchtung $= \sin AEF$. Wäre nun der Einfallswinkel für beyde Glastafeln einerley, so wäre in den Formuln für M und N auch λ einerley, weil vorausgesetzt wird, daß beyde Tafeln von gleicher Dicke und gleich durchsichtiger Glasart sind: weil aber die Einfallswinkel verschieden sind, so sind die Wege nicht gleich groß, die das Licht in jeder der beyden Glastafeln durchdringt, mithin ist λ nicht für beyde einerley, so wie auch die übrigen Zahlen q, n, p, m nicht in beyden Formuln einerley sind.

Es sey also x der Weg, den das Licht einer dieser Glastafeln durchdringt, und f die Subtangente der ihr zugehörigen Lichtzerstreuungslinie; so ist $l\,\frac{1}{\lambda} \quad \frac{x}{f}$, also $\lambda = e^{-x:f}$. Wenn ferner in der 73 Fig. der Einfallswinkel PBA $= \eta$, und die Dicke des Glases $= c$ gesetzt wird, so ist $\sin \mathrm{MBC} = \frac{2}{3}\cos\eta$, $\cos \mathrm{MBC} = \sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos\eta^2)}$,

$$\text{also } \mathrm{BC} = c \sec \mathrm{MBC} = \frac{c}{\cos \mathrm{MBC}} =$$

$$\frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos\eta^2)}}.$$

Diesemnach hat man in der Formul $\mathrm{M} = q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2\lambda^2}$ die Zahl $\lambda = e^{-x:f}$, wenn man $x = \frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos \mathrm{DCB}^2)}}$ setzt: in der Formul $\mathrm{N} = \frac{m\lambda n}{1 - p\lambda^2}$ aber muß man $x = \frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos \mathrm{ABC}^2)}}$ setzen, um $\lambda = e^{-x:f}$ gehörig auszudrücken. Solchergestalt erhält man endlich sich eine Gleichung, die ausser $\frac{c}{f}$ lauter bekannte Zahlen enthält, und daraus muß $\frac{c}{f}$ gefunden werden. Nimmt man $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\cos DCB^2)}} = \mu$, $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\cos ABC^2)}} = \nu$ an, und schreibt man p', m', n', statt p, m, n, in der Formul für N, so ist die gesuchte Gleichung folgende:

$$q \sin CED + \frac{mpne^{-2\mu c:f}\sin CED}{1 - p^2 e^{-2\mu c:f}}$$

$$+ \frac{m'n'e^{-\nu c:f}\sin AEF}{1 - p'^2 e^{-2\nu c:f}} = \sin AEF,$$ die man auch so ausdrücken kann: $q \sin CED +$

$$\frac{mpn \sin CED}{e^{2\mu c:f} - p^2} + \frac{m'n'e^{\nu c:f}\sin AEF}{e^{2\nu c:f} - p'^2} =$$

$\sin AEF$.

Kann man aus dieser Gleichung $\frac{c}{f}$ finden, so ist zugleich die Subtangente f als das Maaß der Durchsichtigkeit der gebrauchten Glasart gefunden, weil die Dicke c der Glastafeln bekannt ist.

375. §.

Es werden wiederum besondere analytische Kunstgriffe erfordert, wenn aus der letzten Glei-

 chung

chung die Zahl $c:f$ gefunden werden soll, und ich muß mich hier nach meiner oben (353 §.) angezeigten Absicht damit begnügen, das Resultat eines vom Hn. Lambert angestellten Versuchs, und der von ihm darauf grgründeten Rechnung herzusetzen.

Er fand $ACB = 49° = AEF$

also $ABC = 41°$

$DCE = 74\frac{1}{2}°$

also $DCB = 25\frac{1}{2}° = DCE - ACB = CDE$

und $CED = 80° = 180° - DCE - CDE$

Aus diesen Winkeln erhält man

$$\begin{array}{llll} \mu = 1{,}252 & & \nu = 1{,}157 \\ q = 0{,}1027 & & q' = 0{,}0456 \\ p = 0{,}2164 & & p' = 0{,}0997 \\ n = 0{,}8973 & & n' = 0{,}9544 \\ m = 0{,}7836 & & m' = 0{,}9003 \\ \sin CED = 0{,}9848 & & \sin AEF = 0{,}7547 \end{array}$$

und nach Hn. Lamberts Rechnung wird $c:f = \frac{2}{13}$ gefunden. Die Dicke der Glastafeln c war $\frac{5}{6}$ einer Pariser Linie, also $f = \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{2} = 5\frac{5}{12}$ Par. Linien.

Wenn nun das Licht auf eine Glastafel unter einem rechten Winkel fällt, so hat man in den Formuln

$$M = q + \frac{mnpe^{-2x:f}}{1-p^2e^{-2x:f}}$$

$$= q + \frac{m \cdot n \cdot p}{e^{2x:f} - p^2}$$

N =

$$N = \frac{mne^{-x:f}}{1-p^2e^{-2x:f}} = \frac{mne^{x:f}}{e^{2x:f}-p^2}$$

folgende Bestimmungen:

$x = c$ also $M = 0{,}0516$
$q = 0{,}0199$ $N = 0{,}8111$
$p = 0{,}0448$ $M + N = 0{,}8627$
$n = 0{,}9801$ $1 - M - N = 0{,}1373$
$m = 0{,}9552$;

Braucht man diese so gefundenen Werthe in den Formuln des 372 §. für M′, M″, M‴ u. s. f., so findet man für den Einfallswinkel von 90° folgende Zahlen:

Zahl der Glastaf.	zurückstr. Licht	durchscheinend Licht.	verlohrnes Licht.
1	0,0516	0,8111	0,1373
2	0,0856	0,6596	0,2548
3	0,1081	0,5368	0,3551
4	0,1228	0,4377	0,4495
8	0,1467	0,1945	0,6588
16	0,1524	0,0387	0,8089
32	0,1526	0,0016	0,8458

Aus eben den Formuln läßt sich die Rechnung für jeden andern gegebenen Einfallswinkel führen.

Der XXVI. Abschnitt.

Von der Abnahme des Lichts in ungleichförmig durchsichtigen Massen, mit Anwendungen auf die Atmosphäre.

376. §.

122. Fig. Das Licht fällt in der Richtung AB durch eine durchsichtige Masse, deren Dichtigkeit in jeder folgenden Stelle P von ihrer Dichtigkeit in der vorigen Stelle verschieden ist, man sucht das Gesetz, nach welchem das Licht abnimmt.

Aufl. Es stelle CEM eine krumme Linie vor, deren Ordinaten AC, DE, PM, nach eben dem Gesetz abnehmen, nach welchem das Licht abnimmt, indem es einen Weg so groß, als die zur Ordinate DE, PM, gehörige Abscisse AD, AP, zurück legt. Man gehe bis auf den 327 §. zurück, vergleiche die 105 Fig. und erwäge dabey folgendes. Es ward angenommen, das Verhältniß der Lichtverminderung von B bis D sey nochmahl so groß, (ratio duplicata) als von B bis C, wenn BD nochmahl so groß als BC ist. Der Grund war, weil die durchsichtige Masse überall von gleicher Dichtigkeit angenommen ward, mithin das Licht von B bis D durch nochmahl soviel Masse dringen muste, als wenn es den Weg BC zurück legte. Ueberhaupt

haupt also ward vorausgesetzt, das Verhältniß der Lichtverminderung sey n mahl grösser, wenn das Licht durch n mahl mehr Masse dringe. Hievon macht man auf dem gegenwärtigen Fall leicht folgende Anwendung.

Von A nach D, P, B, ist die Masse, durch welche das Licht dringt, nicht gleichförmig vertheilt. In einer unbestimmten Stelle P sey die Dichtigkeit dieser Masse $= \delta$, so verhält sich die Masse, welche das Licht durchdringt, indem es den Weg P$p = dx$ durchläuft, wie δdx, und die Menge der Masse, welche das Licht von A bis P durchdringt, verhält sich wie das Integral $\int \delta dx$. Man setze AC $= a$, DE $= b$, AP $= x$, PM $= y$, und das Integral $\int \delta dx$ sey $= m$; wenn $x =$ AD $= c$ ist, so hat man $l\,\frac{a}{b} : l\,\frac{a}{y} = m : \int \delta dx$, mithin $l\,\frac{a}{y} = \frac{\int \delta\, dx}{m}\; l\,\frac{a}{b}$. Dies wäre also eine Gleichung für die Lichtverminderungslinie in einer ungleichförmig dichten durchsichtigen Masse.

Man differentiire diese Gleichung, so hat man

$$-\frac{dy}{y} = \frac{\delta\, d\, x}{m}\; l\,\frac{a}{b},$$

$$\text{also}\quad \frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{\delta\; l\;(a : b)}.$$

Wie nun der allgemeine Ausdruck $\frac{ydx}{dy}$ für jede krumme Linie die Subtangente giebt (329 §.); so erhellet, daß die Subtangente dieser Lichtvermin-

derungs-

derungslinie nicht mehr unveränderlich, sondern der Dichtigkeit der durchsichtigen Masse an jeder gegebenen Stelle umgekehrt proportional sey.

377. §.

123. Fig. Es sey BC ein Stück der Erdfläche, und AL ein Theil der äussersten Gränze der Atmosphäre, BA eine Verticallinie durch der Erde Mittelpunct K: so ist bekannt, daß die Dichtigkeit der Luft von B nach A zu abnehme. Aus dem 76 und 77 §. der Aerostatik kennt man dasjenige Gesetz, welches man für diese Aenderung in der Dichtigkeit der Luft gewöhnlich annimmt. In jeder Stelle P verhält sich die Dichtigkeit der Luft, wie das Gewicht der darauf drückenden Luftsäule. Es sey also diese Dichtigkeit in der untersten Stelle B $= \Delta$, in jeder andern Stelle P $= \delta$. Die Höhe BP $= x$, AB $= h$, so verhält sich das Gewicht des Elements Pp wie δdx, und das Gewicht der Säule BP wie das Integral $\int \delta dx$. Dies Integral sey $=$ P, wenn man x der Höhe der ganzen Atmosphäre BA $= h$ gleich setzt, so verhält sich das Gewicht der auf P drückenden Luftsäule, wie P $- \int \delta dx$, und man hat $\Delta : \delta = P : P - \int \delta dx$, mithin $\delta = \dfrac{\Delta\,(P - \int \delta dx)}{P} = \Delta - \dfrac{\Delta \int \delta dx}{P}$.

Man differentiire diese Gleichung, so erhält man $d\delta = -\dfrac{\Delta}{P}\,\delta\, dx$ und $\dfrac{d\delta}{\delta} = \dfrac{\Delta}{P}\, dx$. Die Integration giebt $l\,\delta = C - \dfrac{\Delta}{P}\, x$. Weil nun $\delta = \Delta$ seyn muß, wenn $x = 0$ ist, so findet man

man $C = l\Delta$, und $l\delta = l\Delta = \frac{\Delta}{P}x$, also $l\Delta - l\delta = \frac{\Delta}{P}x$, oder $l\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta}{P}x$. Man nehme $P = \Delta . k$ an, so ist k eine Linie so groß als die Höhe der Atmosphäre seyn würde, wenn man sie so weit zusammendrucken könnte, daß ihre Dichtigkeit überall $= \Delta$ wäre, und man hat $l\frac{\Delta}{\delta} = \frac{x}{k}$.

Weil $BP = x$ die Höhe ist, in der die Dichtigkeit der Luft in dem Verhältniß $\Delta : \delta$ abgenommen hat, so will diese Gleichung sagen, der Logarithme des Verhältnisses der Dichtigkeit der Luft in der untersten Station zu ihrer Dichtigkeit in jeder andern Station ist der Höhe dieser lezten Station proportional: und weil die Dichtigkeit in jeder Station P sich wie die Barometerhöhen daselbst verhalten, so ist dies die im 77 §. Aerostat. schon ohne Gebrauch der Differentialrechnung bewiesene Regel, vermittelst beobachteter Barometerhöhen, die Höhen der Berge zu messen.

Verzeichnet man eine krumme Linie so, daß für die Abscissen BP die dazu gehörigen Ordinaten die Dichtigkeiten δ an den Stellen P vorstellen, so ist das die **Logarithmische** Linie; und wenn man auch in der Differentialgleichung $P = \Delta . k$ setzt, so hat man $\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{d.x}{k}$, also ist $k = \frac{\delta dx}{d\delta}$ ihre Subtangenten (329 §.)

378. §.

Es bezeichne nun Δ die Dichtigkeit der Luft in einer gegebenen Station C, deren Höhe BC über der Erdfläche bekannt ist, wenn anders C nicht selbst mit der untersten Station in B einerley ist: ferner sey D die Dichtigkeit der Luft in einer höhern Station D, und die Höhe CD dieser Station über der ersten sey $= c$, so hat man vermöge des 328 §. auch $l\,\frac{\Delta}{D} = \frac{c}{k}$, und man findet die Subtangenten der Logarithmischen Linie, welche die Abnahme der Dichtigkeit der Luft vorstellet, vermittelst der Formul $\frac{c}{\text{log. nat. } (\Delta : D)}$. (330 §.)

Herr de la Hire fand in der Höhe von 257 Toisen über der Meeresfläche die Barometerhöhe von 26 Zoll $4\frac{1}{2}$ Linien, und an der Meeresfläche 28 Zoll 2 Linien, mithin $\frac{\Delta}{D} = \frac{338}{316\frac{1}{2}} = \frac{676}{633}$, und $c =$ 257 Toisen. Die Rechnung giebt

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{Brigg. Log.} & 616 & = & 2,8299467 \\
\text{Log.} & 633 & = & 2,8014037 \\
\hline
\text{Brigg. Log.} & (\Delta : D) & = & 0,0285430 \\
 & & \times & 2,302585 \\
\hline
 & & & 0,0570860 \\
 & & & 85629 \\
 & & & 571 \\
 & & & 142 \\
 & & & 22 \\
 & & & 1 \\
\hline
\text{Nat. Log.} & (\Delta : D) & = & 0,0657225
\end{array}
$$

also

also die Subtangente $= \frac{257000000}{657225} = 3910,4$ Toisen, oder nach Hn. Bouguer 3911 Toisen. Aus spätern Beobachtungen und Untersuchungen, die Hr. Bouguer selbst im Jahr 1736 und den folgenden bey seinem Aufenthalt in Peru angestellet hat, findet er 4197 Toisen für die Grösse dieser Subtangente.

Eben die Gleichung log. nat. $\frac{\Delta}{D} = \frac{c}{k}$, oder $c = k$ log. nat. $\frac{\Delta}{D}$ giebt die Höhe zwischen zweyen Stationen, worin Δ und δ die Dichtigkeiten der Luft sind: also hat man auch $c = k \cdot \frac{1}{m} \cdot$ log. tab. $\frac{\Delta}{D}$, wenn m den Modulum der briggischen Logarithmen bezeichnet. Nach Hn. de Luc (78. 79 §. Aerost.) nimmt man $k \cdot \frac{1}{m} = 10000$, also ist nach ihm $k = m$. 10000, oder $k = 0,4342944 \times 10000$ (163 §. A. R.) $= 4343$ Toisen, wenn man voraussetzt, daß die Luft bis auf $16\frac{3}{4}$ Reaumürsche Grade erwärmt sey. Nimmt man dagegen mit Hn. Bouguer $k = 4197$ Toisen, so ist $k \cdot \frac{1}{m} = 4197 \times 2,302585 = 9664 = 10000 - 336$, und weil 336 beynahe $= \frac{1}{30}\, 1000$, so giebt das $k \frac{1}{m} = (1 - \frac{1}{30})\, 1000$; mithin $c = (1 - \frac{1}{30})\, 10000$ log. tab. $\frac{\Delta}{D}$, und das ist der Grund seiner Regel die Höhe der Berge zu messen, welche schon a. a. O. der Aerostatik kurz berührt ist. Man sehe auch davon sein Traité d'optique Liv. III. Sect. IV. pag. 321.

379. §.

Man stelle sich vor, das Licht vom Mittel-
123. Fig. punct der Sonne oder eines andern Himmelskörpers falle in der Richtung SL oder *sl* auf die äussere Gränze der Atmosphäre ALΛ, die hier als eine mit der Erde concentrische Kugelfläche betrachtet werden kann, und wovon ALΛ einen grösten Kreisbogen in der Ebene AKL vorstellet, worin auch die mit einander paralleien Lichtstrahlen LS, *ls* angenommen werden. Nach dem allgemeinen Gesetz der Strahlenbrechung, muß eine Brechung des Lichts erfolgen, wenn es in die Atmosphäre eindringt, man mag sich den übrigen Raum ausser derselben entweder ganz leer, oder mit einem zarten Aether angefüllt vorstellen, dessen Dichtigkeit geringer, als die Dichtigkeit der Luft an ihrer äussersten Gränze ist. Der Halbmesser K*l* sey nach F verlängert, so ist F*ls* = K*lt* der Neigungswinkel: weil nun der gebrochene Winkel kleiner als der Neigungswinkel seyn muß, so lenkt sich der Strahl gegen *lk*. Stellt man sich aber die ganze Atmosphäre durch concentrische Kugelflächen in Schichten eingetheilt vor, deren Dicke wie P*p* unendlich klein ist, so erhellet, daß die Dichtigkeit jeder folgenden Schichte gegen die Erde zu grösser, als die Dichtigkeit der vorhergehenden sey, und daß mithin das Licht in jeder folgenden Schichte eine neue Brechung gegen das Einfallsloth zu leide.

Weil

Weil aber die Dichtigkeit jeder folgenden Schichte die Dichtigkeit der vorhergehenden nur um eine unendlich kleine Differenz übertrift; so sind auch jedesmahl der Neigungs- und gebrochene Winkel nur um eine unendlich kleine Differenz unterschieden, und der Weg des Lichts lenkt sich nach dem Gesetz der Stetigkeit allmählig mehr von der ursprünglichen Richtung slt ab gegen lK zu. Wenn man annimmt, daß der in der Atmosphäre so gebogene Lichtstrahl endlich in B die Erdfläche erreicht, und seine lezte Lage daselbst mit der Lage der graden Linie BT überein kommt; so ist dieser Weg des Lichts in der Atmosphäre eine krumme Linie, welche ihre erhabene Seite der Scheitellinie BA, ihre hohle Seite dem Horizont BH zukehrt, und wovon tls, BT ein paar Tangenten sind. Diese Strahlenbrechung hat also den Erfolg, daß die Höhe des Puncts am Himmel, woher der Strahl slB kommt, größer zu seyn scheint, als sie würklich ist. Sie scheint $=$ HBT zu seyn, da doch HBS dieses Puncts Höhe über dem Horizont ist. Bey dem allen läßt sich hier schon vorläufig übersehen, daß die Linie iNB sich sehr wenig krümme, und daß diese Krümmung desto weniger auf sich haben müsse, je weniger die Höhe des leuchtenden Puncts, woher das Licht kommt, von 90° verschieden ist. Fiele sl mit der Scheitellinie BA zusammen, so würde der Strahl gar keine Brechung leiden, weil er nun auf alle Schichten senkrecht fiele; also wäre der Weg des Lichts eine grade Linie. Bey jeder andern Lage des einfallenden Strahls sl ist KlB der Neigungswinkel, und es ist $\sin KlB = \dfrac{BK \sin BKl}{Bl}$.

Weil nun BK und B*l* unverändert bleiben, wenn AB*l* wächst, AB*l* und BK*l* aber zugleich wachsen, so wird der Neigungswinkel K*l*B desto größer, je kleiner die Höhe des leuchtenden Puncts, woher das Licht kommt, über dem Horizont ist. Daß es hiemit eben die Bewandniß habe, wenn der Strahl jede andre Schichte, wie PM erreicht, ist leicht zu übersehen: mithin ist der Effect der Strahlenbrechung, also auch die Krümmung des Weges, den das Licht in der Atmosphäre nimmt, desto stärker, je näher der leuchtende Himmelskörper dem Horizont ist, am stärksten, wenn letzterer im Horizont selbst befindlich ist. Indessen werden die Geographisch-Astronomischen Wissenschaften weiter lehren, daß der gröste Effect der Strahlenbrechung, als der Unterschied der beyden Winkel HBS und HBT nie über 32 bis höchstens 36 Minuten betragen, auch wenn das Licht horizontal in die Atmosphäre fällt: mithin krümmt sich die Linie *l*NB nie stark, sie ist vielmehr von der graden Linie BL allemahl nur wenig verschieden.

Zu dieser Krümmung des Weges, den das Licht in der Atmosphäre nimmt, kommt nun noch die Verminderung des Lichts wegen der Undurchsichtigkeit der Atmosphäre, die desto mehr auf sich hat, je tiefer das Licht eindringt, weil die Dichtigkeit der Luft gegen die Erdfläche zu wächst. Wollte man bey Aufsuchung des Gesetzes, nach welchem diese Verminderung des Lichts erfolget, die Krümmung des Strahls, welche von der Strahlenbrechung herrührt, mit in Betrachtung ziehen, so würde man auf gar zu sehr verwickelte Formuln kommen; wie denn die Folge zeigen wird, daß jede

Unter-

Untersuchung für sich schon auf ziemlich verwickelte Formuln leitet: deswegen setzt man bey der Untersuchung über das Gesetz, nach welchem das Licht in der Atmospähre abnimmt, die Strahlenbrechung beyseite, und betrachtet die Sache so, als wenn die grade Linie SLB der Weg des Lichts wäre. Daß diese Voraussetzung auf keine merklich fehlerhafte Resultate leiten könne, ist aus der kurzen Betrachtung über den Effect der Strahlenbrechung leicht abzunehmen.

380. §.

Das Licht der Sonne oder eines andern leuchtenden Körpers am Himmel falle also in der Richtung LB durch die Atmosphäre, und in B auf die Erdfläche: man sucht das Gesetz, nach welchem es geschwächt wird, indem es den Weg LM zurück legt. 123. Fig.

Auflösung. Durch M stelle man sich eine mit der Erde concentrische Kugelfläche vor, und ziehe den Halbmesser KM, welcher die Erdfläche in G trift; so ist GM = BP die lothrechte Höhe dieser Stelle über der Erdfläche. An dieser Stelle sey die Dichtigkeit der Luft $= \delta$, LM $= w$, LB $= g$, so ist die Masse, durch welche das Licht von L bis M dringt, dem Integral $\int \delta dw$ proportional. Ferner sey die Dichtigkeit des bey L einfallenden Lichts $= 1$, in M aber $= v$. Für eine gegebene Tiefe LQ sey diese Dichtigkeit des Lichts $=$ V, das Integral $\int \delta dw$ aber, wenn man $w =$ LQ setzt, $= m$, so hat man für das Gesetz der Lichtverminderung $l\,\frac{1}{v} = \frac{\int \delta dw}{m}\;l\,\frac{1}{V}$. (376 §.)

Weil das Integral $\int\delta dw$ allemahl der Menge derjenigen Masse proportional ist, die das Licht durchdringt, wenn es den Weg LM $= w$ zurück legt, so nehme man $\int\delta dw = \Delta \cdot s$ an, und Δ sey die Dichtigkeit der Luft in B unmittelbar an der Erdfläche. Ferner sey $m = \Delta \cdot h$, so hat man

$$l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\;l\,\frac{1}{V}, \text{ und } s = \frac{\int\delta dw}{\Delta} = \int$$

$\frac{\delta}{\Delta}\,dw$ ist die Tiefe um welche das Licht in eine Luft von der Dichtigkeit Δ eindringen muste, wenn es in dem Verhältniß $1 : v$ abnehmen sollte: auch ist eben so h die Tiefe, um welche das Licht in eine Luft von gleichförmiger Dichtigkeit Δ eindringen muste, wenn es in dem Verhältniß $1 : V$ abnehmen soll. Demnach kommt es nur darauf an, das Integral $s = \int \frac{\delta}{\Delta}\,dw$ zu finden.

Man nehme den Winkel ABL $= \gamma$ an, und BM $= x$, so ist $w = g - x$, $dw = -dx$, also $s = \text{Const.} - \int \frac{\delta}{\Delta}\,dx$. Ferner sey GM $=$ BP $= y$, und der Halbmesser der Erdkugel KB $= r$; so hat man im Dreyeck KBM aus dem Winkel am B $= 180° - \gamma$, der Seite KB $= r$, und BM $= x$, die Seite KM $= r + y = \sqrt{(r^2 + 2rx \cos\gamma + xx)}$, also $2ry + yy = 2rx \cos\gamma + xx$. Man addire auf beyden Seiten $r^2 \cos\gamma^2$, und nehme alsdenn die Quadratwurzel, so erhält man $r \cos\gamma + x =$

$\surd$

$\surd(r^2 \cos\gamma^2 + 2ry + yy)$, mithin $dx = \frac{(r+y)\,dy}{\surd(r^2\cos\gamma^2 + 2ry + yy)}$: und dieser Werth statt dx gebraucht giebt $s = \text{Const} - \int \frac{(\delta:\Delta)(r+y)\,dy}{\surd(r^2\cos\gamma^2 + 2ry + yy)}$. Noch sey $\Delta = 1$, und $\frac{y}{r} = \lambda$, so ist $dy = r d\lambda$, und man erhält $s =$ $\text{Const} - \int \frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda}{\surd(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}$.

Dies Integral kann nicht gefunden werden, bevor man weis, wie δ und λ von einander abhängen. Nach dem Mariottischen Gesetz der Dichtigkeiten der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche ist $l\frac{\Delta}{\delta} = \frac{y}{k}$ (377 §.), oder $y = -kl\delta$, wenn man, wie hier angenommen ist, $\Delta = 1$ setzt. Nimmt man ferner $\frac{k}{r} = n$ an, so ist $\frac{y}{r} = \lambda = -nl\delta$, und man hat $\delta d\lambda = -nd\delta$, also $r\delta d\lambda = -kd\delta$. Das in den Werth von s gesetzt giebt $s = \text{Const} + \int \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\surd(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}$, also $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\surd(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}$. Setzt man in dieser Gleichung statt λ den Werth $-nl\delta$, oder statt δ den Werth $e^{-\lambda : n}$, so ist zwar das Differential ds allein durch δ oder λ ausgedrückt: es hat aber seine Schwierigkeiten, das Integral hievon, und mit demselben die Auflösung der vorgelegten Aufgabe in der Allgemeinheit zu finden, welche hier eigentlich gesucht wird; so nemlich, daß hiernächst für jeden Winkel y die Linie s leicht angegeben werden könne. Die folgenden Anmerkungen über das Mariottische Gesetz der Dichtigkeiten, welches hiebey als allgemein richtig zum Grunde gelegt ist, werden zur Vorbereitung dienen, um eine bequeme Methode zu wählen, wobey man versichert ist, daß das gesuchte Integral wenigstens so nahe richtig gefunden werde, als bey Untersuchungen dieser Art genügen kann.

381. §.

Obgleich das eben erwehnte Mariottische Gesetz sonst hinlänglich bestättiget ist, so weis man doch auch, daß es nicht allein bey sehr stark zusammen gepreßter Luft, sondern auch bey sehr stark verdünnter Luft seine Einschränkung leide. Die Höhe der Atmosphäre müste unendlich groß seyn, wenn die Gleichung $y = - kl\delta$ allgemein richtig wäre, weil vermöge derselben y unendlich groß wird, wenn man $\delta = 0$ setzt: an der äussern Gränze der Atmosphäre aber müste $\delta = 0$ seyn, weil sonst die Luft an dieser Gränze, sie sey so sehr verdünnt, wie man wolle, der Voraussetzung gemäß sich noch weiter ausbreiten, mithin die Atmosphäre noch weiter erhöhen würde. Eigentlich wächst die Federkraft der Luft in einem etwas größern Verhältniß, als ihre Dichtigkeit: die Federkraft einer 800 mahl dichtern Luft als die untere nahe an der Erdfläche ist, wäre nach dem Mariottischen

riottischen Gesetz 800 mahl grösser, als die Federkraft der natürlichen Luft; sie ist aber würklich mehr als 800 mahl grösser. (M. s. den 12 §. der Pneumatik.) Vermuthlich ist auch dies der gröste Grad der Dichtigkeit, dessen die Luft fähig ist. Eben so müste nach dem Mariottischen Gesetz eine tausendmahl dünnere Luft eine tausendmahl geringere Federkraft besitzen: allein zur Vermeidung der hiebey eintretenden Schwierigkeiten ist man berechtiget anzunehmen, daß die Federkraft einer so sehr verdünnten Luft kleiner sey, als sie nach jenem Gesetz seyn sollte. Ohne Zweifel giebt es auch hier eine Gränze, eine gewisse sehr kleine Dichtigkeit der Luft, womit ihre Federkraft in so weit aufhört, eine merkliche Würkung zu äussern, daß es nicht weiter nöthig ist, ein darauf drückendes Gewicht anzunehmen, um zu verhindern, daß sich diese so sehr verdünnte Luft nicht noch weiter, und wohl gar in einen unendlich großen Raum ausbreite. (Man vergleiche den 82 §. der Aerostatik.) Auf solche Art wird es begreiflich, daß es nicht nöthig sey, die Höhe der Atmosphäre unendlich groß anzunehmen, wenn gleich übrigens die Dichtigkeiten der Luft sehr nahe nach dem Mariottischen Gesetz abnehmen. Es sey p die Barometerhöhe unten an der Erdfläche, so ist in einer tausendmahl dünnern Luft die Barometerhöhe $< \frac{1}{1000}p$. Ist dies vielleicht die Dichtigkeit der Luft an der äussern Gränze der Atmosphäre, so wird daselbst die Barometerhöhe $= 0$ seyn: die Lufttheilchen werden bey dieser Dichtigkeit weiter kein Bestreben äussern, sich auszubreiten, mithin auf das Quecksilber im Barometer nicht weiter drücken, auch wird von oben kein äusserer Druck nöthig seyn, diese Luft in der Dichtigkeit, welche sie hat, zu erhalten.

382. §.

Die Gleichung $y = -kl\delta$ giebt $y = 2,302585\, 3k$, oder ohngefehr $y = 7k = 27377$ Toisen, wenn $\delta = \frac{1}{1000}$ gesetzt, und nach Hn. Bouguers ältern Bestimmung $k = 3911$ Toisen angenommen wird. Nach seiner neuern Bestimmung wäre k etwas grösser (307 §.), wie auch nach Hn. de Luc. Wie aber jede solcher Bestimmungen überall einerley Grad der Wärme in der ganzen Atmosphäre voraus setzt, welches in der Natur nie zutrift, so ist hier eine scharfe Rechnung überflüßig. Wenn man $k = 4000$ Toisen annimmt, so giebt sich $y = 28000$ Toisen für $\delta = \frac{1}{1000}$: und daß die Höhe der Atmosphäre diese eben angezeigte schwerlich übertreffe, davon sind die Gründe schon im 82 §. der Aerostatik angeführt. Oben im 380 §. bezeichnete r den Halbmesser der Erde, und dieser beträgt in runden Zahlen 3272000 Toisen, wovon übrigens die mathematische Geographie mehr Nachricht giebt: also bleibt die Zahl $\lambda = \frac{y}{r}$ zwischen den Gränzen o und $\frac{28}{3271} = \frac{7}{818}$ oder $\frac{1}{117}$, wenn gleich y von o bis zur Höhe der Atmosphäre wächst, oder von der Höhe der Atmosphäre bis auf o abnimmt. Hätte man eine Gleichung zwischen y und δ, welche völlig richtig ausdrückte, wie y und δ von einander abhängen, so müste sie für y die Höhe der Atmosphäre geben, wenn man statt δ die Dichtigkeit der Luft setzte, die sie in der höchsten Gegend hat: und umgekehrt, wenn sonst woher die Höhe der Atmosphäre bekannt wäre, so müste eine solche Gleichung für δ die Dichtigkeit der Luft in der obersten Gegend geben, wenn man statt y die Höhe der Atmosphäre setzte. Ob nun gleich beydes, die kleinste Dichtigkeit der Luft, und die Höhe der Atmosphäre unbekannt sind, so bestättigen doch die angeführten Gründe so viel, daß die Höhe der Atmosphäre nicht grösser sey, als $\frac{1}{100} r$: mithin bleibt in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\mathrm{col}\,\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda}}$. (380 §.) Die Zahl λ allemahl zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{100}$, wenn für y keine andere Werthe gebraucht werden, als solche, die zwischen 0 und der Höhe der Atmosphäre fallen. Uebrigens ist die beständige Zahl $n = \frac{k}{r} = \frac{4}{3272} = \frac{1}{818}$ ohngefehr, oder $n = 0{,}0012$, so wie der gröste Werth $\lambda = 7 \cdot n$ wird, wenn y der Höhe der Atmosphäre gleich ist.

383. §.

Soviel läßt sich wohl mit ziemlicher Gewißheit voraussetzen, daß das Mariottische Gesetz in der Natur ohne sehr merkliche Abweichung beobachtet werde, bis die Luft aufängt, mehr denn 100 mahl dünner zu werden, als die untere ist. Die Aenderungen also, welche mit δ vorgehen, wenn sich y

oder λ ändert, sind in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ richtig enthalten, so lange y nicht so groß angenommen wird, daß $\delta > \frac{1}{100}$ werden muß. Für grössere Höhen aber ist selbst diese Gleichung nicht mehr völlig richtig, weil alsdenn die Gleichung $y = - kl\delta$, mithin auch $r\delta d\lambda = - kd\delta$ nicht mehr völlig der Natur gemäß ist; und diese Voraussetzung weicht desto mehr von der Natur ab, je näher y der ganzen Höhe der Atmosphäre kommt. Wenn aber die Differentialgleichung, welche es ausdrücken soll, wie s von y abhängt, nicht vollkommen richtig ist, so würde auch das Integral, wenn es gleich in seiner völligen Allgemeinheit gefunden werden könnte, die gesuchte Linie s nicht ganz richtig geben, wenn man das Integral auf die ganze Höhe der Atmosphäre ausdehnen wollte, die da erstlich erreicht würde, wo nach dem Gesetz $y = - kl\delta$ die Dichtigkeit $\delta = 0$ wäre. Um so mehr wird es erlaubt seyn, daß bey Integrirung der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ vorausgesetzt werde, es bleibe λ aller Aenderung, die damit vorgehet, ungeachtet, doch beständig eine sehr kleine Zahl, kleiner als $\frac{1}{100}$. Um aller etwa noch übrigen Bedenklichkeit abzuhelfen, stelle man sich vor, es sey

123. Fig. ALΛ diejenige Luftgegend, wo $\delta = \frac{1}{1000}$ ist, und man suche diejenige Verminderung, die das Licht leidet, wenn es aus dieser Luftgegend in der Richtung LB auf die Erdfläche fällt. Hat es nun vorher, ehe es noch in L die Luftgegend ALΛ erreichte

vielleicht

vielleicht schon eine noch dünnere Luft durchdringen müssen; so wird doch die Verminderung, welche es in derselben erlitten hat, in Vergleichung mit der übrigen, welche es auf dem Wege LB leidet, ganz unbeträchtlich seyn.

384. §.

Man setze nun $1 - \sin\gamma^2$ in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda}}$ statt $\cos\gamma^2$, so erhält man $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{((1+\lambda)^2 - \sin\gamma^2)}}$, also auch

$$ds = kd\delta : \sqrt{\left(1 - . \frac{\sin\gamma^2}{(1+\lambda)^2}\right)}.$$

Vermöge der vorhin angeführten Gründe aber ist es verstattet, $(1+\lambda)^2 = 1 + 2\lambda$ anzunehmen, und λ^2 in Vergleichung mit 2λ wegzulassen: diesemnach hat man auch $\frac{1}{(1+\lambda)^2} = \frac{1}{1+2\lambda}$ sehr nahe $= 1 - 2\lambda$, und man erhält $ds = \frac{kd\delta}{\sqrt{(1 - \sin\gamma^2(1-2\lambda))}} = \frac{kd\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda\sin\gamma^2)}}$, oder auch $ds = \frac{kd\delta \,.\, \mathrm{cosec}\,\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2\lambda)}}$.

Weil δ allemahl ein eigentlicher Bruch ist, der zwischen 1 und ohngefehr $\frac{1}{1000}$ fällt; so ist $l\delta$ negativ. Demnach sey $l\delta = -(\zeta - z)$, so ist $\delta = e^{z-\zeta} = e^{-\zeta} . e^{z}$, und $d\delta = e^{-\zeta} e^{z} dz$. Es ist aber oben $\lambda = -nl\delta$ angenommen worden, also ist nun $\lambda = n\zeta - nz$, und

und diese Werthe gebraucht, geben $ds =$

$\frac{e^{-\zeta} ke^{z} dz \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta - 2nz}}$. Noch setze man die Linie

$\frac{k \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = K$, und die Zahl

$\frac{2n}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta} = m$; so ist $ds = \frac{e^{-\zeta} . K . e^{z} dz}{\sqrt{(1 - mz)}}$,

und nach dem Binomialtheorem hat man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-mz)}} = (1 - mz)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} mz + \frac{1 . 3}{2 . 4} m^2 z^2 + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} m^3 z^3$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} m^4 z^4 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} m^5 z^5 \ldots;$$

Um abzukürzen will ich diese Reihe $= 1 + Z$ setzen, so ist $ds = e^{-\zeta} . K (e^{z} dz + Ze^{z} dz)$. Ferner sey die kleinste Dichtigkeit der Luft in der höchsten Gegend der Atmosphäre $= D$, und $lD = 2\zeta$, also $D = e^{-2\zeta}$. Weil nun überhaupt $\delta = e^{z - \zeta}$ angenommen ist, so erhält man $z - \zeta = -2\zeta$, oder $z = -\zeta$, wenn $\delta = D$ gesetzt wird; und in dem Fall $\delta = 1$ muß $z - \zeta = 0$ seyn, also $z = \zeta$.

Wird nun die zuletzt gefundene Differentialgleichung integrirt, so findet man

$$s = C + e^{-\zeta} K (e^{z} + \int Ze^{z} dz),$$

und wenn $\delta = D$, also $z = -\zeta$ ist, muß s verschwinschwinden. Alsdenn sey das Integral $\int Ze^{z} dz = \alpha$, so findet man $C = -e^{-\zeta} K(e^{-\zeta} + \alpha)$. Um hiernächst die gesammte Verminderung zu finden, welche das Licht leidet, indem es durch die Atmosphäre den ganzen Weg LB zurück legt, muß man $\delta = 1$, also $z = \zeta$ setzen, so erhält man $s = K (1 + e^{-\zeta} \int Z e^{z} dz - e^{-2\zeta} - e^{-\zeta} . \alpha)$. Es sey das Integral $\int Ze^{z} dz = \beta$ wenn $z = \zeta$ gesetzt wird, so ist nach Herstellung des angenommenen Werths von K, die gesuchte Linie $s = \frac{k \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} (1 - e^{-2\zeta} + (\beta - \alpha) . e^{-\zeta})$.

385. §.

Zur völligen Auflösung der Aufgabe des 380 §. wird also noch erfordert, daß man das Integral $\int Ze^{z} dz$ suche, welches auf folgende Art gefunden wird. Man setze $\int Zdz = P$; so ist $Ze^{z}dz = e^{z}dP$, und $\int Ze^{z}dz = e^{z} . P - \int P . d . e^{z} = e^{z} . P - \int Pe^{z}dz$. Weiter sey $\int Pdz = Q$, so ist aus eben dem Grunde $\int Pe^{z}dz = e^{z} . Q - \int Qe^{z} dz$, mithin $\int Ze^{z}dz = e^{z} . P - e^{z} . Q + \int Qe^{z} dz$. Man nehme ferner folgende Werthe an: $\int Qdz = R$, $\int Rdz = S$, $\int Sdz = T$, $\int Tdz = V$, u. s. f. fort, so ist leicht zu übersehen, daß folgende Reihe gefunden werde:

$$\int Ze^{z}dz = e^{z} (P - Q + R - T + T - V \ldots).$$

Hier

Hier ist nun $z = A \cdot z + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots$; und die Coefficienten sind nach dem Binomialtheorem bekannt; wenn also nach der vorgetragenen Regel die Integrale $\int e^z z dz, \int e^z z^2 dz, \int e^z z^3 dz$, u. s. f. nach der Ordnung gesucht werden, so giebt sich folgende Reihe $\int Z e^z dz =$

$$A \cdot e^z \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^7}{2 \cdot 3 \ldots 7} \ldots \right)$$

$$+ Be^z \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{3 \cdot 4} + \frac{z^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{z^7}{3 \cdot 4 \ldots 7} - \frac{z^8}{3 \cdot 4 \ldots 8} \ldots \right)$$

$$+ Ce^z \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{4 \cdot 5} + \frac{z^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^7}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^9}{4 \cdot 5 \ldots 9} \ldots \right)$$

$$+ De^z \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{5 \cdot 6} + \frac{z^7}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{z^8}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{z^9}{5 \cdot 6 \ldots 9} - \frac{z^{10}}{5 \cdot 6 \ldots 10} \ldots \right)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots$$

Das Gesetz des Fortgangs ist leicht zu übersehen, und ob man gleich alles auch nach den Potenzen von z ordnen kann, so ist es doch für die Rechnung am bequemsten, der Reihe diese Form zu lassen. Man erwäge nemlich, daß $m = \frac{2n}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}$ alle-

mahl

mahl kleiner, als $\frac{1}{\zeta}$ sey, nur den einzigen Fall $\gamma = 90^\circ$ ausgenommen, der $\cot\gamma = 0$, also $m = \frac{1}{\zeta}$ giebt. Demnach setze man $m = \frac{n}{\zeta}$, so ist $\mu = \frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}$ allemahl < 1 bis auf den Fall $\gamma = 90^\circ$, der $\mu = 1$ giebt, und man erhält $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\zeta}$, $B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu^2}{\zeta^2}$, $C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\mu^3}{\zeta^3}$, $D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\mu^4}{\zeta^4}$, u. s. f. Ferner setze man $z = \zeta$ in dem gefundenen Integral, so findet man

$$\begin{aligned}
\beta \cdot e^{-\zeta} = \tfrac{1}{2}\mu &\left(\frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{2 \cdot 3} + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\zeta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \right) \\
&+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\mu^2 \left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\zeta^2}{3 \cdot 4} + \frac{\zeta^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots \right) \\
&+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\mu^3 \left(\frac{\zeta}{4} - \frac{\zeta^2}{4 \cdot 5} + \frac{\zeta^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{\zeta^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \right) \\
&+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\mu^4\left(\frac{\zeta}{5}-\frac{\zeta^2}{5.6}+\frac{\zeta^3}{5.6.7}-\frac{\zeta^4}{5.6.7.8}+\ldots\right)$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\alpha.e^{-\zeta}=\frac{e^{-2\zeta}.\mu}{2}.\left(\frac{\zeta}{2}+\frac{\zeta^2}{2.3}+\frac{\zeta^3}{2.3.4}+\frac{\zeta^4}{2.3.4.5}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1.3.e^{-2\zeta}.\mu^2}{2.4}\left(\frac{\zeta}{3}+\frac{\zeta^2}{3.4}+\frac{\zeta^3}{3.4.5}+\frac{\zeta^4}{3.4.5.6}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1.3.5.e^{-2\zeta}.\mu^3}{2.4.6}\left(\frac{\zeta}{4}+\frac{\zeta^2}{4.5}+\frac{\zeta^3}{4.5.6}+\frac{\zeta^4}{4.5.6.7}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1.3.5.7.e^{-2\zeta}}{2.4.6.8}\mu^4\left(\frac{\zeta}{5}+\frac{\zeta^2}{5.6}+\frac{\zeta^3}{5.6.7}+\frac{\zeta^4}{5.6.7.8}+\ldots\right)$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Weil nun die Buchstaben A, B, C, D, u. s. f. in voriger Bedeutung nicht mehr gebraucht werden; so sey $\beta.e^{-\zeta}=A.\mu+B.\mu^2+C.\mu^3+D.\mu^4+E.\mu^5\ldots$

$\alpha.e$

$$\alpha . e^{-\zeta} = e^{-2\zeta} (a . \mu - b . \mu^2 + c . \mu^3 - d . \mu^4 + \ldots),$$

und man erhält $s =$

$$K(1 + A\mu + B\mu^2 + C.\mu^3 \ldots - e^{-2\zeta}(1 + a\mu - b\mu^2 + \ldots)),$$

wenn $K = \frac{k \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2)}}$

genommen wird.

386. §.

In dem Fall, wenn das Licht vertical in der Atmosphäre herab fällt, hat man $\gamma = 0$, und das giebt $s = k(1 - e^{-2\zeta})$ da dann $e^{-2\zeta}$ ohngefehr $\frac{1}{1000}$ seyn würde. Weil indessen k die Höhe der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zusammen gedruckten Atmosphäre bezeichnet; so sollte bey der Voraussetzung $\gamma = 0$ eigentlich $s = k$ gefunden werden: auch giebt die Differentialgleichung $ds = \frac{k(1 + \lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ (380 §.) dies Resultat würklich, wenn $\cos\gamma = 1$ gesetzt, und hiernächst die Gleichung $ds = kd\delta$ so integrirt wird, daß s verschwinden muß, wenn $\delta = 0$ ist. Man sieht demnach daraus, daß die im 383 §. zur Erleichterung der Integration angenommene Voraussetzung in dem Fall $\gamma = 0$ ohngefehr um $\frac{1}{1000}$ der Höhe k fehle, und diese Abweichung der Formul von der Wahrheit kann hier um deswillen als unbeträchtlich angesehen werden, weil $\frac{1}{1000} k$ ohngefehr 4 Toisen ausmacht, und man bey Bestimmung der Höhe k selbst dafür nicht sicher seyn kann, ob nicht um mehr, als um 4 Toisen gefehlt werde.

So lange γ nicht über 45° beträgt, so lange ist die Zahl $\mu < \frac{2n\zeta}{1 + 2n\zeta}$, und 2ζ ohngefehr $= 7$, $n = 0{,}0012$, mithin $\frac{2n\zeta}{1 + 2n\zeta} = \frac{0{,}0084}{1{,}0084} = 0{,}0083$ noch nicht völlig $\frac{1}{100}$. Dem nach ist so lange allemahl ziemlich nahe $s = K = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2)}}$. Weil ferner nicht allein $2n\zeta$ noch kein $\frac{1}{100}$ theilchen beträgt, sondern auch $\operatorname{tang}\gamma^2$ für Winkel die nur wenige Grade betragen sehr klein ist, so ist anfangs sehr nahe $s = k \sec\gamma$.

Nähme man r in Vergleichung mit k unendlich groß an, so hiesse das voraussetzen, die Erdfläche sey eine ebene Fläche: das würde alsdenn $n = \frac{k}{r} = 0$, mithin auch $\mu = 0$ geben, und so wäre allemahl $s = k \sec\gamma$. Weil nun anfangs, so lange γ klein ist, die äussere Gränze der Atmosphäre sich wenig krümmt, und der Natur einer ebenen Fläche nahe kommt, so läßt sich daraus abnehmen, daß anfangs die Linie s, so lange γ klein ist, sich mit γ beynahe eben so ändern müsse, wie geschehen würde, wenn die Erdfläche eben wäre. Wächst γ über 45°, so nähert sich die Zahl μ wiewohl zuerst nur noch langsam der Einheit. Die Voraussetzung $\mu = \frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta} = \frac{1}{10}$ giebt $\cot\gamma^2 = 9 \cdot 2n\zeta = 0{,}0756$, und $\cot\gamma = 0{,}27495$,

mithin

mithin $\gamma = 74^\circ\ 38'$. So lange demnach der Winkel γ nicht völlig 75° beträgt, sind wenige von den ersten Gliedern der gefundenen Reihe hinlänglich, die Linie s scharf genug zu finden. In dem Fall $\cot\gamma^2 = 2n\zeta = 0{,}0084$ hat man $\mu = \frac{1}{2}$, und diese Voraussetzung giebt $\cot\gamma = 0{,}0916515$, mithin $\gamma = 84^\circ\ 46'$. Nimmt man $\gamma = 85^\circ$, so ist $\cot\gamma = 0{,}0874887$, also $\cot\gamma^2 = 0{,}00765422$, und das giebt $\mu = \frac{840000}{1605422} = 0{,}52330166$. Weil dieser Bruch nur wenig grösser, als $\frac{1}{2}$ ist, so nehmen seine höhern Potenzen noch ziemlich schnell ab, deswegen bleibt die gefundene Reihe noch bis zum Winkel von 85° brauchbar, nnd es kommt nur darauf an, die Coefficienten durch eine nicht so gar weitläuftige Rechnung zu finden. Hiezu wird das folgende als eine Vorbereitung dienen.

387. §.

Die Exponentialgrösse e^z läßt sich durch eine Reihe von der Form ausdrücken:

$$e^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 \ldots$$

Es muß nemlich $e^z = 1$ seyn, wenn $z = 0$ ist, und aus der angenommenen Gleichung folgt

$$z = l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 \ldots)$$

mithin $dz = \dfrac{(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 \ldots)\,dz}{1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots}$

also ferner $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots$
$= A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 \ldots$

Damit beyde Reihen gleich groß werden, müssen die Coefficienten gleichnahmiger Potenzen von z einander gleich seyn, und das giebt folgende Gleichungen

$$A = 1 \qquad E = \tfrac{1}{5} D = \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$B = \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \qquad F = \tfrac{1}{6} E = \frac{1}{2.3.4.5.6}$$

$$C = \tfrac{1}{3} B = \frac{1}{2.3} \qquad G = \tfrac{1}{7} F = \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$D = \tfrac{1}{4} C = \frac{1}{2.3.4} \qquad \text{u. s. f.}$$

Der Coefficient von z^r ist $= \frac{1}{1.2.3.4\ldots(r-1).r}$ und man hat

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

$$\text{also } e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Die letzte Gleichung giebt

$$\frac{(e^{-z} + z - 1)}{z} = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^3}{2.3.4} - \frac{z^4}{2.3.4.5} + \ldots$$

und

und wenn dieser Werth $= P$ gesetzt wird, so ist ferner

$$\frac{z}{3} - \frac{z^2}{3 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{2}{z} P = Q,$$

mithin weiter

$$\frac{z}{4} - \frac{z^2}{4 \cdot 5} + \frac{z^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{3}{z} Q = R.$$

Auf eben die Art erhält man

$$\frac{z}{5} - \frac{z^2}{5 \cdot 6} + \frac{z^3}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{z^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{4}{z} R = S$$

$$\frac{z}{6} - \frac{z^2}{6 \cdot 7} + \frac{z^3}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^4}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{5}{z} R = T,$$

u. s. f. Die Gleichung

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

giebt eben so

$$\frac{e^z - z - 1}{z} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$+ \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots = P',$$

$$\frac{z}{3} + \frac{z^2}{3 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$
$$= \frac{2}{z} P' - 1 = Q',$$

$$\frac{z}{4} + \frac{z^2}{4 \cdot 5} + \frac{z^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{z^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$
$$= \frac{3}{z} Q' - 1 = R',$$

$$\frac{z}{5} + \frac{z^2}{5 \cdot 6} + \frac{z^3}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{z^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$
$$= \frac{4}{z} R' - 1 = S',$$

$$\frac{z}{6} + \frac{z^2}{6 \cdot 7} + \frac{z^3}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{z^4}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots$$
$$= \frac{5}{z} S' - 1 = T'$$

u. s. f. Daß diese Werthe nach und nach abnehmen, wenn z nicht grösser als 1 ist, oder doch die 1 nicht sehr übertrift, ist aus dem Gesetz klar, nach welchem die Reihen fortgehen; nur nehmen sie sehr langsam ab, wenn z der 1 nahe, oder wohl gar grösser als 1 ist.

Man setze nun $z = \zeta$, so geben diese Formuln die Coefficienten A, B, C, D, u. s. f., imgleichen a, b, c, d, u. s. f. im 385 §. Es wird nemlich

$$A = \tfrac{1}{2} P,\ B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} Q,\ C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} R,$$
$$D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot S, \text{ u. s. f.}$$

$a = \frac{1}{2} P' e^{-2\zeta}$, $b = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} Q' \cdot e^{-2\zeta}$,

$c = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} R' \cdot e^{-2\zeta}$, u. s. f., und es wird

die Linie, $s = 1 - e^{-2\zeta} + \frac{1}{2}(P - P' e^{-2\zeta}) \cdot \mu$
$+ \frac{1.3}{2.4}(Q + Q' \cdot e^{-2\zeta}) \cdot \mu^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}(R - R' e^{-2\zeta}) \cdot \mu^3$
$+ \frac{1\ldots5}{2\ldots6}(R + S' \cdot e^{-2\zeta}) \mu^4 + \frac{1\ldots7}{2\ldots8}(T - T' \cdot e^{-2\zeta}) \cdot \mu^5$
$+ \frac{1\ldots9}{2\ldots10}(V + V' \cdot e^{-2\zeta}) \mu^6 + \frac{1\ldots11}{2\ldots12}(W - W' \cdot e^{-2\zeta}) \cdot \mu^7$
$+ \frac{1\ldots13}{2\ldots14}(X - X' \cdot e^{-2\zeta}) \mu^8 + \ldots\ldots$

388. §.

Wofern man in dieser Formul $e^{-2\zeta} = 0{,}001$ annimmt, so ist $2\zeta = 6{,}907755$ nicht völlig $= 7$ (311 §.), und wenn $2\zeta = 7$ gesetzt wird, so heist das $e^{-2\zeta}$ noch etwas kleiner als $\frac{1}{1000}$ annehmen. Man findet nemlich (163 §. Allg. Rech.)

$$\begin{array}{rl} \text{Brigg. Log. } e = & 0{,}434294482 \\ & \times -7 \\ \hline \text{Brigg. Log. } e^{-7} - & 3{,}040061374 \\ \text{Log. } 10000000 = & 7, \\ \hline \text{Log. } 10000000 \cdot e^{-7} = & 4{,}959938626 \end{array}$$

also $e^{-7} = 0{,}000911881$8. Weil nun die

Voraussetzung $e^{-2\zeta} = \frac{1}{1000}$ willkührlich ist, und die Dichtigkeit der Luft in der höchsten Gegend wohl etwas kleiner als $\frac{1}{1000}$ seyn könnte, überdem auch die Resultate der Rechnung keine beträchtliche Aenderung leiden, wenn $2\zeta = 7$ gesetzt wird, so werde ich $2\zeta = 7$, also $\zeta = 3\frac{1}{2}$ annehmen, also $\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{7}$. Weiter findet man $e^{-\zeta}$ $= \sqrt{0{,}0009118818} = 0{,}03019738$, $1 - e^{-\zeta}$ $= 0{,}96980262$, und das mit $\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{7}$ multiplicirt giebt $\frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta} = 0{,}27708646$ und $P = 1 -$ $\frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta} = 0{,}72291354$. Daraus findet man ferner $\frac{2}{\zeta}P = 0{,}41309345$, und $Q = 1 - \frac{2}{\zeta}$ $P = 0{,}58690655$. Eben diese Rechnung weiter fortgesetzt giebt folgende Werthe

$$R = 1 - \frac{3}{\zeta}Q \qquad W = 1 - \frac{7}{\zeta}V$$

$$S = 1 - \frac{4}{\zeta}R \qquad X = 1 - \frac{8}{\zeta}W$$

$$T = 1 - \frac{5}{\zeta}S \qquad Y = 1 - \frac{9}{\zeta}X$$

$$V = 1 - \frac{6}{\zeta}T \qquad Z = 1 - \frac{10}{\zeta}Y.$$

Bezeichnet man die nun weiter folgenden Coefficienten

enten mit den Buchstaben $p, q, r, s,$ u. s. f., so findet man weiter p

$$p = 1 - \frac{11}{\zeta} Z \qquad r = 1 - \frac{13}{\zeta} q$$

$$q = 1 - \frac{12}{\zeta} p \quad , s = 1 - \frac{14}{\zeta} r, \text{ u. s. f.}$$

Bey den Rechnungen aus diesen Formuln ist aber noch folgendes zu bemerken. Jn mehr Coefficienten man zu suchen nöthig findet, desto schärfer müssen die vorhergehenden schon gefunden seyn, um die folgenden daraus herzuleiten. Der folgende Coefficient q, der zur Potenz $\mu^{\nu+1}$ gehört, ist überhaupt $= p - \frac{\nu + 1}{\zeta} p$, wenn $p = 1 - \frac{\nu}{\zeta} Z$ zur Potenz μ^{ν} gehörte. Die Brüche $\frac{\nu}{\zeta}, \frac{\nu+1}{\zeta}$ wachsen, weil ζ einerley bleibt, hingegen müssen z, p, q abnehmen: wofern also Z nur um etwas weniges zu groß oder zu klein angenommen, und die Zahl ν schon etwas groß ist; so kann das Product $\frac{\nu}{\zeta} Z$ schon um etwas erhebliches zu klein oder zu groß ausfallen, da dann der Coefficient p im ersten Fall zu groß, im lezten Fall zu klein ausfällt, und zwar so, daß der Fehler schon erheblicher ist, als er vorher bey dem Coefficienten Z war. Diesemnach kann er bey dem Coefficient q noch erheblicher ausfallen, und die Fehler können sich so häufen, daß zulezt das Product $\frac{\nu}{\zeta}$ oder $\frac{\nu+1}{\zeta}$ bey dieser fehlerhaften Rechnung grösser als 1 wird, welches doch nie seyn muß, weil kein Coefficient negativ werden kann. Diesen Fehlern weicht man gänzlich aus, wenn man die Rechnung rückwärts so anstellet.

Der Coefficient $s = 1 - \frac{14}{\zeta} r$ gehört zu μ^{14}, und es ist

$$s = \frac{\zeta}{15} - \frac{\zeta^2}{15.16} + \frac{\zeta^3}{15.16.17} - \frac{\zeta^4}{15\ldots18} + \frac{\zeta^5}{15\ldots19} - \frac{\zeta^6}{15\ldots20} \ldots$$

Weil diese Reihe sich schon ziemlich schnell nähert, so suche man s vermittelst dieser Reihe $\zeta = 3\frac{1}{2}$ gesetzt, so hat man hiernächst

$$r = \frac{\zeta}{14}(1 - s) \qquad V = \frac{\zeta}{7}(1 - W)$$

$$q = \frac{\zeta}{13}(1 - r) \qquad T = \frac{\zeta}{6}(1 - V)$$

$$p = \frac{\zeta}{12}(1 - q) \qquad S = \frac{\zeta}{5}(1 - T)$$

$$z = \frac{\zeta}{11}(1 - p) \qquad R = \frac{\zeta}{4}(1 - S)$$

$$Y = \frac{\zeta}{10}(1 - Z) \qquad Q = \frac{\zeta}{3}(1 - R)$$

$$X = \frac{\zeta}{9}(1 - Y) \qquad P = \frac{\zeta}{2}(1 - Q)$$

$$W = \frac{\zeta}{8}(1 - X) \qquad e^{-\zeta} = 1 - \zeta(1 - P)$$

Auf so viele Decimalstellen nun s richtig gefunden ist,

ist, auf eben so viele Decimalstellen, werden alle übrige angezeigte Werthe ebenfalls richtig gefunden. Die Rechnung selbst giebt folgende Zahlen

$+\ \frac{\zeta}{15} = 0{,}2333333333$	$-\ \frac{\zeta}{15.16} = 0{,}0510416666$
$\frac{\zeta}{15.16} = 0{,}0105085666$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots18} = 0{,}0020433324$
$\frac{\zeta}{15\ldots19} = 0{,}0003764033$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots20} = 0{,}00006537057$
$\frac{\zeta}{15\ldots21} = 0{,}00001089509$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots22} = 0{,}0000017333I$
$\frac{\zeta}{15\ldots23} = 0{,}0000006376$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots24} = 0{,}00000003846$
$\frac{\zeta}{15\ldots25} = 0{,}0000000538$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots26} = 0{,}0000000072$
$\frac{\zeta}{15\ldots27} = 0{,}0000000009$	$-\ \frac{\zeta}{15\ldots28} = 0{,}0000000000I$
$s = +\ 0{,}2442294675$	$-\ 0{,}0531521421$

oder $s = 0{,}1910773254$, und daraus findet man weiter nicht allein $t = 1 - \frac{15}{\zeta} \cdot s = 0{,}18109717$, sondern auch rückwärts

$$
\begin{aligned}
r &= 0{,}2022306865 \\
q &= 0{,}2147840507 5 \\
p &= 0{,}2290213164 5 \\
z &= 0{,}245311399 31 \\
Y &= 0{,}26414101024 1 \\
X &= 0{,}28616738490 6 \\
W &= 0{,}31230176910 3 \\
V &= 0{,}34384911544 8 \\
T &= 0{,}38275468298 8
\end{aligned}
$$

$$S = 0{,}432071721909$$
$$R = 0{,}496937243337$$
$$Q = 0{,}586906549443$$
$$P = 0{,}722913538474$$
$$e^{-\zeta} = 0{,}030197384659$$

Die lezten drey Zahlen kommen mit den vorhin für $e^{-\zeta}$, P, und Q schon gefundenen überein, welches zugleich zur Probe von der Richtigkeit der Rechnung dient.

389. §.

Man kann eben so die im 387 §. mit P′, Q′, R′, u. s. f. bezeichneten Zahlen suchen. Es ist nemlich

$$P' = \frac{e^{\zeta} - (1 + \zeta)}{\zeta} \qquad X' = \frac{8}{\zeta} W' - 1$$

$$Q = \frac{2}{\zeta} P' - 1 \qquad Y' = \frac{9}{\zeta} X' - 1$$

$$R' = \frac{3}{\zeta} Q' - 1 \qquad Z' = \frac{10}{\zeta} Y' - 1$$

$$S' = \frac{4}{\zeta} R' - 1 \qquad p' = \frac{11}{\zeta} Z' - 1$$

$$T' = \frac{5}{\zeta} S' - 1 \qquad q' = \frac{12}{\zeta} p' - 1$$

$$V' = \frac{6}{\zeta} T' - 1 \qquad r' = \frac{13}{\zeta} q' - 1$$

$$W' = \frac{7}{\zeta} V' - 1 \qquad s' = \frac{14}{\zeta} r' - 1,$$

also

also umgekehrt

$$s' = \frac{\zeta}{15} + \frac{\zeta^2}{15.16} + \frac{\zeta^3}{15\ldots17} + \frac{\zeta^4}{15\ldots18} + \frac{\zeta^5}{15\ldots19} + \frac{\zeta^6}{15\ldots20} + \ldots$$

$$r' = \frac{\zeta}{14}(1 + s')$$

$$q' = \frac{\zeta}{13}(1+r') \qquad V' = \frac{\zeta}{7}(1 + W')$$

$$p' = \frac{\zeta}{12}(1+q') \qquad T' = \frac{\zeta}{6}(1 + V')$$

$$z' = \frac{\zeta}{11}(1+p') \qquad S' = \frac{\zeta}{5}(1 + T')$$

$$Y' = \frac{\zeta}{10}(1+z') \qquad R' = \frac{\zeta}{4}(1 + S')$$

$$X' = \frac{\zeta}{9}(1+Y') \qquad Q' = \frac{\zeta}{3}(1 + R')$$

$$W' = \frac{\zeta}{8}(1+X') \qquad P' = \frac{\zeta}{2}(1 + Q')$$

und $e^z = \zeta . P' + 1 + \zeta$. Die Rechnung selbst giebt

$$t' = 0{,}27449261$$
$$s' = 0{,}29738161$$
$$r' = 0{,}32434540$$
$$q' = 0{,}35655453$$
$$p' = 0{,}39566174$$
$$z' = 0{,}44407419$$
$$Y' = 0{,}50425966$$
$$X' = 0{,}58544343$$
$$W' = 0{,}69363150$$

V' =

$$V' = 0{,}84681575$$
$$T' = 0{,}07730919$$
$$S' = 1{,}45411643$$
$$R' = 2{,}14735188$$
$$Q' = 3{,}67191052$$
$$P' = 8{,}17584342$$
$$e^{\zeta} = 33{,}11545196$$

Die letzte Zahl giebt auch folgende Rechnung. Es ist

$$
\begin{array}{rr}
\text{Brigg. Log. } e = & 0{,}4342945 \\
 & \times\, 3\tfrac{1}{2} \\
\hline
 & 1{,}3028835 \\
 & 2171472 \\
\hline
\text{Brigg. Log. } e^{\zeta} = & 1{,}5200307
\end{array}
$$

also $e^{\zeta} = 33{,}11545$, wie vorhin.

Noch multiplicire man die hier gefundenen Zahlen mit $e^{-2\zeta} = 0{,}000912$, so findet man

$$P' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00745635$$
$$Q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00334878$$
$$R' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00195837$$
$$S' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00132614$$
$$T' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00098242$$
$$V' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00077192$$
$$W' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00063257$$
$$X' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00053391$$
$$Y' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00045986$$

$$Z' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00040499$$
$$p' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00036083$$
$$q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00032516$$
$$r' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00029579$$
$$s' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00027120$$
$$t' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00025033$$

Demnach lassen sich nun die ersten 15 Coefficienten der am Ende des 387 §. gefundenen Reihe aus den schon berechneten Zahlen leicht finden. Es wird nemlich

$$1 - e^{-2\zeta} = 0{,}99908812$$
$$P - P' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}71545719$$
$$Q + Q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}59025533$$
$$R - R' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}49497887$$
$$S + S' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}43339786$$
$$T - T' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}38177226$$
$$V + V' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}34462103$$
$$W - W' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}31166920$$
$$X + X' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}28670129$$
$$Y + Y' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}26368115$$
$$Z + Z' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}24571639$$
$$p - p' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}22866049$$
$$q + q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}21510921$$

$$r - r' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}20193488$$
$$s + s' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}19134852$$
$$t - t' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}18084684$$

Endlich hat man noch

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} = 0{,}375$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} = 0{,}3125$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} = 0{,}2734375$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 9}{1 \,.\, 4 \ldots 10} = 0{,}24609375$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 11}{2 \,.\, 4 \ldots 12} = 0{,}22558594$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 13}{2 \,.\, 4 \ldots 14} = 0{,}20947265$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 15}{2 \,.\, 4 \ldots 16} = 0{,}19638061$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 17}{2 \,.\, 4 \ldots 18} = 0{,}18547058$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 19}{2 \,.\, 4 \ldots 20} = 0{,}17619705$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 21}{2 \,.\, 4 \ldots 22} = 0{,}16818809$$
$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 23}{2 \,.\, 4 \ldots 24} = 0{,}16118026$$

$$\frac{1.3\ldots25}{2.4\ldots26} = 0{,}15498101$$

$$\frac{1.3\ldots27}{2.4\ldots28} = 0{,}14944598$$

$$\frac{1.3\ldots29}{2.4\ldots30} = 0{,}14446445$$

also findet man die gesuchte Zahl:

$$\frac{s}{K} = 0{,}99908812 + 0{,}35772859.\mu$$

$$+0{,}22134575.\mu^2 \quad +0{,}15468089.\mu^3$$
$$+0{,}11850722.\mu^4 \quad +0{,}09395176.\mu^5$$
$$+0{,}07774165.\mu^6 \quad +0{,}06528607.\mu^7$$
$$+0{,}05630257.\mu^8 \quad +0{,}04890509.\mu^9$$
$$+0{,}04329450.\mu^{10} \quad +0{,}03845796.\mu^{11}$$
$$+0{,}03467135.\mu^{12} \quad +0{,}03129607.\mu^{13}$$
$$+0{,}02859626.\mu^{14} \quad +0{,}02612593.\mu^{15}+\ldots$$

Um daraus s zu finden, nimmt man $\mu =$

$$\frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}\ (385\ \S.) = \frac{2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2}{1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2}$$ und

$$K = \frac{k\,\mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2+2n\zeta)}} = \frac{k\,\sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2\,n\zeta\,\mathrm{tg}\,\gamma^2)}}.$$

(384 §.)

390. §.

Wenn $\gamma = 85°$ ist, so hat man (387 §.)

$\mu = 0{,}52330166$	$\mu^7 = 0{,}01074643$
$\mu^2 = 0{,}27384462$	$\mu^8 = 0{,}00562362$
$\mu^3 = 0{,}14330334$	$\mu^9 = 0{,}00294284$
$\mu^4 = 0{,}07499087$	$\mu^{10} = 0{,}00153999$
$\mu^5 = 0{,}03924284$	$\mu^{11} = 0{,}00080587$
$\mu^6 = 0{,}02053584$	$\mu^{12} = 0{,}00042171$

 $\mu^{13} =$

$\mu^{13} = 0{,}00022068 \qquad \mu^{15} = 0{,}00006041$
$\mu^{14} = 0{,}00011548$

Weiter ist $K = \dfrac{k \,.\, \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \dfrac{k \,.\, 1{,}0038198}{0{,}1267052}$ $= 7{,}922483 \,.\, k$; weil nun k ohngefehr 4000 Toisen groß ist, so beträgt K noch nicht 40000 Toisen, und es kann genügen, wenn die Zahl $\dfrac{s}{K}$ nur bis auf $\frac{1}{1000000}$ richtig gefunden wird. Nach angestellter Rechnung findet man

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{s}{K} & = & 0{,}99908812 \\
 & & +\ 0{,}18719996 \\
 & & +\ 0{,}06061434 \\
 & & +\ 0{,}02216628 \\
 & & +\ 0{,}00888695 \\
 & & +\ 0{,}00368693 \\
 & & +\ 0{,}00159648 \\
 & & +\ 0{,}00070159 \\
 & & +\ 0{,}00031662 \\
 & & +\ 0{,}00014391 \\
 & & +\ 0{,}00006667 \\
 & & +\ 0{,}00003099 \\
 & & +\ 0{,}00001462 \\
 & & +\ 0{,}00000690 \\
 & & +\ 0{,}00000330 \\
 & & +\ 0{,}00000157 \\
\hline
\end{array}
$$

also $\dfrac{s}{K} = 1{,}28452523$

und $s = 7{,}922483 \,.\, 1{,}284525 \,.\, k$, oder
$s = 10{,}204624 \,.\, k$.

391. §.

391. §.

Das Differential $ds = \frac{kd\delta \ \mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2\lambda)}} = \frac{kd\delta \ \mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 - 2nl\delta)}}$ (384 §.) läßt sich auch so integriren. Man setze $l\delta = -z$, und es sey nun $z = \zeta$, wenn δ am kleinsten ist, so daß $D = e^{-\zeta}$ die Dichtigkeit der Luft in der höchsten Gegend der Atmosphäre, mithin hier $\zeta = 7$ ist; so hat man $\delta = e^{-z}$, $d\delta = -e^{-z}dz$, und $ds = -\frac{k \cdot e^{-z}dz \ \mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2nz)}}$. Ferner sey $\frac{k \ \mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{2n}} = \mathrm{K}$ und $\frac{\cot\gamma^2}{2n} = m$, so ist auch $ds = -\mathrm{K} \cdot \frac{e^{-z}dz}{\sqrt{(m+z)}}$. Um hievon das Integral zu finden, setze man noch $m + z = y$, also $z = y - m$, so ist $ds = -\mathrm{K} \cdot \frac{e^{m} \cdot e^{-y}dy}{\sqrt{y}}$; und wenn man nach der Regel des 385 §. integrirt, so findet man $s =$

$$\mathrm{C} - \mathrm{K} \cdot e^{m} \left(2e^{-y} \cdot y^{\frac{1}{2}} + \frac{2 \cdot 2}{3} e^{-y} \cdot y^{\frac{3}{2}} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5} e^{-y} \cdot y^{\frac{5}{2}} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} e^{-y} \cdot y^{\frac{7}{2}} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} e^{-y} \cdot y^{\frac{2}{9}} \ldots\right)$$

Wenn $\delta = D = e^{-\zeta}$, also $z = \zeta$ ist, so muß dies

dies Integral verschwinden: alsdenn ist $y = m + \zeta$, und man erhält

$$C = 2K \cdot e^{-\zeta} \left((m+\zeta)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(m+\zeta)^{\frac{3}{2}} + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}(m+\zeta)^{\frac{5}{2}} + \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}(m+\zeta)^{\frac{7}{2}} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}(m+\zeta)^{\frac{9}{2}} \ldots \right)$$

Nach der Integration muß $\delta = 1$, also $z = 0$, und $y = m$ gesetzt werden: mithin findet man

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta} \left(1 + \frac{2}{3}(m+\zeta) + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}(m+\zeta)^2 + \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}(m+\zeta)^3 + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}(m+\zeta)^4 + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}(m+\zeta)^8 + \ldots \right)$$

$$- m^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} m + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3} m^2 + \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7} m^3 + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} m^4 \ldots \right)$$

und diese Reihe kann man auch so ausdrücken

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta} \left(1 + \frac{2m+2\zeta}{3} + \frac{(2m+2\zeta)^2}{3\cdot 5} + \frac{(2m+2\zeta)^3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{(2m+2\zeta)^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{(2m+2\zeta)^5}{2.5.7.9.11} + \ldots \right)$$

$$- m^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2m}{3} + \frac{(2m)^2}{3\cdot 5} + \frac{(2m)^3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{(2m)^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots \right).$$

Weil

Weil $2m + 2\zeta = 2\zeta\left(1 + \frac{m}{\zeta}\right)$ ist, so nehme man $1 + \frac{m}{\zeta} = \xi$ an, so ist

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}\left(1 + \frac{2\zeta}{3}\cdot\xi + \frac{(2\zeta)^2}{3\cdot 5}\cdot\xi^2 + \frac{(2\zeta)^3}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\xi^3 + \frac{(2\zeta)^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\xi^4 + \frac{(2\zeta)^5}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\cdot\xi^5 + \ldots\right)$$
$$- m^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2m}{3} + \frac{(2m)^2}{3\cdot 5} + \frac{(2m)^3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{(2m)^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots\right)$$

Für $\gamma = 90°$ ist $m = 0$, also $\xi = 1$, und alsdann nähert sich die Reihe zwar nur langsam, doch läßt sich vermittelst derselben die Zahl $\frac{s}{2K}$ finden, ohne daß die Rechnung eben so gar sehr weitläuftig wird.

392. §.

Man setze also $\zeta = 7$, und $2\zeta = 14 = \varepsilon$, so findet man

$$e^{-\zeta} = 0{,}00091188$$
$$\frac{\varepsilon}{3}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00425544 = A$$
$$\frac{\varepsilon^2}{3\cdot 5}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}01191523 = B$$

$$\frac{\varepsilon^3}{3\cdot5\cdot7}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}02383046 = C$$

$$\frac{\varepsilon^4}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}03706960 = D$$

$$\frac{\varepsilon^5}{3\cdot5\ldots11}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}04717949 = E$$

$$\frac{\varepsilon^6}{3\cdot5\ldots13}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}05080868 = F$$

$$\frac{\varepsilon^7}{3\cdot5\ldots15}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}04742143 = G$$

$$\frac{\varepsilon^8}{3\cdot5\ldots17}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}03905294 = H$$

$$\frac{\varepsilon^9}{3\cdot5\ldots19}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}02877585 = I$$

$$\frac{\varepsilon^{10}}{3\cdot5\ldots21}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}01918390 = K$$

$$\frac{\varepsilon^{11}}{3\cdot5\ldots23}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}01167716 = L$$

$$\frac{\varepsilon^{12}}{3\cdot5\ldots25}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00653921 = M$$

$$\frac{\varepsilon^{13}}{3\cdot5\ldots27}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00339070 = N$$

$$\frac{\varepsilon^{14}}{3\cdot5\ldots29}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00163689 = O$$

$$\frac{\varepsilon^{15}}{3\cdot5\ldots31}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00073924 = P$$

$$\frac{\varepsilon^{16}}{3\cdot5\ldots33}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00031366 = Q$$

$$\frac{\varepsilon^{17}}{3\cdot5\cdots35}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00012546 = R$$

$$\frac{\varepsilon^{18}}{3\cdot5\cdots37}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00004747 = S$$

$$\frac{\varepsilon^{19}}{3\cdot5\cdots39}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00001704 = T$$

$$\frac{\varepsilon^{20}}{3\cdot5\cdots41}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00000582 = U$$

$$\frac{\varepsilon^{21}}{3\cdot5\cdots43}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00000189 = V$$

$$\frac{\varepsilon^{22}}{3\cdot5\cdots45}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000588 = W$$

$$\frac{\varepsilon^{23}}{3\cdot5\cdots47}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000175 = X$$

$$\frac{\varepsilon^{24}}{3\cdot5\cdots49}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000050 = Y$$

$$\frac{\varepsilon^{25}}{3\cdot5\cdots51}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000014 = Z$$

Die Summe aller dieser Zahlen ist $= 0{,}33490026$; und wenn man mit $\zeta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} = 2{,}6457513\mathrm{I}$ multiplicirt, so findet man für den Fall $\gamma = 90°$ die Zahl $\frac{s}{2K} = 0{,}88606280$. Ferner ist in eben diesem Fall $K = \frac{k}{\sqrt{2n}}$, also $2K = \frac{k}{\sqrt{\cdot\frac{1}{2}n}}$, und $\sqrt{\frac{1}{2}n} = \sqrt{0{,}0006} = 0{,}0244949$, also $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n}} = 40{,}82482476$; demnach findet man für diesen

Fall die Linie $s = 36{,}1733584 \,.\, k$. Vermöge dieser Rechnung also muß das Licht, wenn es von der Sonne, dem Mond, oder einem andern Himmelskörper im Horinzont kommt, 36 mahl mehr Luft durchdringen, als in dem Fall, wenn derselbe Himmelskörper im Zenith stehet: denn für $\gamma = 0$ war $s = k$. (386 §.)

Die Rechnung ist schärfer für diesen besondern Fall $\gamma = 90°$ geführt, als an sich nöthig wäre, weil weder die Voraussetzung $\zeta = 7$, noch auch $n = 0{,}0012$ sicher genug ist: indessen kann man die nun gefundenen Zahlen auch als Coefficienten brauchen, wenn man für einen andern Winkel zwischen 90° und 85° die Rechnung anstellen will. Man darf alsdenn nur die Potenzen von $\xi = 1 + \frac{m}{\zeta}$ suchen, und selbige nach der Ordnung in diese Coefficienten multipliciren.

393. §.

In dem Fall $\gamma = 89°$ ist $\cot\gamma = 0{,}0174524$, $\cot\gamma^2 = 0{,}00030456$, also $\frac{\cot\gamma^2}{2n} = 0{,}1269 = m$, und $\xi = 1 + \frac{m}{\zeta} = 1{,}0181286$. Hievon sind die Potenzen

ξ	=	1,0181286	ξ^7	=	1,1340138
ξ^2	=	1,0365858	ξ^8	=	1,1545718
ξ^3	=	1,0553776	ξ^9	=	1,1755025
ξ^4	=	1,0745101	ξ^{10}	=	1,1968128
ξ^5	=	1,0939894	ξ^{11}	=	1,2185093
ξ^6	=	1,1138218	ξ^{12}	=	1,2405972

$\xi^{13} =$

$$\zeta^{13} = 1{,}2630874 \qquad \zeta^{16} = 1{,}3330360$$
$$\zeta^{14} = 1{,}2859874 \qquad \zeta^{17} = 1{,}3572022$$
$$\zeta^{15} = 1{,}3092985 \qquad \zeta^{18} = 1{,}3818063$$

Weil der Coefficient S im 392 §. schon kleiner als $\frac{1}{100000}$ ist, so könnten diese 18 Potenzen genügen; um indessen für diesen Winkel die Rechnung noch schärfer anzustellen, genügt es für die folgenden Potenzen nur die ersten vier Decimalstellen zu suchen, und man findet

$$\zeta^{19} = 1{,}4068 \qquad \zeta^{22} = 1{,}4846$$
$$\zeta^{20} = 1{,}4323 \qquad \zeta^{23} = 1{,}5113$$
$$\zeta^{21} = 1{,}4582 \qquad \text{u. s. f.}$$

Hiernächst geben sich folgende Producte

$$e^{-\zeta} = 0{,}0009119$$
$$A\zeta = 0{,}0043325$$
$$B\zeta^{2} = 0{,}0123511$$
$$C\zeta^{3} = 0{,}0251500$$
$$D\zeta^{4} = 0{,}0398316$$
$$E\zeta^{5} = 0{,}0516138$$
$$F\zeta^{6} = 0{,}0565918$$
$$G\zeta^{7} = 0{,}0537765$$
$$H\zeta^{8} = 0{,}0450993$$
$$I\zeta^{9} = 0{,}0338260$$
$$K\zeta^{10} = 0{,}0229605$$
$$L\zeta^{11} = 0{,}0142286$$
$$M\zeta^{12} = 0{,}0081125$$
$$N\zeta^{13} = 0{,}0042827$$
$$O\zeta^{14} = 0{,}0021050$$
$$P\zeta^{15} = 0{,}0009678$$
$$Q\zeta^{16} = 0{,}0004160$$
$$R\zeta^{17} = 0{,}0001702$$
$$S\zeta^{18} = 0{,}0000656$$

$$T\zeta^{19} = 0{,}0000239$$
$$U\zeta^{20} = 0{,}0000086$$
$$V\zeta^{21} = 0{,}0000029$$
$$W\zeta^{22} = 0{,}0000009$$
$$X\zeta^{23} = 0{,}0000003$$

Die Summe 0,3768300 sey $= S$, und man multiplicire sie mit $\sqrt{(m + \zeta)} = \sqrt{7{,}1269} = 2{,}6696254$, so findet man $S\sqrt{(m + \zeta)} = 1{,}005995$. Ferner suche man folgende Zahlen

$$1 = 1{,}0000000$$
$$\frac{2m}{3} = 0{,}0846000$$
$$\frac{(2m)^2}{3 \cdot 5} = 0{,}0042943$$
$$\frac{(2m)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 0{,}0001557$$
$$\frac{(2m)^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = 0{,}0000044$$
$$\frac{(2m)^5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} = 0{,}0000001$$

Die Summe 1,0890545 sey $= \Sigma$, und man multiplicire sie mit $\sqrt{m} = 0{,}3562302$, so findet man $\Sigma \cdot \sqrt{m} = 0{,}3879541$, und ferner $S \cdot \sqrt{(m + \zeta)} - \Sigma \cdot \sqrt{m} = 0{,}618041$. Weiter für $\gamma = 89°$ ist $2 \cdot \operatorname{cosec}\gamma = 2{,}0003046$, also $2K =$

$$\frac{2 \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{2n}} \cdot k = \frac{2\,0003046}{489898} = 40{,}831042 \cdot k,$$

und das giebt $s = 0{,}618041 \cdot 2K = 25{,}235257 \cdot k$.

Um

Um noch eine Anwendung von der gefundenen Reihe auf einen besondern Fall zu machen, setze ich auch die Rechnung für den Fall $\gamma = 86°$ hieher. Bey dieser Voraussetzung ist $\cot\gamma = 0{,}0699268$, $\cot\gamma^2 = 0{,}0048897$, und $m = \frac{\cot\gamma^2}{2n} = 2{,}037375$, also $\frac{m}{\zeta} = 0{,}29105357$, und $\zeta' = 1 + \frac{m}{\zeta} = 1{,}29105357$. Die Potenzen dieser Zahl sucht man am bequemsten vermittelst der Logarithmen, und findet auf solche Art folgende Zahlen:

		ζ^{13}	$= 27{,}686926$
ζ	$= 1{,}291053$	ζ^{14}	$= 35{,}745291$
ζ^2	$= 1{,}666819$	ζ^{15}	$= 46{,}149074$
ζ^3	$= 2{,}151952$	ζ^{16}	$= 59{,}580914$
ζ^4	$= 2{,}778285$	ζ^{17}	$= 76{,}922135$
ζ^5	$= 3{,}586914$	ζ^{18}	$= 99{,}310600$
ζ^6	$= 4{,}630897$	ζ^{19}	$= 128{,}215327$
ζ^7	$= 5{,}978735$	ζ^{20}	$= 165{,}532800$
ζ^8	$= 7{,}718867$	ζ^{21}	$= 213{,}711688$
ζ^9	$= 9{,}965470$	ζ^{22}	$= 275{,}913189$
ζ^{10}	$= 12{,}865956$	ζ^{23}	$= 356{,}218574$
ζ^{11}	$= 16{,}610634$	ζ^{24}	$= 459{,}897219$
ζ^{12}	$= 21{,}445434$	ζ^{25}	$= 593{,}751955$

Diese Potenzen geben ferner folgende Producte:

$$e^{-\zeta} = 0{,}000912$$
$$A \cdot \zeta = 0{,}005492$$
$$B \cdot \zeta^2 = 0{,}019857$$
$$C \cdot \zeta^3 = 0{,}051278$$
$$D \cdot \zeta^4 = 0{,}012985$$

$E \cdot \zeta^5$

$$
\begin{aligned}
E \,.\, \zeta^5 &= 0{,}169223 \\
F \,.\, \zeta^6 &= 0{,}235284 \\
G \,.\, \zeta^7 &= 0{,}283515 \\
H \,.\, \zeta^8 &= 0{,}301442 \\
I \,.\, \zeta^9 &= 0{,}286763 \\
K \,.\, \zeta^{10} &= 0{,}246817 \\
L \,.\, \zeta^{11} &= 0{,}193960 \\
M \,.\, \zeta^{12} &= 0{,}140229 \\
N \,.\, \zeta^{13} &= 0{,}093857 \\
O \,.\, \zeta^{14} &= 0{,}058513 \\
P \,.\, \zeta^{15} &= 0{,}034102 \\
Q \,.\, \zeta^{16} &= 0{,}018647 \\
R \,.\, \zeta^{17} &= 0{,}009230 \\
S \,.\, \zeta^{18} &= 0{,}004667 \\
T \,.\, \zeta^{19} &= 0{,}002179 \\
U \,.\, \zeta^{20} &= 0{,}000993 \\
V \,.\, \zeta^{21} &= 0{,}000426 \\
W \,.\, \zeta^{22} &= 0{,}000165 \\
X \,.\, \zeta^{23} &= 0{,}000061 \\
Y \,.\, \zeta^{24} &= 0{,}000020 \\
Z \,.\, \zeta^{25} &= 0{,}000007
\end{aligned}
$$

und die Summe $= 2260624 = S$ mit $\sqrt{(m + \zeta)} = 3{,}006223$ multiplicirt, giebt $S \,.\, \sqrt{(m + \zeta)} = 6{,}795938$. Ferner findet man

$$
\begin{aligned}
1 &= 1{,}000000 \\
\frac{2m}{3} &= 1{,}358250 \\
\frac{(2m)^2}{3 \cdot 5} &= 1{,}106905 \\
\frac{(2m)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} &= 0{,}644337
\end{aligned}
$$

$(2m)^4$

$$\frac{(2m)^4}{3\ldots9} = 0{,}291723$$

$$\frac{(2m)^5}{3\ldots11} = 0{,}108063$$

$$\frac{(2m)^6}{3\ldots13} = 0{,}033841$$

$$\frac{(2m)^7}{3\ldots15} = 0{,}009192$$

$$\frac{(2m)^8}{3\ldots17} = 0{,}002203$$

$$\frac{(2m)^9}{3\ldots19} = 0{,}000472$$

$$\frac{(2m)^{10}}{3\ldots21} = 0{,}000091$$

$$\frac{(2m)^{11}}{3\ldots23} = 0{,}000016$$

$$\frac{(2m)^{12}}{3\ldots25} = 0{,}000002$$

Die Summe $= 4{,}555095 = \Sigma$
mit $\sqrt{m} = 1{,}427366$
multiplicirt giebt $\Sigma \,.\, \sqrt{m} = 6{,}501785$, und man findet $S \,.\, \sqrt{(m+\zeta)} - \Sigma \,.\, \sqrt{m} = \frac{s}{2K}$ (391 §.) $= 0{,}294153$. Weiter ist $2K = \frac{2k \text{ cosec } \gamma}{\sqrt{2n}}$, und $\gamma = 86°$, also $2 \text{ cosec}\gamma = 2{,}0048838$; ferner $2n = 0{,}0024$, und $\sqrt{2n} = 0{,}048989$, also

also $\frac{2\text{cosec}.\gamma}{\sqrt{2n}} = \frac{2,0048838}{489898} = 40,924531$, mit-

hin $s = 0,294153 \cdot 40,924531 \cdot k$, oder

$s = 12,038973 \cdot k$.

394. §.

Herr Bouguer giebt Traité d'optique Liv. III. Sect. V. pag. 325. sqq. eine Auflösung der Aufgabe des 380. §., die mit der hier vorgetragenen zwar einerley Resultate giebt, seine Reihen haben aber nicht die bequeme Form, welche ich hier den Reihen am Ende des 389 §. und im 391 §. zu geben gesucht habe. Die Auflösung des Hn. Bouguer giebt den Reihen eine solche Form, wobey das Gesetz des Fortgangs nicht so deutlich in die Augen fällt, daß man mit Sicherheit wüßte, wie viele Glieder man berechnen muß, um das gesuchte richtig genug zu finden. Weil übrigens vermittelst der bisher berechneten Formuln für jeden gegebenen Winkel γ die Linie s gefunden werden kann, so ist nunmehro die Aufgabe des 380 §. in ihrem ganzen Umfange aufgelößt, und man hat die gesuchte Lichtverminderung für jeden Winkel γ vermittelst der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\, l\frac{1}{V}$, sobald nur für einen besondern Fall bekannt ist, in welchem Verhältniß 1 : V das Licht abnehme, wenn es in Luft von gleichförmiger und einerley Dichtigkeit mit der untern Luft an der Erdfläche um die bekannte Tiefe h hinein dringt.

Im Jahr 1725 am 23 November beobachtete H. Bouguer Abends den Vollmond in der Höhe

von

von 19° 16′ über dem Horizont, und am folgenden Morgen aufs neue in der Höhe von 66° 11′. Bey der ersten Beobachtung fand er die vom Mondenlicht herrührende Erleuchtung einer weissen Fläche so groß, als die Erleuchtung einer eben so weissen Fläche von vier Wachskerzen in der Entfernung von 50 Fuß. Bey der zweyten Beobachtung erleuchteten dieselben Kerzen in der Entfernung von 41 Fuß so stark als der Vollmond; also verhielten sich die Erleuchtungen, wie $41^2 : 50^2 = 1681 : 2500$ beynahe wie 2 : 3, und zu diesen Erleuchtungen gehörten die Winkel $= \gamma = 70°\ 44'$, und $\gamma = 23°\ 49'$. (Traité d'optique Liv. I. Sect. II. Art IX. pag. 79 sqq.

Aus diesen Erfahrungen schließt Hr. Bouguer folgendes. Er nimmt $k = 3911$ Toisen an, und findet für den Winkel $\gamma = 23°\ 49'$ die Linie $s = 1{,}093071 . k$ 4275 Toisen für den Winkel $\gamma = 70°\ 44'$ aber $s = 3{,}002813 . k = 11744$ Toisen. Wenn nun für den Winkel $\gamma = 23°\ 49'$ das Verhältniß der Lichtverminderung $= 1 : v$ ist, so muß $s = 4275$, also $l\,\frac{1}{v} = \frac{4275}{h}\ l\,\frac{1}{V}$ seyn. Wenn ferner für den Winkel $\gamma = 70°\ 44'$ das Verhältniß der Lichtverminderung $= 1 : v'$ ist, so erhält man eben so $l\,\frac{1}{v'} = \frac{11744}{h}\ l\,\frac{1}{V}$, und jene Gleichung von dieser subtrahirt giebt $l\,\frac{v}{v'} = \frac{7469}{h}\ l\,\frac{1}{V}$. Vermöge des Versuchs ist $v : v' = 2500 : 1681$, und wenn $h = 7469$ Toisen angenommen wird, so giebt diese Glei-

chung

chung $1 : V = 2500 : 1681$. Hätte es also mit den Versuchen des Hn. Bouguer, so wie mit der Voraussetzung $k = 3911$ Toisen seine völlige Richtigkeit; so würde das Licht in dem Verhältniß $2500 : 1681$ beynahe $= 3 : 2$ vermindert, wenn es in einer gleichförmig dichten Luft, so dichte, wie sie unten an der Erdfläche ist, einen Weg von 7469 Toisen zurück legte.

395. §.

Um die Rechnung nicht auf die unsichere Voraussetzung $k = 3911$ Toisen einzuschränken, behalte man $s = 1{,}093071 . k$ für das Verhältniß $1 : v$, und $s = 3{,}002813 . k$ für das Verhältniß $1 : v'$, so giebt sich $l\,\frac{v}{v'} = \frac{1{,}909742 . k}{h}\,l\,\frac{1}{V}$, und wenn $h = 1{,}909742 . k$ gesetzt wird, so $1 : V = v : v' = 2500 : 1681$; wird dagegen $h = k$ gesetzt, so findet man $l\,\frac{1}{V} = \frac{l\,(v : v')}{1{,}909742}$. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} l\,2500 & = & 3{,}3979400 \\ l\,1681 & = & 3{,}2255677 \\ \hline \text{also } l(v : v') & = & 0{,}1723723 \end{array}$$

und diese Zahl mit $1{,}909742$ dividirt giebt

$$l\,\frac{1}{V} = 0{,}0902526\,,\quad \text{also}\quad \frac{1}{V} = 1{,}230984,$$

und $V = 0{,}8123$. Wenn demnach das Licht in einer gleichförmig dichten Luft von einer solchen Dichtigkeit, wie die natürliche Luft unten an der Erdfläche hat, einen Weg zurück legt, der so

groß

groß ist, als die Höhe k der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zusammen gedrückten Atmosphäre, so wird es in dem Verhältniß $1 : 0{,}8123 = 10000 : 8123$, also ohngefehr um $\frac{1}{5}$ vermindert, wofern es mit des Hn. Bouguer Versuchen seine völlige Richtigkeit hat: hiemit wäre also zugleich die Durchsichtigkeit der untern gleichförmig dichten Luft in so ferne bekannt, daß man wüßte, das Licht leide eine Verminderung in dem Verhältniß $1000 : 8123$, wenn es in derselben einen Weg von ohngefehr 4000 Toisen zurück legt.

Der XXVII. Abschnitt.

Fortsetzung dieser Untersuchung nach Herrn Lambert.

396. §.

Herr Lambert (Photom. Part. V. Cap. I. §. 877 sqq. pag. 392 sqq.) verfährt bey Auflösung der Aufgabe des 380 §. auf folgende Art. Es war daselbst $ds = -\frac{r\delta\,(1+\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$, und $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\;l\,\frac{1}{V}$. Statt des beständigen Factors $\frac{l\,(1:V)}{h}$ schreibe man N, so

 ist

ist $-lv = N . ds$, und $\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta(1+\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$

$= N . \frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda\,\sec\gamma}{\sqrt{(1+(2\lambda+\lambda\lambda)\sec\gamma^2)}}$, oder auch

$\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda\,\sec\gamma}{\sqrt{((1+\lambda)^2 + (2\lambda+\lambda\lambda)\,\mathrm{tg}\gamma^2)}}$.

Setzt man ferner um abzukürzen

$1+\lambda = \varrho$, $2\lambda + \lambda\lambda = z^2$, also $(1+\lambda)\,d\lambda = zdz$,

so ist $\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta\,zdz\,\sec\gamma}{\sqrt{(\varrho^2 + zz\,\mathrm{tg}\gamma^2)}}$, und

$$\frac{1}{\sqrt{(\varrho^2 + zz\,\mathrm{tg}\gamma^2)}} = \frac{1}{\varrho} . \left(\left(1 + \frac{z^2}{\varrho^2}\right)\mathrm{tg}\gamma^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left(1 + \tfrac{1}{2} . \frac{z^2}{\varrho^2}\,\mathrm{tg}\gamma^2 + \frac{1.3}{2.4} . \frac{z^4}{\varrho^4}\,\mathrm{tg}\gamma^4 - \ldots\right);$$

also findet man durch die Integration $lv = $ Const. $+ Nr\sec\gamma$

$$\times \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\gamma^2 . \int\frac{\delta z dz}{\varrho} - \frac{1.3}{2.4}\,\mathrm{tg}\gamma^4 . \int\frac{\delta z^3 dz}{\varrho^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\mathrm{tg}\gamma^6 . \int\frac{\delta z^5 dz}{\varrho^5} \ldots\right).$$

(Um Hn. Lamberts Formul desto leichter zu vergleichen, ist nur zu bemerken, das er den Halbmesser der Erde = 1 setzt, der hier r heist, und daß bey ihm r das sey, was hier ϱ ist.) Die Integrale, welche in der gefundenen Reihe die Coefficienten der Potenzen von tangγ abgeben, nehme man so, daß sie verschwinden, wenn $y = 0$ gesetzt wird. Hiernächst erwäge man, daß $v = 1$ also $lv = 0$ seyn müsse, wenn y der Höhe der Atmosphäre gleich genommen wird. Ist diese $= a$, so

werden

werden die Integrale $\int \frac{\delta z dz}{\varrho}$, $\int \frac{\delta z^3\ dz}{\varrho^3}$ u. s. f. beständige Grössen, wenn man $y = a$ setzt. Demnach sey in dieser Voraussetzung $Nr . \int \frac{\delta z dz}{\varrho} = A$, $Nr . \int \frac{\delta z^3\ dz}{\varrho^3} = B$ u. s. f., so ist zuerst die Constans

$$= - \sec\gamma \left(A - \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg}\gamma^2 + \frac{1 . 3}{2 . 4} C \operatorname{tg}\gamma^4 - \ldots\right);$$

und weil nach der Integration $y = 0$ gesetzt werden muß, um die Verminderung des Lichts für den ganzen Weg zu haben, den dasselbe durch die Atmosphäre nimmt, so giebt sich $l \frac{1}{v} =$

$$\sec\gamma \left(A - \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg}\gamma^2 + \frac{1.3}{2.4} C \operatorname{tg}\gamma^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} D \operatorname{tg}\gamma^6 + \ldots\right)$$

Die Coefficienten A, B, C, D, u. s. f. sucht Herr Lambert nicht weiter vermittelst der Integralrechnung, und nimmt aus dem Grunde an, daß sie sehr schnell abnehmen, weil die Höhe der Atmosphäre in Vergleichung mit dem Halbmesser der Erde, also λ in Vergleichung mit 1, und z in Vergleichung mit ϱ sehr klein sey. Hat dies seine Richtigkeit, so lassen sich die ersten Coefficienten dieser Reihe nach einander auch durch Beobachtungen finden, wovon eine Probe in Bestimmung des Coefficienten A gegeben wird. Der angeführte Grund schien mir nicht ganz überzeugend, eine so schnelle Näherung der Reihe zu beweisen, daß auch alsdenn noch wenige von den ersten Gliedern das gesuchte beynahe richtig geben könnten, wenn $\gamma > 45°$

 ist:

ist: deswegen habe ich die schon oben vorgetragenen Rechnungen angestellet, um solche Reihen zu finden, welche sich allemahl nähern, was auch γ für einen Winkel bezeichnen soll. Zwar vermeidet Hr. **Lambert** durch sein Verfahren, daß er nicht genöthiget ist, eine Gleichung zwischen δ und y oder λ anzunehmen, wie diejenige, welche sich auf die Mariottische Hypothese gründet, nach welcher ich oben $y = - k/\delta$ angenommen habe: (380. §.) weil jedoch diese Gleichung vom Hn. **Lambert** selbst sonst für sehr nahe richtig angenommen wird, so habe ich kein Bedenken getragen, mit Hn. **Bouguer** sie hier beyzubehalten.

397. §.

So viel beweist die vom Hn. Lambert angenommene Reihe, daß beynahe $l\,\frac{1}{v} = A \sec\gamma$ sey, so lange γ ein kleiner Winkel bleibt, daß es aber nicht verstattet seyn könne anzunehmen, es verhalte sich noch $l\,\frac{1}{v}$ sehr nahe wie $\sec\gamma$, wenn gleich γ bis zu 80° wachse, ist aus Gründen klar, die Hr. Lambert selbst in anderer Absicht anführt. Dies hiesse nemlich annehmen, in der Gleichung $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\;l\,\frac{1}{V}$ (380 §.) verhalte sich die Linie s beynahe wie $\sec\gamma$, so lange γ nicht über 80° wächst, und daß dies nicht seyn könne, folgt aus dem, was Hr. **Lambert** a. a. O. im 889 u. f. bis zum 899 §. vorträgt, und welches sich nunmehro kurz auf folgende Art übersehen läßt. Es

sey

sey in der 124 Fig. KB der Halbmesser der Erde, 124. Fig.
BA $= a$ die Höhe der Atmosphäre, BF $= k$ die
Höhe der bis auf die Dichtigkeit $= 1$ zusammen gedrückten Atmosphäre. Der Kreis ALAY stelle die Gränze der natürlichen, und FGHW die Gränze der zusammen gedrückten Atmosphäre vor. Wenn nun das Licht in der Verticallinie herab fällt, so wird es eben so geschwächt, als wenn es in der zusammen gedrückten Atmosphäre den Weg FB zurück legte. Dies kann auf die Vermuthung leiten, es dürfte vielleicht das Licht, wenn es in der Richtung LB einfällt, eben den Abgang leiden, als wenn es in der zusammen gedrückten Atmosphäre den Weg GB zurück legte, da dann $s =$ GB wäre: allein bey fernerer Prüfung wird diese Vermuthung falsch befunden.

Man lasse KR auf die verlängerte BG senkrecht fallen, so ist gleich zu übersehen, daß BG $=$ GR $-$ BR sey. Ferner ist GR $= \surd(KG^2 - KR^2) = \surd((r+k)^2 - r^2 \sin\gamma^2)$ und BR $= r \cos\gamma$, also BG $= \surd((r+k)^2 - r^2 \sin\gamma^2) - r \cos\gamma = r (\surd((1+n)^2 - \sin\gamma^2) - \cos\gamma)$, die Zahl $\frac{k}{r} = n$ gesetzt, also auch BG $= r(\surd(\cos\gamma^2 + 2n + n^2) - \cos\gamma)$. Weil n eine kleine Zahl ist, so hat man beynahe $\surd(\cos\gamma^2 + 2n + n^2) = \cos\gamma$

$$\surd\left(1 + \frac{2n}{\cos\gamma^2}\right) = \cos\gamma + \frac{n}{\cos\gamma},$$ so lange auch γ ein kleiner Winkel ist: mithin beynahe

$$BG = \frac{n \cdot r}{\cos\gamma} = k \sec\gamma:$$ oder es ist anfangs, so lange γ klein ist, BG beynahe der $\sec\gamma$ proportional.

 In-

Indessen macht es doch die Natur der Sache schon für sich klar, und es erhellet von selbst aus Betrachtung der Figur, daß die Linie BG langsamer wachse als $k \sec\gamma$, besorders alsdenn, wenn γ anfängt, den Winkel von $45°$ zu übertreffen. Wenn also gleich die Vermuthung, daß vielleicht $s = GB$ seyn könnte, ihre Richtigkeit hätte, so würde es doch nur höchstens so lange verstattet seyn $s = k \sec\gamma$ anzunehmen, bis γ den Winkel von $45°$ zu übertreffen anfängt.

Es ist aber nur in dem einzigen Fall $\gamma = 0$ die Linie $s = k = GB$, in allen übrigen Fällen ist s noch kleiner als BG; um so weniger kann also s sich so lange beynahe wie $\sec\gamma$ verhalten, bis $\gamma = 80°$ wird. In der 125 Figur sey wiederum ALY die Gränze der natürlichen, und FGW die Gränze der
125. Fig. zusammen gedrückten Atmosphäre. Zwischen PM und pm stelle man sich eine unendlich kleine Schichte der natürlichen Atmosphäre vor, die nach der Zusammendrückung zwischen QN und qn befindlich ist; und das Licht falle in der Richtung LB in die Atmosphäre. Die Dichtigkeit der Luftschichte PMmp sey $= \delta$, der Schichte QqnN aber $= 1$, so ist die Linie $s = \int . \delta . Mm$ (380. §.), so wie GB $= \int 1 . Nn$. Man setze KP $=$ KM $= z$, KQ $=$ KN $= \zeta$, so ist BM $= \sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)} - r \cos\gamma$ und BN $= \sqrt{(\zeta^2 - r^2 \sin\gamma^2} - r \cos\gamma$, mithin giebt die Differentialrechnung Mm =

$$\frac{zdz}{\sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)}}, \text{ und } Nn = \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - r^2 \sin\gamma^2)}},$$

folglich $\delta . Mm = \dfrac{\delta z dz}{\sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)}}$. Aber wenn

das

das Licht vertical einfällt, so hat man $Qg = \delta . Pp$, oder $d\zeta = \delta dz$, also ist auch $\delta . Mm =$

$\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-(r^2 : z^2)\sin\gamma^2)}}$ und $Nn =$

$\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-(r^2 : \zeta^2)\sin\gamma^2)}}$. Ferner ist $z > \zeta$, also $\sqrt{(1-(r^2 : z^2)\sin\gamma^2)} > \sqrt{(1-(r^2 : \zeta^2)\sin\gamma^2)}$ und $\delta . Mm < Nn$. Weil nun die Linie s aus eben so vielen Elementen, wovon jedes $= \delta . Mm$ ist, bestehet, so viele Elemente, wovon jedes $= Nn$ ist, die Linie GB ausmachen, so muß $s <$ GB seyn. (M. s. Lamberts Photom. §. 889. 890.)

Hiemit stimmen auch die oben schon vorgetragenen Rechnungen sehr wohl überein. Es war nemlich $BG = r\,(\sqrt{((1+n)^2 - \sin\gamma^2)} - \cos\gamma)$, also ist auch BG =

$$r((1+n)\cos\gamma\sqrt{\left(\sec\gamma^2 - \frac{tg\gamma^2}{(1+n)^2}\right)} - (1+n)\cos\gamma + n\cos\gamma);$$

oder BG =

$$r((1+n)\cos\gamma(\sqrt{(1+\frac{2n+n^2}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2)} - 1\,(+n\cos\gamma).$$

Wenn man nun $\sqrt{(1+\frac{2n+n^2}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2)}$ nach dem binomischen Lehrsatz ausdrückt, so findet man

$$BG = r\,((1+n)\cos\gamma(\tfrac{1}{2} . \frac{n(2+n)}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2$$

$$-\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\frac{n^2(2+n)^2}{(1+n)^4}\,tg\gamma^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{n^3(2+n)^3}{(1+n)^6}$$

$tg\gamma^6 - \ldots) + n\cos\gamma)$, oder $BG = rn\cos\gamma$

$$(1+\tfrac{1}{2}.\frac{2+n}{1+n}\,tg\gamma^2 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\frac{n(2+n)^2}{(1+n)^3}\,tg\gamma^4$$

$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{n^2(2+n)^3}{(1+n)^5} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots)$. Es ist aber $nr = k$, und die Zahl n sehr klein, also beynahe $\frac{2+n}{1+n} = 2$, und $\frac{n}{1+n} = n$, folglich beynahe $13G = k \cos\gamma(\sec\gamma^2 - n\operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1}{2}n^2\operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots)$, oder auch $BG = k\sec\gamma\,(1 - n\operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2 + \frac{1}{2}n^2 \operatorname{tg}\gamma^4 \sin\gamma^2 - \ldots)$. So lange demnach γ ein kleiner Winkel ist, hat man beynahe $BG = k\sec\gamma\,(1 - n\operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2)$ und aus dem 389 §. findet man unter der angenommen Voraussetzung, daß γ nur klein sey, die Linie s sehr nahe $= K$, also $s = \frac{k\operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k\sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta\operatorname{tg}\gamma^2)}}$ oder s beynahe $= k\sec\gamma\,(1 - n\zeta\operatorname{tg}\gamma^2)$. Weil nun vermöge der Voraussetzungen, worauf sich die Rechnung im 318 §. gründet, $\zeta = 3\frac{1}{2}$ ist, so ist $n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2 > n\operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2$, mithin giebt jene Rechnung auch schon für kleine Winkel γ die Linie $s < BG$. Für den Winkel $\gamma = 90°$ ist $GB = r\sqrt{(2n + n^2)}$ beynahe $= r\sqrt{2n} = \frac{2nr}{\sqrt{2n}} = \frac{2k}{\sqrt{2n}}$, und aus dem 392 §. hat man $\frac{s}{2K} = 0{,}8860628$, und $K = \frac{k}{\sqrt{2n}}$, also $s = 0{,}886028 \,.\, GB$, woraus die Uebereinstimmung mit den bisherigen Schlüssen gleichfalls erhellet.

398. §.

Wenn man in der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\; l\frac{1}{V}$ (380 §.) die Linie $k = k$ nimmt, so muß statt 1 : V dasjenige Verhältniß gesetzt werden, in welchem das Licht vermindert wird, wenn es durch die Atmosphäre bis auf die Erde vertical herab fällt. Hat es also mit den im 395 §. angeführten Versuchen des Hn. Bouguer seine völlige Richtigkeit, so muß man $V = 0,8123$, also $l\frac{1}{V} = 0,0902526$ nehmen, wenn man $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\; l\frac{1}{V}$ setzt. Hr. Bouguer hat eine Tafel berechnet, die er im Traité d'optique Liv. III. Sect. V. pag. 332. mittheilt. Diese enthält für die ersten 20 Grade der Höhe eines himmlischen Körpers, und nachher für die fernern Höhen von 5 zu 5 Graden die Linie s, und das dazu gehörige Verhältniß $1 : v$. Die Linie s ist in der Voraussetzung $k = 3911$ Toisen berechnet, und die Zahl v in der Voraussetzung, daß $1 : V = 1 : 0,8123$ sey, wie im 395 §. ist gefunden worden. Dagegen glaubt Hr. Lambert gefunden zu haben, das Licht leide eine Verminderung in dem Verhältniß 10000 : 5889 fast = 5 : 3, wenn es vertical durch die Atmosphäre herab fällt. (Photom. Part. V. Cap. I. §. 886. pag. 387). Den Versuch selbst verspricht er in der Pyrometrie zu beschreiben, weil er die Gründe davon in der Photometrie nicht vorgetragen habe. Weil nun

$$l.10000 = 4{,}0000000$$
$$l\ 5889 = 3{,}7700416$$
$$\text{so ist } l\,\frac{10000}{5889} = 0{,}2299584$$

und man muß in der Gleichung $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{k}$

$l\,\frac{1}{V}$ die Zahl $V = 0{,}5889$ und $l\,\frac{1}{V} =$

$0{,}2299584$, oder fast $l\,\frac{1}{V} = 0{,}23$ nehmen, falls Hn. Lamberts Versuch zuverläßiger ist, als des Hn. Bouguer Versuch. Dies aber anzunehmen hat man um so mehr Grund, weil Hr. Lambert versichert, daß er den Versuch einen ganzen Tag fortgesetzt habe. Weil mir indessen nicht bekannt ist, daß die Sache völlig entschieden sey, so habe ich in folgender Tabelle nach beyden Voraussetzungen die Zahl v berechnet. Weil übrigens die Rechnung nicht davon abhängt, daß man die absolute Grösse der Linie k genau kenne, so habe ich nur die Zahlen $\frac{s}{k}$ in die Tabelle gebracht.

Winkel γ	die Zahl $s:k$	v nach Hn. Bouguer	v nach H. Lambert.
0°	1	0, 8123	0,5889
10°	1, 01534	0, 8098	0,5841
20°	1, 06418	0, 8016	0,5692
23° 49′	1, 09307	0, 7968	0,5605
25°	1, 10329	0, 7951	0,5575
30°	1, 15469	0, 7866	0,5425
35°	1, 22117	0, 7759	0,5244
40°	1, 30503	0, 7624	0,5011
45°	1, 41395	0, 7454	0,4729
50°	1, 55612	0, 7237	0,4397
55°	1, 74201	0, 6963	0,3975
60°	1, 99031	0, 6613	0,3485
65°	2, 35004	0, 6136	0,2903
70°	2, 89977	0, 5474	0,2153
70° 44′	3, 00281	0, 5358	0,2038
75°	3, 80465	0, 4535	0,1428
80°	5, 55995	0, 3149	0,0526
85°	10, 20020	0, 1201	0,00414
86°	12, 14011	0, 0802	0,00161
87°	14, 87650	0, 0454	0,00028
88°	19, 03068	0, 0192	0,000042
89°	25, 55101	0, 0047	0,0000013
90°	35, 49555	0, 0006	$l.(1:v)=8,164\ldots$

399. §.

Ich habe in die zweyte und dritte Columme dieser Tabelle die vom Hn. Bouguer berechneten Zahlen sonst unverändert gelassen, nur daß ich die Zahlen $\frac{s}{k}$ hieher gesetzt habe, wogegen er die Linien s

und

und k in Zahlen hat, die Höhe $k = 3911$ Toisen angenommen. Die hiesigen Zahlen entstehen also aus Hn. Bouguer Zahlen, die er für die Linie s angiebt, wenn man sie alle mit 3911 dividirt. Diese Zahlen $\frac{s}{k}$ müssen also für kleine Winkel mit der dazu gehörigen Secante sehr nahe überein kommen, nach und nach aber müssen diese Zahlen kleiner werden, als $\sec\gamma$, und zwar müssen die Differenzen desto mehr wachsen, je grösser γ wird. Diese Bemerkung dient, die Zahlen $\frac{s}{k}$ so wie sie Hr. Bouguer berechnet hat, einigermassen zu prüfen, wenn man sie mit der Secante des dazu gehörigen Winkels zusammen hält, da es sich denn so gleich zeigt, daß die für die Winkel γ von 35° und 50° einer Berichtigung bedürfen. Hr. Bouguer hat nemlich für $\gamma = 35°$ die Linie $s = 4776$ angegeben, und ich finde $\frac{4776}{3911} = 1,22117$; es ist aber $\sec. 35° = 1,2207746$, also muß $\frac{s}{k}$ kleiner seyn. Nach der Formul des 389 §. finde ich $\mu = \frac{2n\zeta\, \mathrm{tg}\gamma^2}{1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2} = 0,004101$, und $K = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2)}} = 1,21827 \,.\, k$, also $s = 1,000555 \,.\, K = 1,21895 \,.\, k$. Die Zahl $\frac{s}{k} = 1,21895$ nach Hn. Bouguer mit 0,09025 multi-

multiplicirt giebt $l\frac{1}{v} = 0{,}1100090$, also $\frac{1}{v} = 1{,}288247$, und $v = 0{,}7762$ statt $0{,}7759$ für $\gamma = 35°$. Wenn man dagegen nach Hn. Lambert mit 0,23 multiplicirt, so findet man $l\frac{1}{v} = 0{,}2803585$, $\frac{1}{v} = 1{,}907034$, und $v = 0{,}5244$, wie es in der vierten Columme angegeben ist.

Bey dem Winkel $\gamma = 50°$ tritt eben der Fall ein. Es hat nemlich Hr. Bouguer $\frac{s}{k} = \frac{6086}{3911} = 1{,}55612$, und es ist sec $50° = 1{,}5557238$, mithin jene Zahl zu groß. Ich finde nach der Formul des 389 §. die Zahl $\mu = 0{,}0118$, und $K = 1{,}5465283 \,.\, k$, also $s = 1{,}00329 \,.\, K = 1{,}5516162 \,.\, k$. Die Zahl $\frac{s}{k}$ nach Hn. Bouguer mit 0,09025 multiplicirt giebt $l\frac{1}{v} = 0{,}1400332$, also $\frac{1}{v} = 1{,}38049$, und $v = 0{,}7244$ statt 7237. Multiplicirt man nach Hn. Lambert mit 0,23, so wird $l\frac{1}{v} = 0{,}3568717$ gefunden, also $\frac{1}{v} = 2{,}274426$, und $v = 0{,}4397$.

400. §.

Bey Prüfung der übrigen Zahlen, welche Hr. Bouguer mittheilt, wird man finden, daß sie bald mehr bald weniger fehlerhaft sind: weil jedoch die Fehler seine für v berechneten Zahlen sich nicht sehr erheblich ändern, so habe ich sie gelassen wie sie sind, da dann seine Tabelle doch dazu dient, einigermassen zu übersehen, nach welchem Gesetz v abnimmt, wenn γ wächst. Für die Winkel, welche dem rechten Winkel nahe kommen, fehlen seine Zahlen am meisten. Ich habe oben für $\gamma = 90^\circ$ die Zahl

$\frac{s}{k} = 36{,}1733584$ gefunden, und nach Herrn Bouguer ist sie 35,49555. Die Richtigkeit meiner Rechnung habe ich mehr als einmahl geprüft, auch für diesen Fall eine Formul nach eben der Integrations-Methode, wie Hr. Bouguer gesucht, da ich dann, ohne die Rechnung (die nach dieser Methode sehr weitläuftig wird), bis auf die gröste Schärfe fortzusetzen, $\frac{s}{k} = 35{,}9$ finde. Nimmt man diese Zahl $= 36$ an, so erhält man $l\,\frac{1}{v}$ $= 3{,}24900$, also $\frac{1}{v} = 1774{,}2$, und v $= 0{,}00056$. Hat es also mit den Erfahrungen des Hn. Bouguer seine Richtigkeit, so wird das Licht nicht völlig 2000 mahl schwächer, wenn es in horizotaler Richtung durch die Atmosphäre fällt. Wäre dagegen Hn. Lamberts Versuch vollkommen zuverläßig, so würde derselbe für das horizontal ein-

einfallende Licht $l\frac{1}{v} = 0{,}23 \cdot 36 = 8{,}28$, oder wenn man $\frac{s}{k}$ mit Hn. Bouguer $= 35{,}5$ nimmt, doch wenigstens $l\frac{1}{v} = 8{,}165$ geben, mithin wäre $\frac{1}{v}$ eine Zahl, die 9 Ziffern hätte, und sie wäre grösser als 146000000, mithin v kleiner als $\frac{1}{146000000}$. Schwerlich wird man sich überzeugen, daß das Licht in dem angenommenen Fall eine so ungemein starke Verminderung leide: auch nimmt Hr. Lambert selbst (a. a. O. 898 §. 402 S.) nur an, das horizontal einfallende Licht werde 2000 mahl schwächer, und ich sehe nicht, wie dies mit dem vorigen bestehen kann. Herr Lambert sagt nicht, woher er die Zahl 2000 genommen habe, hier finde ich nicht, daß er auf einen Versuch Bezug macht, und es scheint, er habe sie nur als eine runde Zahl aus dem Bouguer genommen. Hätte er diese, oder eine ihr nahe kommende Zahl mittelst eines Versuchs gefunden, so würde dies zugleich die Richtigkeit der oben im 364 §. angeführten Versuche des Hn. Bouguer beweisen: denn die Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h} \cdot l\frac{1}{V}$ würde, wenn $\frac{1}{v} = 2000$ $s = 36 \,.\, k$, und $h = k$

gesetzt

gesetzt wird, $l\frac{1}{V} = \frac{3,301030}{36} =$ 0,091328, also beynahe so geben, wie nach des Hn. Bouguer Versuch, und man hätte für das vertical einfallende Licht $l\frac{1}{v} = 0,091328$,

also $\frac{1}{v} = 1,234036$, und $v = 0,8013$, mithin wäre die Verminderung nicht mehr als ohngefehr $\frac{1}{5}$. Könnte man also die Richtigkeit der Lambertschen Versuche nicht in Zweifel ziehen, so müßte entweder das Mariottische Gesetz der Dichtigkeiten der Luft fehlerhafter seyn, als man sonst dafür zu halten Grund hat, oder man wäre genöthiget, die ganze Theorie von der Durchsichtigkeit, (327. 376. §.) aufzugeben.

401. §.

Es sey BN $= s$, und man stelle sich vor, für jeden Winkel FBN $= \gamma$ sey BN $= s$ so groß genom-
124. Fig. men, wie erfordert wird, wenn BN jedesmahl der Masse proportional seyn soll, die das Licht in der Atmosphäre auf dem Wege LB durchdringt; so liegen alle Punkte N in einer krummen Linie FND, deren Natur die Differentialgleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ (380 §.) ausdrückt, und man kennet nun schon die mancherley Schwierigkeiten, welche bey Integration dieser Gleichung eintreten. So viel ist gewiß, daß diese krumme Linie den Kreisbogen FGH in F berührt, übrigens aber

aber muß sie sich nach und nach immer etwas stärker gegen FK zu krümmen, als der Bogen FGH sich krümmt. Wäre also vielleicht FND auch ein Kreisbogen, oder käme diese Linie einem Kreisbogen nahe; so liesse sich der dazu gehörige Halbmesser finden, wenn nur für einen Winkel γ die Linie BN etwa vermittelst eines Versuchs gefunden werden könnte, die Höhe BF ebenfalls als bekannt vorausgesetzt. Es würde nemlich dieser Kreisbogen FND seinen Mittelpunct E in der Scheitellinie FK haben müssen, der sich durch Zeichnung so finden liesse. Man nehme an, FMD sey ein Kreisbogen, welcher der Linie FND sehr nahe kommt, vielleicht so nahe, daß er mit ihr für einerley angenommen werden kann, da dann auch BM mit BN einerley wäre. Nachdem nun die Sehne FM gezogen worden, halbire man sie mit einer graden Linie senkrecht, so geht selbige durch E. Aus BF $= k$, BM $= s$, FBM $= \gamma$ hat man auch FM $= \sqrt{(k^2 - 2ks \cdot \cos\gamma + s^2)}$ und tang MFB $=$

$\dfrac{s \sin\gamma}{k - s \cos\gamma}$, also sec MFB $= \sqrt{\left(1 + \dfrac{s^2 \sin\gamma^2}{(k - s\cos\gamma)^2}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{(k^2 - 2ks\cos\gamma + s^2)}}{k - s\cos\gamma}$ und man findet den

Halbmesser FE $= \frac{1}{2}$ FM . sec MFB $=$

$\dfrac{k^2 - 2ks\cos\gamma + s^2}{2(k - s\cos\gamma)}$. Setzt man $\dfrac{s}{k} = m$, so ist

$$FE = \frac{1 - 2m\cos\gamma + m^2}{2(1 - m\cos\gamma)} \cdot k.$$

In der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\ l\frac{1}{V}$ ist $1 : V$ das Verhältniß, in welchem das vertical durch die Atmosphäre fallende Licht vermindert wird. Wenn also für einen gegebenen Winkel γ das Verhältniß $1 : v$ bekannt ist, so hat man $\frac{s}{k} = m = \frac{l\ (1 : v)}{l(1 : V)}$. Es sey nach Hn. Lambert $1 : V = 5 : 3$, und für $\gamma = 90^\circ$ sey $1 : v = 2000 : 1$; so findet man $m = \frac{3{,}3010300}{0{,}2218488} = 14{,}87964 = \frac{BD}{BF}$, also $m^2 = 221{,}403423$. Weil ferner in diesem Fall $\cos\gamma = 0$ ist, so wäre $FE = \frac{1}{2}(1 + m^2)\ k = 111{,}201711 . k$. (M. s. Lamberti Phot. §. 898. 899.) Wofern es mit der oben vorgetragenen Theorie von der Durchsichtigkeit, oder dem Gesetz, nach welchem das Licht in durchsichtigen Massen geschwächt wird, seine Richtigkeit hat; und wofern überdem das Mariottische Gesetz der Dichtigkeiten der Luft in grossen Höhen nicht ganz ungemein von der Natur abweicht; so kann diese Rechnung unmöglich bestehen. Denn unter dieser Voraussetzung muß $\frac{BD}{BF} = 36$ seyn, oder doch $\frac{BD}{BF}$ dieser Zahl 36 ziemlich nahe kommen. Mit Beybehaltung dieser Zahl aber wird der Halbmesser $FE = 648, s . k$ gefunden.

402. §.

Es sey dieser Halbmesser FE $= \varrho$, $=$ EM, und ES sey auf die verlängerte BM senkrecht, so ist BM $=$ MS $-$ BS, und MS $= \sqrt{(\varrho^2 - (\varrho - k)^2 \sin\gamma^2)}$, BS $= (\varrho - k) \cos\gamma$: also erhält man BM $= \sqrt{(\varrho^2 - (\varrho - k)^2 \sin\gamma^2)} - (\varrho - k) \cos\gamma$, oder BM $= \sqrt{(\varrho^2 \cos\gamma^2 + (2\varrho k - k^2) \sin\gamma^2)} - (\varrho - k) \cos\gamma$. Wird ferner die Zahl $\frac{\varrho}{k} = q$ gesetzt, so ist auch BM $= k\,(\sqrt{(q^2 \cos\gamma^2 + (2q - 1) \sin\gamma^2)} - (q - 1) \cos\gamma)$. Sowohl die gefundene Formul als auch die Natur der gezeichneten Figur ergiebt, daß die auf solche Art gefundene Linie BM in dem Fall $\gamma = 0$ der Linie k gleich sey; daß ferner BM zwar nicht mit γ wachse, aber doch zugleich nicht allein gleich anfangs kleiner als $k \sec\gamma$, sondern auch kleiner als BG sey; daß endlich auch eben diese Linie BM desto mehr von BG übertroffen werde, je grösser der Winkel γ wird. Man kann die gefundene Formul auch so ausdrücken: BM $= k\,(q \cos\gamma\,(\sqrt{(1 + \frac{2q - 1}{q^2} \operatorname{tg}\gamma^2)} - 1) + \cos\gamma)$, also ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$\frac{BM}{k} = q \cos\gamma \,.\, \left(\tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2q-1}{q^2} \operatorname{tg}\gamma^2 - \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{(2q-1)^2}{q^4} \operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \,.\, \frac{(2q-1)^3}{q^6} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots\right) + \cos\gamma = \cos\gamma \left(1 + \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2q-1}{q} \operatorname{tg}\gamma^2 - \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{(2q-1)^2}{q^3} \operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \,.\, \frac{(2q-1)^3}{q^5} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots\right).$$

Weil

nun

nun $q = 648$, $s \cdot k$ eine ziemlich grosse Zahl ist, so hat man beynahe $\frac{2q - 1}{q} = 2 - \frac{1}{q} = 2$, und man findet beynahe $\frac{BM}{k} = \cos\gamma\ (\sec\gamma^2 - \frac{1}{q} tg\gamma^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q^2}\ tg\gamma^6 \ldots)$, also $BM = k\ \sec\gamma\ (1 - \frac{1}{q}\ tg\,\gamma^2\ \sin\gamma^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q^2}\ tg\gamma^4\ \sin\gamma^2 - \ldots)$; mithin ist für kleine Winkel γ diese Linie $BM = k\ \sec\gamma\ (1 - \frac{1}{q}\ tg\gamma^2\ \sin\gamma^2)$, und es ist $\frac{1}{q} = \frac{k}{\varrho}$, so wie oben $n = \frac{k}{r}$ war. Für kleine Winkel γ aber ist $BG = k\ \sec\gamma\ (1 - n\ tg\gamma^2\ \sin\gamma^2)$, und $\frac{1}{q} > n$, also gleich anfangs $BM < BG$. Weil jedoch die eigentlich gesuchte Linie $BN = s$ für kleine Winkel $= k\ \sec\gamma\ (1 - n\zeta\ tg\gamma^2)$ seyn muß; so ist sie gleich anfangs kleiner als die hier angenommene Linie BM, denn es ist $\sin\gamma^2$ allemahl $< 2n\zeta$. Daraus folgt, daß die eigentlich gesuchte Linie FND sich anfangs etwas stärker krümme, als der Kreisbogen FMD: weil jedoch sehr nahe $BM = k\ \sec\gamma$ bleibt, so verlohnt es sich der Mühe zu vergleichen, ob die Linie $BM = k\ (\sqrt{(q^2 \cos\gamma^2 + (2q - 1) \sin\gamma^2)} - (q - 1) \cos\gamma)$ für grössere Werthe des Winkels γ der Linie s nahe komme, die man eigentlich bey Auflösung der Aufgabe des 380 §. nöthig hat. Die bequemste

Form

Form erhält die Formul, um darnach zu rechnen, wenn man sie so ausdrückt: $BM = k\,(\sqrt{((q-1)^2 \cos\gamma^2 + 2q - 1)} - (q-1)\cos\gamma)$, also auch $BM = k\,(q-1)\left(\sqrt{\left(\cos\gamma^2 + \frac{2q-1}{(q-1)^2}\right)} - \cos\gamma\right.$. Es ist aber $q = 648{,}5$, und man findet $\frac{2q-1}{(q-1)^2} = 0{,}0030911883$.

Für $\gamma = 40°$ ist $\cos\gamma = 0{,}7660444$, $\cos\gamma^2 = 0{,}58682400$, und man findet $BM = 1{,}3047125$. Dagegen ist nach der Formul des 389 §. $tg\gamma = 0{,}8390996$, $tang\gamma^2 = 0{,}70408810$, $\sqrt{(1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2)} = 1{,}0015559$, und man findet $K = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2)}} = 1{,}30337937 \cdot k$. Weiter ist $\mu = \frac{2n\zeta\, tg\gamma^2}{1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2} = \frac{311431}{100311431} = 0{,}0031046$, und es wird $s = 1{,}000198 \cdot K = 1{,}3036374 \cdot k$ gefunden, also noch wie bey kleinen Winkeln $BM > s$.

Für $\gamma = 45°$, ist $\sec\gamma = \sqrt{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071068$, also $\cos\gamma^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$, und es wird $BM = 1{,}413104 \cdot k$ gefunden. Dagegen ist aus dem 389 §. $\mu = \frac{84}{10084} = 0{,}00833$, $\mu^2 = 0{,}0000694$, $K = 1{,}4083111 \cdot k$, und $s = 1{,}0020829 \cdot K = 1{,}4112443 \cdot k$, wiederum kleiner als BM, und zwar so, daß der Ueberschuß der letzten Linie beträchtlicher ist, als für $\gamma = 40°$.

Für $\gamma = 50°$ ist $\cos\gamma = 0{,}6427876$, $\cos\gamma^2 = 0{,}41317585$, und man findet BM $= 1{,}554000$. Aus dem 389 §. aber ist $\mu = \frac{119267}{10119267} = 0{,}0117861$, $\mu^2 = 0{,}0001381$, K $= 1{,}5465252$, und $s = 1{,}0033354$. K $= 1{,}5516832$. k.

Für $\gamma = 60°$ ist $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, $\sin\gamma^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\gamma = \sqrt{3}$, $\sec\gamma = 2$, also $\cos\gamma^2 = 0{,}25$, und BM $= 1{,}9953943$. k. Dagegen findet man dem 389 §. gemäß K $= 1{,}9752566$. k, $\mu = 0{,}0245805$, und $\mu^2 = 0{,}0006040$, also $s = 1{,}0080146$. K $= 1{,}9910870$. k.

Wenn man die Rechnung fortsetzt, so findet sich, daß BM auch für die folgenden Winkel grösser als s bleibe, und daß die Differenzen noch beständig wachsen, bis γ dem rechten Winkel sehr nahe kommt. In der folgenden kleinen Tabelle läßt sich dies am besten übersehen.

γ	BM : k	s : k	diff.
40°	1,3047125 . k	1,3036374	0,0010751
45°	1,4130040	1,4112443	0,0018597
50°	1,5540000	1,5516832	0,0023168
60°	1,9953943	1,9910870	0,0043073
85°	10,5025795	10,204624	0,297955
86°	12,5914145	12,038073	0,553341
89°	26,431274	25,235257	1,196017

Weil nun in dem Fall $\gamma = 90°$ BM $= s$ wird, so erhellet, daß die Linie, deren Natur die Gleichung zwischen γ und s ausdrückt, von dem Kreisbogen FMD zu sehr Abweiche, als daß man für solche Winkel γ, die dem rechten Winkel nahe kommen, die Linie BM statt s bey Auflösung der Aufgabe des 380. §. brauchen könnte.

Der

Der XXVIII. Abschnitt.

Von der Klarheit der Atmosphäre, und der Erleuchtung, die das Tageslicht verursacht.

403. §.

Was wir das Tageslicht nennen, wenn wir es vom Sonnenlicht, das die Gegenstände um uns herum unmittelbar erleuchtet, unterscheiden, ist nichts anders als Sonnenlicht, das die Lufttheilchen, welche die Sonne erleuchtet, zurücksenden und nach allen Seiten zerstreuen. Durch die Fenster-Oefnungen eines Zimmers, die gegen die Ostseite des Horizonts belegen sind, fällt Tageslicht ins Zimmer, wenn gleich die Sonne an der Westseite des Horizonts befindlich ist, und nicht grade durch die Fenster-Oefnungen ins Zimmer hinein scheinen kann: und dies Tageslicht sendet der von der Sonne erleuchtete östliche Theil der Atmosphäre ins Zimmer. Jeden erleuchteten Lufttheilchen kann man alsdenn in eben dem Verstande eine gewisse Klarheit zuschreiben, in welchem man sonst für sich dunklen von der Sonne erleuchteten Massen, eine gewisse Klarheit zuschreibt. (13 §.)

404. §.

Es sey AD ein Stück der Erdfläche, nur so groß, 126. Fig.
daß die Krümme desselben noch nicht sehr beträcht-

 lich

lich ist, so daß man es als eine ebene Fläche betrachten kann, und CB sey die äussere mit AD parallele Gränze der Atmosphäre. Das Sonnenlicht falle in der Richtung LA $\#$ FD durch die Atmosphäre auf die Erdfläche, und der Abstand der Sonne vom Scheitel CAL $= \omega$ sey nicht über 45° groß. Ferner sey wie bisher k die Höhe der bis auf die Dichtigkeit Δ der untern Luft zusammen gedrückten Atmosphäre, und s eine Linie, die sich zu k verhält, wie die Masse, welche das Licht in der Richtung LA durchdringt, zu derjenigen, durch welche es vertical herab fällt; so ist der Voraussetzung gemäß $s = k \sec\omega$. (386 §.) Das vertical herab kommende Licht werde in dem Verhältniß $1 : V$ vermindert, und das in der Richtung LA einfallende in dem Verhältniß $1 : v$, so ist $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\; l\frac{1}{V} = \sec\omega\; l\frac{1}{V}$. Es sey $l(1 : V) = \eta$, so hat man $-lv = \eta\sec\omega$, und $v = e^{-\eta\sec\omega} = e^{-\eta : \cos\omega}$. Die Lichtmenge, welche auf AD lothrecht fallen würde, wenn die Atmosphäre kein Licht zerstreuete, sey $= 1$, so würde unter eben der Bedingung auf AD die Lichtmenge $= \sin \text{LAG} = \cos\omega$ fallen, wenn der Sonne Entfernung vom Scheitel $= \omega$ ist. Wegen der Undurchsichtigkeit der Atmosphäre fällt also auf AD die Lichtmenge $= \cos\omega \,.\, e^{-\eta : \cos\omega}$. Diese sey $= \lambda$, so ist der unterweges in der Luft zerstreuete Theil des Lichts $= \cos\omega - \lambda = \cos\omega\,(1 - e^{-\eta : \cos\omega})$.

Dieser

Dieser zerstreuete Theil des Lichts wird auf unzählig mannigfaltige Arten von den Lufttheilchen nach allen Seiten umher zurück geworfen, zum Theil aufwärts zum Theil unterwärts, auch zerstreuet sich wiewohl wahrscheinlich nur ein sehr kleiner Theil davon so unter den Lufttheilchen, daß derselbe als verlohren angesehen werden kann. Allemahl aber fällt auch ein Theil der zerstreueten Lichtmenge wieder auf AD, und wenn derselbe sich zur ganzen zerstreueten Lichtmenge, wie $n : 1$ verhält, so empfängt AD einen Theil des zerstreueten Lichts $l = n \cdot \cos\omega\,(1 - e^{-\eta : \cos\omega}$. Nach Hn. Lambert (Photom. §. 905. 911.) dürfte n gewöhnlich etwas grösser seyn als $\frac{1}{2}$, auch diese Zahl desto mehr übertreffen, je näher die Sonne dem Scheitel ist. Diesemnach hat man $\lambda : l = e^{-\eta \sec\omega} : n\,(1 - e^{-\eta \sec\omega})$, oder $\lambda : l = 1 : n\,(e^{\eta \sec\omega} - 1)$, und dies ist zugleich das Verhältniß der Erleuchtung, welche die Fläche AD von dem in der Atmosphäre geschwächten Sonnenlicht empfängt, zur Erleuchtung, welche die von der Sonne erleuchtete Atmosphäre auf AD wirft. Steht die Sonne im Scheitel, so ist dies Verhältniß $\lambda : l = 1 : n\,(e^{\eta} - 1)$.

405. §.

Jede Stelle Zz der Erdfläche AD empfängt von allen Seiten her Licht, welches die erleuchteten Lufttheilchen dahin senden, nicht anders, als wenn sich Zz im Mittelpunct einer leuchtenden Halbkugelfläche befände. Man stelle sich um Zz nach allen

Seiten gleichgrosse unendlich kleine conische Räume oder Ecken vor, die ihre Spitzen insgesammt in Zz haben, als so viele in Zz zusammen gehende Strahlenpyramiden oder Strahlenkegel. Wenn alle diese Strahlenkegel der Stelle Zz Licht von gleicher Dichtigkeit zuführten, dessen Dichtigkeit, indem es sich auf Zz verbreitet, nur wegen der Schiefe des Einfallswinkels geschwächt würde; so erhellet, daß Zz eben so erleuchtet würde, als wenn um Z, als um einen Mittelpunct eine gleichförmig klare Halbkugelfläche ausgebreitet wäre, wovon Zz die Absolute Erleuchtung empfinge. Man stelle sich also eine solche gleichförmig klare Halbkugelfläche um Z vor, und setze ihre Klarheit $= \Sigma$, so wäre die Erleuchtung, welche sie auf Zz würfe, $= \pi . \Sigma$. Man nehme an, diese Erleuchtung sey so groß, als diejenige, welche Zz von der ganzen Atmosphäre empfängt, so kann Σ die **mittlere Klarheit** der Atmosphäre heissen. Die Sonne sey um den Abstand $CAL = \omega$ vom Scheitel entfernt, ihr scheinbarer Halbmesser sey $= \varrho$, ihr, wegen der Undurchsichtigkeit der Atmosphäre geschwächter Glanz $= S$; so ist die Erleuchtung, welche sie auf Zz wirft $= \pi S \sin\varrho^2 \cos\omega$, (59 §.) und das Verhältniß dieser vom Sonnenlicht auf Zz fallenden Erleuchtung zu jener $\pi\Sigma$, welche der Voraussetzung gemäß die Atmosphäre dahin sendet, ist auch $= \lambda : l$. (404 §.) Also erhält man

$$S \sin\varrho^2 \cos\omega : \Sigma = \lambda : l, \text{ und } S = \frac{\lambda . \Sigma}{\sin\varrho^2 \cos\omega . l},$$

$$\text{oder } S = \frac{\lambda . \Sigma . \sec\omega}{\sin\varrho^2 . l}.$$

406. §.

Vermittelst dieser Formul würde sich der wegen Undurchsichtigkeit der Atmosphäre geschwächte Glanz der Sonne mit der mittlern Klarheit der Atmosphäre vergleichen lassen: es müste aber γ nicht über 45° fassen, auch müste nicht allein die Zahl n, sondern auch das Verhältniß $1 : V$ mit Zuverläßigkeit bekannt seyn, worin das Licht ¦ geschwächt wird, wenn es lothrecht in der Atmosphäre herab fällt. Denn vermöge des 404 §. ist $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n(e^{\eta\, \sec\omega} - 1)}$, und $\eta = l(1:V)$. Weil nun jenes Verhältniß $1 : V$ noch nicht zuverläßig bekannt ist, indem Hr. Lambert darin vom Hn. Bouguer gar sehr abweicht (398 §.); so ist keine scharfe Bestimmung zu hoffen, und es kann genügen, wenn man $n = \frac{1}{2}$ setzt (404 §.), um eine ohngefehre Gleichung zwischen S und Σ wenigstens für den Fall zu erhalten, wenn die Sonne dem Scheitel nahe ist.

Steht die Sonne im Scheitel, so hat man $\lambda : l = 1 : n(e^{\eta} - 1)$, und $S = \frac{\lambda . \Sigma}{\sin \varrho^2 . l}$. Nach Herrn Lambert ist $1 : V = 1 : 0{,}5889$, oder $\frac{1}{V} = e^{\eta} = 1{,}6981$; also wäre $\frac{\lambda}{l} = \frac{100000}{34905} = 2\frac{6}{7}$, $n = \frac{1}{2}$ gesetzt. Nach Hn. Bouguer ist $1 : V = 1 : 0{,}8123$, oder $\frac{1}{V} = e^{\eta} = 1{,}2311$,

mithin

mithin $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{0,1155} = 8,7$. Zwischen beyden Bestimmungen ist 6 eine Mittelzahl, die auch Hr. Lambert annimmt, daß also $S = \frac{6 \,.\, \Sigma}{\sin \varrho^2}$ wäre.

Wird endlich $\varrho = 16'$, also $\sin \varrho^2 = 0,00002166$, so erhält man $S = 276243 \,.\, \Sigma$, oder nach Herrn Lambert in einer runden Zahl $S = 277000 \,.\, \Sigma$. Diesemnach wäre die mittlere Klarheit der Atmosphäre ohngefehr so groß, als die mittlere Klarheit des Monds (307 §.), welches mit Hn. Smiths Gedanken überein kommt. (M. s. den Lehrbegrif der Opt. nach Herrn Kästners Uebers. 28 S.) Würklich erscheint uns der Mond bey Tage, wie eine mittelmäßig helle Wolke, weil manche Wolken matter, andere dagegen glänzender aussehen, wie der Mond.

Will man die Bestimmungen $\frac{1}{n\,(e^{\eta} - 1)} = 6$, und $n = \frac{1}{2}$ als ohngefehr richtig annehmen, so ist $1 = 3\,(e^{\eta} - 1)$, also $e^{\eta} = \frac{4}{3} = \frac{1}{V}$.
Das hiesse also annehmen, das Licht werde ohngefehr um den vierten Theil geschwächt, wenn es in der Atmosphäre lothrecht herab fällt. Auch wird hiemit zugleich angenommen, die senkrechte Erleuchtung einer wagerecht liegenden Ebene von der im Scheitel stehenden Sonne, sey 6 mahl grösser, als die Erleuchtung, welche dieselbe Ebene alsdenn von der ganzen Atmosphäre empfängt.

407. §.

Die Klarheit der Atmosphäre, auch wie wir sie vermittelst des Gesichts empfinden, ist nicht an allen Stellen einerley: die Stellen, welche sich in der Nachbarschaft der Sonne befinden, scheinen uns klärer als die übrigen, deren scheinbarer Abstand von der Sonne grösser ist. Herr **Bouguer** ist willens gewesen, vermittelst seines im 305 §. beschriebenen Lichtmessers (103 Fig.) hierüber Versuche anzustellen, zum Theil hat er sie würklich angestellet: allein die Resultate davon hat er nicht in diejenige Handschrift seines Traité d'optique eingetragen, nach welcher Hr. de la Caille den Abdruck hat veranstalten lassen. Das Verfahren selbst bey diesen Versuchen ist a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. VI. VII. VIII. beschrieben, für die Zahlen aber, welche die Resultate der Versuche anzeigen, sind Lücken gelassen. Nur so viel findet sich Art. VI. angezeigt: bey einer Höhe der Sonne von 25° sey die Atmosphäre an einer um 8 bis 9° von der Sonne entfernten Stelle 4 mahl klärer gewesen, als an einer um 31° bis 32° davon etnfernten Stelle. Der Versuch ist mehrmahls jederzeit bey recht heiterer Luft wiederhohlt worden. Es ist zu bedauren, daß nicht allein andere hieher gehörige Versuche, sondern auch diejenigen haben unvollständig angezeigt werden müssen, deren im VIII. Art. erwehnt wird, die dazu gedient haben, die von der Sonne kommende Erleuchtung mit derjenigen, welche von der Atmosphäre herrührt, zu vergleichen.

408. §.

Es stelle wie vorhin, AD die Erdfläche, CB die äussere damit parallele Gränze der Atmosphäre vor,

das

das Sonnenlicht falle durch die Atmosphäre in der Richtung FD, und in A befinde sich das Auge des Zuschauers, welches nach der Richtung AB in die Atmosphäre hinein siehet; so hängt ohne Zweifel die scheinbare Klarheit der Stelle B von derjenigen Erleuchtung ab, welche alle in der Richtung AB befindliche Lufttheilchen zusammen genommen nach A schicken. Jedes dieser Lufttheilchen in einer unbestimmten Stelle M empfängt Sonnenlicht, das in der Atmosphäre den Weg FM zurück gelegt hat, und eben deswegen schon geschwächt ist: nur ist diese Schwächung, die das Sonnenlicht schon erlitten hat, desto geringer, je näher M der äussersten Stelle B ist. Das solchergestalt vom Sonnenlicht erleuchtete Lufttheilchen M zerstreuet einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten, und das von M nach A strahlende Licht leidet auf dem Wege MA eine abermahlige Schwächung, indem es die auf dieser Strecke befindlichen Lufttheilchen durchdringt.

Ausser dem Sonnenlicht, welches M grade zu auf dem Wege FM empfängt, wird die Erleuchtung desselben Theils noch durch dasjenige Licht verstärkt, was alle übrige umher befindliche Lufttheilchen demselben zusenden, theils durch dasjenige, was die erleuchtete Erdfläche dahin zurück wirft. Das alles müste in Rechnung gebracht werden, wenn man die scheinbare Klarheit der Atmosphäre an einer gegebenen Stelle, vermittelst analytischer Schlüsse suchen wollte. Indessen bleibt diejenige Erleuchtung, welche die auf der Strecke AB befindlichen Lufttheilchen grade zu von der Sonne empfangen, allemahl die beträchtlichste: deswegen müssen die

For-

Formuln schon Resultate geben, die sich der Wahrheit ziemlich nähern, wenn man auch das grade zu auffallende Sonnenlicht mit in Rechnung bringt.

409. §.

Die scheinbare Klarheit einer Stelle der Atmosphäre in gegebener Höhe über dem Horizont zu finden, wenn die Höhe der Sonne ebenfalls gegeben ist: vorausgesetzt, daß die Erdfläche AD, also auch die mit ihr parallele Gränze der Atmosphäre BC als eine ebene Fläche angenommen werden könne.

Aufl. Es sey AC ⧺ DE die Scheitellinie, 126. Fig.
CAB $= \gamma$ der Abstand der gegebenen Stelle der Atmosphäre vom Scheitel, und EDF $= \omega$ der Abstand der Sonne vom Scheitel. Ferner sey MP auf AC senkrecht, und CNG sey eine krumme Linie, deren Ordinaten PN sich eben so, wie die Dichtigkeiten der Luft in verschiedenen Höhen AP ändern, und man setze CP $= x$, PN $= y$, CA $= 1$; so ist AM $= (1 - x)$ secγ, PM $= (1 - x)$ tg . γ BM $= x$ secγ und FM $= x$ secω. Die Subtangente der Lichtverminderungslinie, in einer gleichförmig und eben so dichten Luft, als die untere nahe an der Erdfläche ist, sey $= c$.

Der Winkel CAB $= \gamma$ wachse um das Element BA$b = d\gamma$, so wächst PM $= (1 - x)$ tgγ um das Element MQ $= (1 - x)\, d$. tgγ, und wenn die ganze Figur sich um die Axe AC drehet, so beschreibt PM einen Kreis, dessen Fläche $= \pi\,(1 - x)^2$ tgγ^2 ist, MQ aber einen Ring, dessen Fläche $\pi\,(1 - x)^2$ d . tgγ^2 ist. Wächst ferner auch CP $= x$ um das Element P$p = dx$, so erhält man einen körperlichen

chen Ring, und sein Inhalt $= \pi(1-x)^2\, dx\,.\, d\,.$ $\mathrm{tg}\gamma^2$. Drehete sich die Figur nur durch einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ um AC, so erhielte man ein Element jenes flachen Ringes $=$ PM $.\ \delta\varphi\,(1-x)\, d\,\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{2}\, d\varphi\,(1-x)^2\, d\,.\,\mathrm{tg}\gamma^2$, und des körperlichen Ringes $= \frac{1}{2}\, d\varphi\, dx\,(1-x)^2\, d\,.\mathrm{tg}\gamma^2$. Stellt man sich um A eine Kugelfläche vor, deren Halbmesser AK $= 1$ ist; so ist die Zone derselben, welche der Bogen K$k = d\gamma$ beschreibt, das Maaß der scheinbaren Ausdehnung jener Ringe; mithin diese scheinbare Ausdehnung $= 2\pi\, d\gamma\, \sin\gamma$ und die scheinbare Ausdehnung eines Elements MmqQ von diesem Ringe, wenn die Figur sich um AC nur durch einen unendlich kleinen Winkel drehete, $= d\varphi d\gamma\, \sin\gamma$.

Die Klarheit eines Lufttheilchens F an der höchsten Gränze der Atmosphäre sey $= 1$, und das Licht nehme auf dem Wege FM in dem Verhältniß $1 : v$ ab, so ist die Klarheit des Lufttheilchens M $= v$, weil die Klarheit desselben sich wie die Erleuchtung verhält, die es von der Sonne empfängt. Wenn nun FM $= w$ gesetzt wird, die Dichtigkeit der Luft in der Schichte PM$mp = y$, ihre Dichtigkeit bey A $= 1$, so ist $l\,\frac{1}{v} = \frac{\int y dw}{c}$ (380. §. wenn daselbst $m = 1\,.\,c$, und $1 : V = e : 1$ gesetzt wird), mithin $l\,\frac{1}{v} = \frac{\sec\omega\,.\,\int y\delta x}{c} = \frac{\mathrm{CNP}\,.\,\sec\omega}{c}$, und $v = e^{-\mathrm{CNP}\,\sec\omega\, :\, c}$. Diese Klarheit wird noch weiter geschwächt, indem das Licht durch die Luft von M nach A scheint. Wird nemlich die

Klarheit in A $= z$ gesetzt, so ist $l\frac{v}{z} = \frac{\int yd \cdot MA}{c} = \frac{GNPA \cdot \sec\gamma}{c}$, also $lv - lz = - \frac{CNP \cdot \sec\omega}{c} - lz = \frac{GNPA \cdot \sec\gamma}{c}$, oder $l\frac{1}{z} = \frac{CNP \sec\omega + GNPA \sec\gamma}{c}$. Es sey GCA $=$ A, so ist GNPA $=$ A $-$ CNP, also $l\frac{1}{z} = \frac{CNP(\sec\omega - \sec\gamma) + A\sec\gamma}{c}$, und $z = e^{-((\sec\omega - \sec\gamma)\int ydx + A\sec\gamma):c}$.

Das Verhältniß $1 : v'$, worin das Licht geschwächt wird, wenn es vertical herab fällt, und den Weg CP zurück legt, giebt die Gleichung $l\frac{1}{v'} = \frac{\int ydx}{c}$, und eben diese Zahl $\frac{\int ydx}{c}$ verhält sich wie die Zahl der Lufttheilchen, die das Licht auf dem Wege CP durchdringt. (327. 328. §.) Diesemnach durchdringt es auf dem Wege Pp eine Anzahl von Lufttheilchen die sich wie $\frac{ydx}{c}$ verhält. In jeder Schichte wie PpqQ sind die Lufttheilchen gleichförmig vertheilt, also muß sich die Menge derselben in jedem Theil dieser Schichte der Grundfläche dieses Theils proportional seyn. Man stelle sich eine solche Schichte vor, deren Grundfläche $= 1^2$ ist, und nehme die Zahl der Lufttheilchen in dersel-

 ben

ben $= \frac{ydx}{c}$ an, so ist sie in einer ringförmigen Schichte, deren Breite MQ ist, $= \frac{\pi (1-x)^2\, ydx\, d\,.\, tg\gamma^2}{c}$, denn man hat $1^2 : \pi (1-x)^2\, tg\gamma^2 = \frac{ydx}{c} : \frac{\pi(1-x)^2 ydxd\,.\, tg\gamma^2}{c}$.

Diesemnach ist die Zahl der Lufttheilchen in dem Element MmqQ dieser Schichte, welches beschrieben wird, wenn sich die Figur um AC durch einen unendlich kleinen Winkel drehet $= \frac{\frac{1}{2}\, d\phi\, (1-x)^2\, ydx\, d\,.\, tg\gamma^2}{c}$.

Wenn man nun jedes Lufttheilchen als einen leuchtenden Punct betrachtet, der das Licht nach den im 2 §. angenommenen Gesetzen um sich her verbreitet; so ist die senkrechte Erleuchtung, welche jedes Lufttheilchen nach A sendet, $= \frac{z}{AM^2}$, also senden alle zu dem Element MmqQ gehörigen Lufttheilchen nach A die senkrechte Erleuchtung $\frac{\frac{1}{2}\, zd\phi\,.\, ydx\, d\,.\, tg\gamma^2}{c\,.\, sec\gamma^2}$. Wird nun die gesammte Erleuchtung, welche alle von B bis M befindliche Lufttheilchen nach A senden, $=$ I gesetzt; so ist diejenige, welche von den in MmqQ befindlichen nach A geworfen wird, $= d$I. Ferner ist $d\,.\, tg\gamma^2 = 2\, tg\gamma\,.\, d\, tg\gamma = 2\, tg\gamma\, d\gamma : cos\gamma^2$, oder $d\,.\, tg\gamma^2 = 2\, tg\gamma\, sec\gamma^2\, d\gamma$, also $\frac{d\,.\, tg\gamma^2}{sec\gamma^2} = 2 tg\gamma\,.\, d\gamma$. Wenn demnach statt z der vorhin gefundene Werth gebraucht

braucht wird, so erhält man $dI = \mathrm{tg}\,.\,\gamma\; d\gamma\; d\varphi$ $e^{-((\sec\omega - \sec\gamma)\int y dx + A \sec\gamma):c} \, . \, \frac{y dx}{c}$. Um dies zu integriren setze man $((\sec\omega - \sec\gamma)\int y dx + A \sec\gamma) : c = w$, so ist $d\,.\,e^{-w} = - e^{-w}\, dw$ $= e^{-w} (\sec\omega - \sec\gamma) \frac{y dx}{c}$, und $\frac{y dx}{c} =$

$$\frac{-d\,.\,e^{-w}}{e^{-w}(\sec\omega - \sec\gamma)}.$$

Das giebt $dI =$

$$\frac{\mathrm{tg}\gamma\; d\gamma\; d\varphi\; d\,.\,e^{-w}}{\sec\omega - \sec\gamma};$$

und weil allein x oder w veränderlich ist, wenn sich allein BM ändert, so erhält man $I = C - \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi\,.\,e^{-w}}{\sec\omega - \sec\gamma}$. Wenn BM, also auch x und $\int y dx$ verschwinden, so ist $w = \frac{A \sec\gamma}{c}$: weil nun zugleich I verschwinden muß, so wird $C = \frac{\mathrm{tg}\gamma\; d\gamma\; d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma} \,.\, e^{-A \sec\gamma : c}$ gefunden, und man erhält $I = \frac{\mathrm{tg}\gamma\; d\gamma\; d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma} (e^{-A\sec\gamma:c} - e^{-w})$. Um die gesammte Erleuchtung zu haben, welche alle von B bis A befindliche Lufttheilchen nach A senden, muß man BM = BA, also $x = CA$, und $\int y dx = A$ setzen, so wird $w = \frac{A \sec\omega}{c}$, und

$$I = \frac{\mathrm{tg}\gamma\; d\gamma\; d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma} (e^{-A\sec\gamma:c} - e^{-A\sec\omega:c}).$$

Diese Erleuchtung durch die scheinbare Grösse $d\varphi\ d\gamma\ \sin\gamma$ des zwischen den Gränzen dieser körperlichen Ecke BAb befindlichen Theils der Atmosphäre dividirt, giebt die Klarheit eben dieses Theils der Atmosphäre $\Sigma =$

$$\frac{\sec\gamma}{\sec\omega - \sec\gamma}\left(e^{-A\sec\gamma : c} - e^{-A\sec\omega : c}\right). \text{(38. 276. §.)}$$

In dem Fall $\omega = \gamma$ bestimmt diese Formul nichts. Alsdenn aber ist $dI = \operatorname{tg}\gamma\ d\gamma\ d\varphi\ .\ e^{-A\sec\gamma : c}\dfrac{y dx}{c}$, also $I = \operatorname{tg}\gamma\ d\gamma\ d\varphi\ .\ e^{-A\sec\gamma : c}\dfrac{\int y dx}{c}$, und für alle von B bis A befindliche Lufttheilchen $I = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi\ .\ A\, e^{-A\sec\gamma : c}}{c}$, und es wird $\Sigma = \dfrac{A\sec\gamma}{c}\ e^{-A\sec\gamma : c}$.

410. §.

Die gefundene Formul läßt sich auch so ausdrücken:

$$\Sigma = \frac{\sec\gamma}{\sec\gamma - \sec\omega}\left(e^{-A\sec\omega : c} - e^{-A\sec\gamma : c}\right).$$

Um einigermassen zu übersehen, wie sich diese Klarheit bey einerley Sonnenhöhe in verschiedenen Entfernungen vom Zenith ändert, setze man $\dfrac{A\sec\omega}{c} = a$, $\dfrac{A\sec\gamma}{c} = z$, so ist $\Sigma = \dfrac{z}{z - a}$ $(e^{-a} - e^{-z})$. Man suche die Fälle, wenn Σ am grösten oder kleinsten wird, und setze in solcher

Absicht

Absicht $\frac{d\Sigma}{dz} = 0$; so giebt die Differentialrechnung $d \,.\, \frac{z}{z-a} = -\frac{adz}{(z-a)^2}$, $d \,.\, (e^{-a} - e^{-z})$ $= e^{-z} dz$, also ferner $z e^{-z} - \frac{a(e^{-a} - e^{-z})}{z-a}$ $= 0$, und $\frac{(z-a)e^{-z}}{e^{-a} - e^{-z}} - \frac{a}{z} = 0$. Dieser Gleichung geschicht ein Gnüge, wenn man $z = a$, auch wenn man $z = \infty$ annimmt. Bey der Voraussetzung $z = a$ verschwinden zwar Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{(z-a)e^{-z}}{e^{-a} - e^{-z}}$: man darf aber nur erwägen, das ein Bruch wie $\frac{p}{q}$ auch $= \frac{p+dp}{q+dq}$ sey, mithin derselbe $= \frac{dp}{dq}$ werde, wenn p und q verschwinden. Hier wird $dp = -(z-a)$ $e^{-z} dz + e^{-z} dz$, und $dq = e^{-z} dz$, also

$$\frac{dp}{dq} = \frac{e^{-z} - (z-a)e^{-z}}{e^{-z}} = 1 - (z-a) = 1,$$

wenn $z = a$ ist. Ferner ist $(z-a)e^{-z} = \frac{z-a}{e^z}$, und $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \ldots$

(387 §.), also $(z-a)\,e^{-z} = \frac{z-a}{1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3\ldots}$. Dieser Bruch verschwindet, wenn $z = \infty$ gesetzt wird: mithin leistet diese Voraussetzung der gefundenen Gleichung ebenfalls ein Genüge.

Setzt man $z = a$, so ist $\gamma = \omega$, und $\Sigma = \frac{A \sec\omega}{c}\, e^{-A \sec\omega : c}$; setzt man $z = \infty$, so ist $\gamma = 90°$, und $\Sigma = e^{-A \sec\omega : c}$. Beyde Werthe sind gröste: also fallen die Stellen, wo die Klärheit der Atmosphäre am grösten ist, einmahl in die Stelle der Sonne selbst, und hiernächst in den Horizont.

411. §.

Wenn man sich eine lothrechte Luftsäule AC vorstellet, deren Grundfläche $= 1^2$, so ist die darin enthaltene Luftmasse der vorhin gebrauchten Bezeichnung gemäß $= A$. Die Höhe der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zusammen gedrückten Atmosphäre sey wie im 377 §. $= k$, und wie hier angenommen ist, die Dichtigkeit der untern Luft $= 1$, so wird $A = 1 \cdot k$. Die Zahl der Lufttheilchen in dieser Höhe ist also $= \frac{A}{c} = \frac{k}{c}$. Eben diese Zahl ist der Logarithme des Verhältnisses, worin das Licht geschwächt wird, wenn es durch die Atmosphäre vertical herab fällt: wenn also dies Verhältniß $1 : V$ ist, so hat man log. nat. $\frac{1}{V} = \frac{k}{c}$, und $c = \frac{k}{2{,}3025851 \text{ log. tab. } (1 : V)}$

oder

oder $c = \frac{0,4342944 \cdot k}{\text{log. tab.}(1:V)}$. Wird nun die Zahl

$\frac{0,4342944}{\text{log. tab.}(1:V)} = n$ angenommen, so erhält man

$c = n\,k$, und

$$\Sigma = \frac{\sec\gamma}{\sec\gamma - \sec\omega}\left(e^{-\sec\omega : n} - e^{-\sec\gamma : n}\right),$$

in dem Fall $\gamma = 0$ aber

$$\Sigma = \frac{\sec\gamma}{n}\, e^{-\sec\gamma : n}.$$

Aus diesen Formuln kann die Rechnung für jeden besondern Fall leicht angestellet werden, wenn man die Zahl n hat. Nach Hn. Lambert wäre log. tab. $(1:V) = 0,23$ (398. §.); oder wie er im 945 §. seiner Photometrie annimmt log. tab. $(1:V) = 0,2$; und das giebt $n = 2,171472$, woraus ferner folgende Zahlen gefunden werden.

Abst. d. O. v. Scheitel	Klarheit im Horizont.	Klarheit neben der ☉.	Klarheit im Scheitel.
0°	0,6310	0,2906	0,2906
10°	0,6265	0,2923	0,2897
20°	0,6126	0,3002	0,2864
30°	0,5876	0,3123	0,2805
40°	0,5482	0,3248	0,2710
50°	0,4885	0,3500	0,2562
60°	0,3972	0,3666	0,2338
70°	0,2602	0,3503	0,1927
80°	0,0705	0,1870	0,1178

Für grössere Entfernungen vom Scheitel als bis auf 50 Grade dürfte diese Tafel wohl nicht brauchbar seyn, weil die mit der Erdfläche parallelen Schnitte der Atmosphäre als ebene Flächen sind angenommen worden.

412. §.

Die 126 Fig. stellt die Linien AB, DF beyde in einerley Ebene, nemlich in der Verticalfläche der Sonne vor: wäre die höchste Gränze der Atmosphäre würklich eine ebene die Scheitellinie senkrecht schneidende Fläche; so würde in den Schlüssen des 410 §. und den darauf gegründeten Rechnungen nichts geändert werden, wenn gleich AB in einer andern Verticalfläche angenommen würde. Stellt man sich den ganzen Ring vor, wozu der Halbmesser PM und das Element MQ gehört, so erhellet, daß das Sonnenlicht allemahl einen Weg = FM in der Atmosphäre zurück lege, bevor es auf MQ fällt, wo auch diese Stelle im Umfang des Ringes angenommen wird, so wie übrigens für einerley Ring, auch AM einerley Grösse behält. Weil aber die höchste Gränze der Atmosphäre nur so lange einer ebenen Fläche nahe kommt, als der Winkel CAB wenige Grade fasset, so erhellet, daß die Klarheit jeder Stelle der Atmosphäre auch von dem Azimuthalwinkel abhängen werde, den die dazu gehörige Verticalfläche mit der Verticalfläche der Sonne einschließt.

Nach einer vom Hn. Bouguer angestellten Erfahrung (Traité d'optique Liv. I. Sect. II. Art. VI. pag. 73.) ist die Klarheit der Atmosphäre in gleichen Höhen über dem Horizont, oder in einerley Parallelkreis mit dem Horizont, nicht überall einerley. Bey einer Höhe der Sonne von 15 bis 20 Graden hat er vermittelst seines Lichtmessers die Klarheit der Atmosphäre zu beyden Seiten der Sonne in einerley Parallelkreise mit dem Horizont bey wachsender Entfernung vom Verticalkreise der Sonne anfangs

abneh-

abnehmend gefunden, bis zu einer um 110° bis 120° vom Scheitelkreise der Sonne entfernten Stelle: daselbst fand er die Klarheit am kleinsten, nachher aber wieder wachsend, bis zu der um 180° von dem Scheitelkreise der Sonne entfernten Stelle, da er sie wieder am grösten fand.

413. §.

Ausser der nicht völlig der Natur gemässen Voraussetzung, daß die höchste Gränze der Atmosphäre eine ebene Fläche sey, dürfte auch eine andere, welche im 210 §. zum Grunde genommen ist, ihre Einschränkung leiden, diejenige nemlich, daß von jedem Element der Luft das Licht sich nach allen Seiten wie von einem leuchtenden Punct ausbreite, nicht anders, als wenn jedes Lufttheilchen ein unendlich kleiner sphärischer Spiegel wäre. Ferner sind bey der Rechnung des 410 §. auch noch verschiedene Ursachen, welche die Klarheit eines jeden Lufttheilchens vermehren, beyseit gesetzt worden: denn jedes Lufttheilchen empfängt ausser dem grade zu darauf fallenden Sonnenlicht, welches a. a. O. allein ist in Rechnung gebracht worden, auch noch Licht von allen um dasselbe herum befindlichen Lufttheilchen; auch wird es von denjenigen Licht erleuchtet, welches die Erdfläche dahin zurück sendet. Herr Lambert (Photom. §. 958 - 973.) hat auch darüber Rechnungen angestellet, wie sich die Klarheit eines Lufttheilchens, die ihm nicht allein die Erdfläche zusendet, sondern auch von allen umher befindlichen Lufttheilchen dahin geworfen wird, mit der von der Sonne allein demselben mitgetheilten Klarheit vergleichen lasse. Er nimmt aber auch dabey die höchste Gränze der Atmosphäre als eine ebene Fläche an, um nicht auf gar zu sehr verwickelte Formuln zu gerathen, die ohnehin schon sehr verwickelt bey Auflösung der Aufgabe ausfallen, wenn die Klarheit gesucht wird, welche alle übrige umher befindliche Lufttheilchen dem als gegeben angenommenen zusenden. Ueberdem betrachtet Hr. Lambert bey diesen Untersuchungen die Atmosphäre so, als wenn sie bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zusammengedrückt wäre, nachdem er vorher bewiesen hat, daß bey Auflösung der Aufgabe des 410 §. eben die Voraussetzung hätte angenommen werden können, ohne daß solches das gesuchte Resultat selbst geändert hätte.

Gesetzt aber man könnte auch die Rechnungen ohne zu grosse Schwierigkeit auf Voraussetzungen gründen, die der Natur gemässer wären; so würden sie doch allemahl einen besondern Zustand der Atmosphäre voraussetzen müssen, weil die Luft bald mehr, bald weniger undurchsichtig ist, auch die zarten Dünste, welche die Durchsichtigkeit der Luft vermindern, bald mehr in der einen, bald mehr in der andern Gegend angehäuft, und vielleicht nie in demjenigen Theil der Atmosphäre, der über dem Horizont befindlich ist, nach einem solchen Gesetz vertheilt sind, daß sich durch eine analytische Formul, vermittelst bekannter Kunstgriffe ausdrücken liesse. Wie denn auch eben diese Dünste bald in den Wolken sichtbar werden, bald unsichtbar bey ganz heiter scheinenden Himmel in der Luft schweben. Um also nur einigermassen die Klarheit socher Gegenstände, die vom Tageslicht erleuchtet sind, wenn nur ein Theil des scheinbaren Himmelsgewölbes dahin scheinen kann, mit der Klarheit zu vergleichen, die ihnen

das

das ganze scheinbare Himmelsgewölbe mittheilen würde; kann man eine gewisse mittlere Klarheit desselben, so wie sie im 406 §. ohngefehr bestimmt ist, voraussetzen, und bey der Rechnung annehmen, daß das ganze scheinbare Himmelsgewölbe überall eine solche Klarheit habe, die der angenommenen mitlern Klarheit gleich ist.

414. §.

Es sey ABEF eine Mauer, die auf die 15 F. wagrechte Ebene ABCD ihren Schatten wirft, wenn sie auf der andern Seite von der Sonne erleuchtet ist: man sucht die Klarheit einer im Schatten gegebenen Stelle M.

Aufl. Was im Schatten liegt, den die Mauer auf die Ebene ABCD wirft, wird allein von dem scheinbaren Himmelsgewölbe, und zwar nur von demjenigen Theil desselben erleuchtet, den die Mauer dem Auge, wenn es in M befindlich wäre, nicht bedeckte. Man suche also die Erleuchtung, welche der von der Mauer bedeckte Theil des Himmelsgewölbes nach M werfen würde, und ziehe sie von der absoluten Erleuchtung ab, so hat man diejenige Erleuchtung, welche M vom Tageslicht empfängt. Der von der Mauer dem in M befindlichen Auge bedeckte Theil des Himmelsgewölbes ist zwischen den Gränzen der pyramidenförmigen Ecke um M enthalten, wovon AMB, BME, EMF, AMF die Seitenflächen sind, und wenn die Mauer ABEF selbst mit einer eben so grossen Klarheit glänzte, als das Himmelsgewölbe; so würde sie die Stelle M eben so stark als der von ihr bedeckte Theil des Himmelsgewölbes erleuchten.

Man

Man setze nun die aus M gesehene scheinbare Höhe der Mauer PMQ $= \alpha$, ihre untere scheinbare Breite AMB $= \beta$, ihre obere scheinbare Breite EMF $= \gamma$, so findet man die Erleuchtung, welche der bedeckte Theil des Himmels auf M werfen würde, aus dem 72 §. $= \frac{1}{2}(\beta - \gamma \cos\alpha)$, die Klarheit der leuchtenden Fläche $= 1$ gesetzt. Wenn also hier Σ die mittlere Klarheit der Atmosphäre bezeichnet, so ist die Erleuchtung, welche M vom Tageslicht empfängt, $= \pi \Sigma - \frac{1}{2} \Sigma (\beta - \gamma \cos\alpha$, oder eben diese Erleuchtung $I = \Sigma(\pi - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma) \cos\alpha)$.

Erstreckte sich die Mauer zu beyden Seiten sehr weit in die Länge fort, daß man wenigstens beynahe β und $\gamma = \pi$ setzen könnte; so wäre die gesuchte Erleuchtung $I = \frac{1}{2}\pi\Sigma(1 + \cos\alpha)$, oder auch $I = \pi \Sigma(\cos\frac{1}{2}\alpha)^2$ (425 §. Geom.) Wird überdem die Stelle M so nahe bey der Mauer angenommen, daß α ein rechter Winkel wird, so wird eben diese Erleuchtung $= \frac{1}{2}\pi\Sigma$, wie der Natur der Sache gemäß ist.

Wenn man die Weisse der erleuchteten Fläche $= A$ setzt, so ist die Klarheit der Stelle M $= \frac{A \times I}{\pi}$: wird also diese $= \sigma$ gesetzt, so hat man $\sigma = \frac{1}{2} A \Sigma (\pi - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \cos\alpha)$, und in dem Fall der nach beyden Seiten sehr weit fortlaufenden Mauer $\sigma = A \Sigma \cos\frac{1}{2}\alpha)^2$.

415. §.

Man stelle sich über BC ebenfalls eine Mauer
15 F. DAFO vor, welche die vorige ABEF in AF schneidet, und bezeichne ihre scheinbare Höhe, ihre untere und obere Breite aus M gesehen, mit α', β', γ',

so

so entzieht sie der Stelle M die Erleuchtung $\frac{1}{2}\Sigma$ $(\beta' - \gamma' \cos\alpha')$, und die Erleuchtung, welche M von dem Himmelsgewölbe empfängt, wird $=$ $\Sigma(\pi - \frac{1}{2}(\beta + \beta') + \gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha')$ gefunden: daraus ergiebt sich die Klarheit dieser Stelle $\sigma =$

$$\Sigma . A \left(1 - \frac{\beta + \beta'}{2\pi} + \frac{\gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha'}{2\pi}\right).$$

Sind beyde Mauern einander parallel, und erstrecken sie sich zu beyden Seiten auf Entfernungen, die in Vergleichung mit der Entfernung der Stelle M von jeder Mauer sehr groß sind, so ist wenigstens beynahe $\beta = \pi = \beta'$, und $\gamma = \pi = \gamma'$, und man erhält $\sigma = \frac{1}{2}\Sigma . A (\cos\alpha + \cos\alpha')$.

Wenn beyde Mauern einander in AF senkrecht schneiden, und dabey von A aus sehr weit nach D und B fortlaufen, so ist wenigstens sehr nahe MAB $+$ MAD $= \beta + \beta' = \frac{3}{2}\pi$, mithin alsdenn die Erleuchtung in $M = \Sigma \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha'}{2\pi}\right)$.

Je kleiner überdem AM ist, desto mehr nähern sich MFE $= \gamma$, MFO $= \gamma'$, dem rechten Winkel, eben so, wie AMF $= \alpha$ sich dem rechten Winkel nähert. Nimmt man also M in A an, so wird die dahin fallende Erleuchtung $= \frac{1}{4}\pi\Sigma$ gefunden, wie ebenfalls der Sache gemäß ist.

416. §.

Das Viereck EFGH stelle eine Fensteröffnung in der Wand eines Zimmers vor, wodurch das Tageslicht ins Zimmer hinein scheint; auf dem wagrecht liegenden Fußboden sey die Stelle *M* gegeben: man soll die Erleuchtung finden, die sie vom Tageslicht empfängt. 15 F.

Aufl.

Aufl. Man setze PMQ $= \alpha$, PMR $= \alpha'$, AMB $= \beta$, BMF $= \gamma$ GMH $= \gamma'$. Wäre nun das ganze Rechteck ABHG offen, so fiele auf M eine Erleuchtung $= \frac{1}{2} \Sigma (\beta - \gamma' \cos\alpha')$; und davon muß derjenige Theil abgezogen werden, welchen das Stück des Himmelsgewölbes dahin schicken würde, das von dem Rechteck ABEF bedeckt wird. Diese Erleuchtung wäre $= \frac{1}{2} \Sigma (\beta - \gamma \cos\alpha)$; also fällt auf M eine Erleuchtung $= \frac{1}{2} \Sigma (\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\alpha')$.

Wird wiederum die Weisse des Fußbodens mit A bezeichnet, so ist die Klarheit der Stelle M

$$= \frac{A \cdot \Sigma}{2\pi} (\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\alpha').$$

417. §.

Bey der Erleuchtung, welche die Atmosphäre verursacht, wenn sie selbst von der Sonne erleuchtet wird, ist noch der Umstand merkwürdig, daß der wolkenfreye heitere Himmel mit einer schönen blauen Farbe erscheint; und nichts ist natürlicher, als daß man sich die Erscheinung dieser blauen Farbe, den im XI. Abschnitt und besonders im 141 §. vorgetragenen Gründen gemäß, eben so, wie die Erscheinung der Farben bey andern körperlichen Massen vorstelle. Die Lufttheilchen zerstreuen nemlich das blaue Licht nach allen Seiten, und lassen dagegen das rothe und gelbe Licht am häufigsten durch: daraus erklärt es sich zugleich, warum Sonne und Mond, wenn sie am höchsten stehen, am weissesten aussehen, dagegen aber sich nach und nach zu blaßgelb, orange und roth desto mehr neigen, je näher sie dem Horizont kommen. Weil nemlich der Weg, den die Strahlen von der nidrig stehenden Sonne oder dem nahe beym Horizont befindlichen Mond

durch

durch die Luft nehmen müssen, viel länger ist, als wenn diese Himmelskörper höher stehen; so werden desto mehr blaue Strahlen nach allen Seiten zerstreuet, und das durchgehende Licht muß mehr ins gelbe und rothe fallen. (M. s. Smiths Lehrbegrif der Optik 425. S. d. D. Uebers.) Indessen sind auch andere Naturforscher geneigt, diese blaue Farbe mehr den in der Luft schwebenden Dünsten, als den Lufttheilchen selbst zuzuschreiben, wovon Hr. Prof. Tetens in einer zu Rostock im Jahr 1760 gehaltenen Disputation: de caussa caerulei coeli coloris umständlich gehandelt hat. Wässerige Dünste können daran nicht Antheil haben, weil die Himmelblaue Farbe in Italien, in der Schweiz, und an allen trockenen und erhabenen Orten weit schöner, als in andern mehr feuchten Gegenden, und so vortreflich ist, daß kein Mahler sie vollkommen nachahmen kann. (M. l. Lulofs Kenntniß der Erdkugel im 437 §. 394 S. d. d. Uebers.)

418. §.

Wenn die Sonne dem Horizont nahe ist, und alsdenn der Schatten eines dunklen Körpers mit einer weissen Fläche aufgefangen wird, so erscheint der Schatten mit einer mehr oder weniger lebhaften blauen Farbe, nachdem die übrigen Umstände mehr oder weniger günstig sind. Otto Guerike hatte schon etwas dergleichen wahrgenommen, wie er in den Experimentis novis Magdeburgicis pag. 142. anführt. Er versichert, wenn man des Morgens ein brennendes Licht verdecket, und den Schatten auf weisses Papier fallen läßt, daß dieser blau und nicht schwarz seyn werde. Nach der Zeit ist man auf diese Erscheinung eben nicht aufmerksam gewe-

sen

sen, bis im Julius des Jahrs 1742 Hr. v. Büffon bey Sonnen = Aufgang die blaue Farbe der Schatten bemerkte, als er des Abends zuvor wahrgenommen hatte, daß die Schatten der Bäume, die auf eine 30 bis 40 Fuß weit davon entfernte Mauer fielen, eine zarte grüne Farbe hatten, die etwas ins blaue fiel: wobey noch merkwürdig war, daß der Schatten einer nur drey Fuß weit von der Mauer entfernten Laube so grün erschien, als wenn er ganz frisch mit Grünspan gemahlet wäre. Am zweyten Abend fand er die Schatten wieder grün, nach der Zeit aber, nachdem er sechs Tage lang an Fortsetzung dieser Beobachtungen war gehindert worden, fand er die Schatten sowohl beym Untergang, als auch bey Aufgang der Sonne schön Himmelblau. Diese Wahrnehmungen sind in den Memoires de l'Academie de Paris A. 1743 erzählt, pag. 217 der Pariser Ausgabe.

Im J. 1764 hat H. Beguelin diese Sache noch weiter untersucht, und in den Memoires de l' Academie de Berlin pour l'Année 1767 p. 27. sq. davon Nachricht gegeben. Nach seinen Wahrnehmungen fangen die Schatten des Abends an sich blau zu färben, wenn der wagrechte Schatten eines Körpers achtmahl länger als der Körper selbst, mithin die Sonne noch 7° 8′ hoch über dem Horizont ist: indessen hat er auch schon um 3 Uhr Nachmittags am 19 Julius blaue Schatten wahrgenommen, als die Sonne in einem sehr hellen Nebel gehüllet war, der ihr Licht schwächte. Alle diese Wahrnehmungen sind soviele Beståttigungen dessen, daß die blauen Lichtstrahlen von den Lufttheilchen am häufigsten nach allen Seiten zerstreuet werden,

weil

weil die blaue Farbe der Schatten unter den angezeigten Umständen sich ganz ungezwungen daraus erklären läßt. Hr. Beguelin versichert, man könne dergleichen blaue Schatten fast zu jeder Stunde des Tages in Zimmern wahrnehmen, welche das Sonnenlicht durch die Zurückwerfung von einem weissen Gegenstande erhalten, wofern man nur von dem Ort des Versuchs einen Theil des klaren Himmels entdecken, und alles so einrichten kann, daß der Schatten daher Licht empfängt. Die blaue Farbe wird alsdenn grade an denjenigen Stellen des Schattens verschwinden, die von dem blauen Himmel kein Licht erhalten können. Diese und andere hieher gehörige Nachrichten findet man auch in Hn. Priestleys Geschichte der Optik 3 Abschnitts 3 Cap. 327. S. der Uebersetzung.

Einige Zusätze und Verbesserungen.

Zum 44. §.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist eine leichte Folge aus dem 35 §., wenn man den 42 §. damit verbindet: warum ich hier die ganz leichte und kurze Analisin wieder hersetze, die, was den veränderlichen Factor betrift, eben die Differentialformul wie im 35 §. giebt, auch keine andere geben kann, wie aus Vergleichung beyder Stellen erhellet, wird man im 57 §. angezeigt finden.

Zum 45. §.

Ich habe hier und in einigen folgenden §. §. die Ausdrücke Strahlenmenge und Lichtmenge als gleichgültige gebraucht, im folgenden solches aber mehr vermieden, und lieber allein das Wort Lichtmenge behalten. Im 2 §. wird man den Grund finden, weswegen ich Strahlenmenge, und Lichtmasse, lieber unterscheide, wofern es anders verstattet ist, sich von den physischen Lichtstrahlen die eben daselbst angenommene Vorstellung zu machen. Jedes Element einer leuchtenden Fläche verbreitet die davon ausgehenden Strahlen nach allen Seiten gleichförmig, keineswegs aber die davon nach allen Seiten ausgehende Lichtmasse: nur alsdenn, wenn die Verminderung des Lichts wegen der Schiefe des Ausflußwinkels wegfällt, ist die Menge des nach allen Seiten umher sich ausbreitenden Lichts der Strahlenmenge proportional.

Im 46. §.

Sind die zwey ersten Perioden überflüßig, und ich bitte sie so anzusehen, als wenn sie nicht da stünden, ben, und dieser §. gleich so anfienge:

Die Menge Lichts, welche ein Element einer leuchtenden Fläche, wie Ll, um sich her verbreitet, wird als unendlich klein u. s. w.

Zum 47. §.

Nach den Worten: als eine endliche Grösse zu betrachten, und statt der Zeile: **Eigentlich hat es damit folgende Bewandniß**, bitte ich folgendes zu lesen:

Denn vermöge der im 14 bis 16 §. festgesetzten photometrischen Grundbegriffe, kann S die Lichtmenge bezeichnen, die eine eben so stark glänzende Fläche nach allen Seiten umher strahlen würde, wenn ihr Quadratinhalt $=1$ wäre; wogegen wenn die Formuln des 35 §. gebraucht werden, nur derjenige Theil dieser Lichtmenge zu verstehen ist, der sich zur ganzen nach allen Seiten umherstrahlenden Lichtmenge, wie $\frac{1}{\pi} : 1$ erhält. Diese Lichtmenge wird in den analytischen Formuln durch eine Zahl ausgedruckt, welche ihr Verhältniß gegen diejenige Lichtmenge angiebt, die eine eben so grosse Fläche von bekannten Glanz, den man $= 1$ annimmt, umher strahlet. Eben so bringt man in den mechanischen Wissenschaften, die Dichtigkeit andrer körperlicher Massen in Rechnung, wenn man sie durch eine Zahl ausdruckt, die ihr Verhältniß gegen die Dichtigkeit des Wassers angiebt. Wäre mein bisheriger Vortrag der ersten Gründe der Photometrie nicht befriedigend, und wollte man lieber, wie sonst gewöhnlich ist, die Lichtstrahlen als geometrische von jedem Punkt ausgehende Linien betrachten, so könnte man in Rücksicht auf die am Ende des 39 §. beygefügte Folge annehmen, es habe hiemit folgende Bewandniß. u. s. w.

Zum

Zum 180 §.

Auf der 338 S. am Ende der 12ten Zeile muß nach dem Wort: ist, ein Punkt stehen, und das folgende bis zu den Worten: die gesuchte Lage des Strahls, so heissen:

Wollte man AO genauer suchen, so könnte hier die Gleichung aus dem 169 §., welche den Winkel γ bestimmt, nicht gebraucht werden, weil in der Voraussetzung $\gamma = \infty$ beständig $\gamma = 0$ bleibt, wo auch der Strahl auffällt. Demnach setze man $Am = e$, und die Winkel $AOQ = \alpha$, $OGm = \beta$, so hat man $\sin\beta = \frac{e}{\sqrt{(c^2+e^2)}}$, mithin $\sin\alpha = \frac{me}{n\sqrt{(c^2+e^2)}}$. Weil aber der Strahl aus Q auf M fallen soll, so wird erfordert, daß $\sin\alpha = \frac{b-e}{\sqrt{((b-e)^2+\delta^2)}}$ sey, also beyde Werthe gleich gesetzt $\frac{me}{n\sqrt{(c^2+e^2)}} = \frac{b-e}{\sqrt{((b-e)^2+\delta^2)}}$, und diese Gleichung bestimmt e für die gesuchte Lage des Strahls.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

Auf der 32 S. lezte Z. statt $e\pi c S z dz$ l. $2\pi c S z' dz$.
= = 41. 6 Z. statt 13 §. l. 5. 6. §.
= = = 16 Z. statt 13 §. l. 6. §.
= = = 17 Z. statt al l. ab
= = = 21 Z. statt ae l. al.
= = 77 S. 19 Z. statt grosser l. gröster.
= = 79 S. 3 Z. statt $M\mu$ l. Mm.
= = 119 S. 8 Z. statt ABZY l. MABZY.
= = = = 18. Z. = RMQ l. PMQ.
= = 129 S. 14 Z. = $ACN = \zeta$ l. $ACN = \xi$.
= = = 16 u. 17 Z. = $\cos \zeta$ und $x \sin \zeta$ l. $\cos \xi$ und $x \sin \xi$.
= = 132 S. 6 Z. im Nenner $2bz$ l. $2z$.
= = 133 S. 10 Z. $\frac{y}{br}$ l. $\frac{ay}{br}$.
= = 135 S. 9 Z. 180^2 l. 180°.
= = 136 S. 8 Z. $(a^2 + b^2 - r^2)$ l. $a^2 + b^2 - r^2)^2$.
= = 138 S. 4 Z. $a^2 b^2$ l. $a^2 + b^2$.
= = = = 6 Z. um l. nun.
= = 152 S. 17 = 18 Z. wie auch von krummen Spiegelflächen wird zwar die Catoptrik Unterricht geben: ist = = Statt dessen l. wie auch von andern krummen Spiegelflächen wird die Catoptrik Unterricht geben, Ist = =
= = 153 S. 6 Z. von unten der Punkt H, l. A.
= = 158 S. 19 Z. $\frac{\frac{1}{2}KL}{r} \sin ACK$ l. $\frac{\frac{1}{2}KL}{r} = \sin ACK$.
= = 160 S. 6 Z. $v \sin \gamma$ l. $r \sin \gamma$.
= = 165 S. 9 Z. muß $1 - \frac{1}{2} \sin \alpha^2$ in Parenthesi stehen.

Auf der 169 S. 4 Z. von unten $n\frac{1}{2}n^2$ l. $\frac{1}{2}n^2$.

= = 172 S. 5 Z. o bis x l. o bis α.

= = 173 S. lezte Z. der gröste l. der kleinste.

= = 174 S. 18 Z. $f = d$, l. $f - d$.

= = 179 S. 3 Z. von unten $2d\beta . d\pi$ l. $2d\beta : d\pi$.

= = = lezte Z. $d - r$ l. $\delta - r$.

= = 180 S. 9 Z. 2PM l. z,PM.

= = 181 S. 11 Z. $q\frac{1}{4}$MF l. $q = \frac{1}{4}$MF.

= = 185 S. 7 Z. v. unten $\frac{f}{\delta - f}$ l. $\frac{\delta f}{\delta - f}$.

= = 224 S. 10 Z. $\sqrt[3]{w} = r$ l. $\sqrt[3]{w} - r$.

= = 226 S. 7 Z. v. u. nach AS $= y$ setze man hinzu: als die Abscisse.

= = 227 S. 2 Z. v. u. $= \alpha$ l. $= a$.

= = 236 S. 12 Z. sind $\frac{m}{n}$ l. sind $= \frac{m}{n}$.

= = 246 S. 2 Z. v. u. aber l. oder.

= = 261 S. 12 Z. $\frac{1}{2}\varepsilon = \varphi$ l. $\frac{1}{2}\varepsilon - \varphi$.

= = 271 S. 4 Z. v. u. $\mu < 1$ l. $\mu > 1$.

= = 274 S. 3 Z. $\varepsilon 4 \zeta$ l. $\varepsilon + \zeta$.

= = = S. 7 Z. setze man vor M das zeichen =

= = 300 S. 15 Z. $\frac{m}{m - n} = \nu$ l. $\frac{n}{m - n} = v$.

= = 301 S. 15 Z. im Zähler rf l. ϱf.

= = 306 S. 9 Z. $\varepsilon = \gamma$, l. $\varepsilon = -\gamma$.

= = 310 S. 20 Z. im Zähler muß was unter dem Wurzelzeichen ist zwischen zweyen ( ) stehen.

= = 315 S. 3 Z. Strahl l. Winkel.

= = 328 S. 2 Z. v. u. CK l. EK.

= = 329 S. 3 Z. im Nenner $+ r$ l. $+ \varrho$.

= = 373 S. 5 Z. v. u. Licht l. leicht.

= = 378 S. lezte Z. im Nenner $(\delta - g^2)$ l. $(\delta - g)^2$.

= = 399 S. 1 Z. VW^2 l. VW.

Auf

Auf der 400 S. 8 Z. v. u. Licht l. leicht.

= = 404 S. 6 Z. muß vor r ein Comma stehen.

= = 407 S. 16 Z. tang KpD l. tang KpD^2.

= = 410 S. 9 = 10 Z. oder kleiner, lösche man weg.

= = 413 S. 6 Z. v. u. K^2M l. k^2M.

= = = = lezte Z. concentrale l. centrale.

= = 416 S. 11 Z. im Nenner b^4 l. b^2.

= = 417 S. 3 Z. v. u. $16x\frac{3}{2}$ l. $16 \times \frac{3}{2}$.

= = 423 S. 10 Z. v. u. zweymahl im Nenner Nr l. Mr.

= = 426 S. 12 Z. sehr nahe l. so nahe.

= = 442 S. 4 Z. v. u. FO l. 2FO.

= = 446 S. 14 Z. 0,0009 l. 0,0109.

= = 453 S. 7 Z. v. u. μa^2 l. $\mu^2 a^2$.

= = 457 S. 18 Z. $\eta : z$ l. $\eta . z$.

= = 490 S. 5 Z. v. u. $ACF = I$, l. $ACF = \vartheta$.

= = 500 S. 18 Z. $\sin \eta dy$ l. $\sin \eta d\eta$.

= = 528 S. 10 Z. v. u. Winkel AHF l. HAF.

= = 531 S. 3 Z. 232 §. l. 282 §.

= = = = 11 Z. $S : \Sigma\ 1 : A$ l. $S : \Sigma = 1 : A$.

= = 533 S. 12 Z. $\Sigma \vartheta \mu$ l. $\Sigma d\mu$.

= = 534 S. 5 Z. $\cos E.\ M$ l. $\cos EM$.

= = = 11 Z. muß nach $\sin \alpha$ ein) stehen.

= = 535 S. 12 Z. fehlt im Zähler und Nenner am Ende ein).

= = 546 S. 4 Z. im Nenner $b-g$ l. $b-q$.

= = 566 S. 10 Z. ist nur l. ist mir.

= = 571 S. 18 Z. der Kern l. der Stern.

= = 574 S. 15 Z. §. 117 *sqq* l. 1117 *sqq*.

= = 585 S. 17 Z. wird das Wort: man weggelöscht.

= = 589 S. 8 Z. v. u. $= x.\ AD = c$, l. $= x$, $AD = c$.

= = 592 S. 5 Z. v. u. $= ML$ l. $= M. L$.

= = 596 S. 8 Z. v. u. polirte l. foliirte.

= = 603 S. im Anfang der 13 Z. fehlen die Worte: so ist.

Auf

Auf der 610 S. 5 Z. v. u. $q\ldots:Q$ l. $q:Q$.

" " 612 S. 7 Z. muß nach dem Bruch $\frac{1}{1+2a^2h^2:f^2}$ die Ziffer 1 weggelöscht werden.

" " 619 S. 11 Z. $mp\lambda^2u$ l. $mp\lambda^2n$.

" " 625 S. 2 Z. v. u. $\frac{N^2\,N^2}{3N-2N^2}$ l. $\frac{N^2}{3N-2N^2}$.

" " 641 S. 17 Z. so wie auch s, l. so wie auch λ.

" " 661 S. 19 Z. muß vor N ein Comma stehen.

" " 662 S. 12 Z. $l\frac{1}{\lambda}\ \frac{x}{f}$, l. $l\frac{1}{\lambda}=\frac{x}{f}$.

" " " 3. Z. v. u. im Nenner $1-p\lambda^2$ l. $1-p^2\lambda^2$.

" " 671 S. 2 u. 3 Z. v. u. 1000 l. 10000.

" " 672 S. 8 Z. v. u. lk, l. lK.

" " 680 S. 4 Z. muß vor $3k$ das Multiplikationszeichen stehen.

" " " 7 Z. v. u. $\frac{28}{3271}$ l. $\frac{28}{3272}$.

" " 684 S. 2 Z. fehlt im Nenner am Ende der Schluß der Parenthese.

" " 685 S. letzte Z. $R-T+T$ l. $R-S+T$.

" " 687 S. 3 Z. $m=\frac{n}{\zeta}$ l. $m=\frac{\mu}{\zeta}$.

" " 699 S. 8 Z. 0,000000637 6 l. 0,0000002637 6

" " 702 S. 2 Z. 0,077.. l. 1,077....

" " 704 S. 3 Z. $+-+'$ l. $t-t'$.

" " " 9 S. im Nenner 1.4...10 l. 2.4...10.

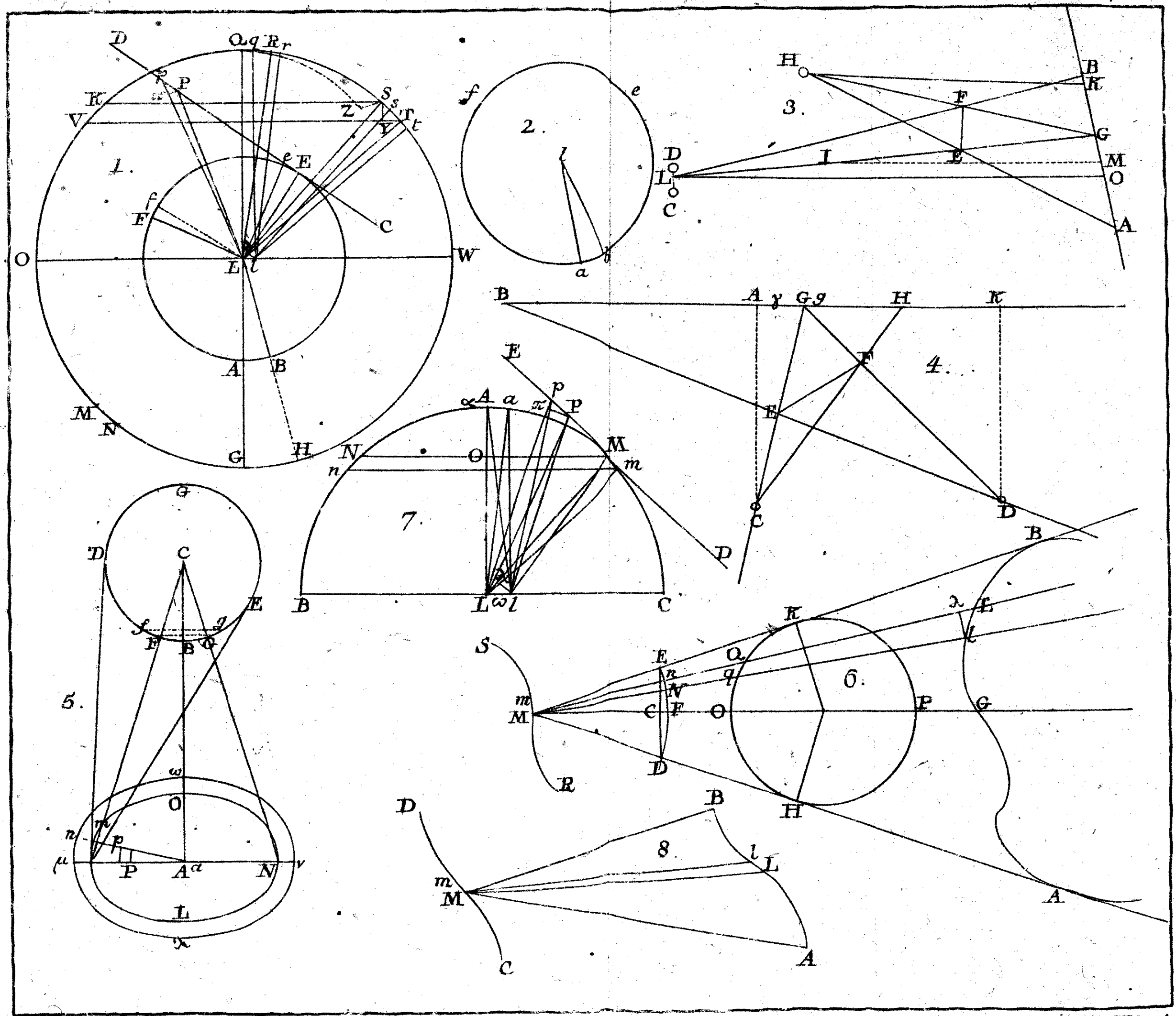
" " 707 S. 2 Z. v. u. $y^{\frac{2}{9}}$ l. $y^{\frac{9}{2}}$.

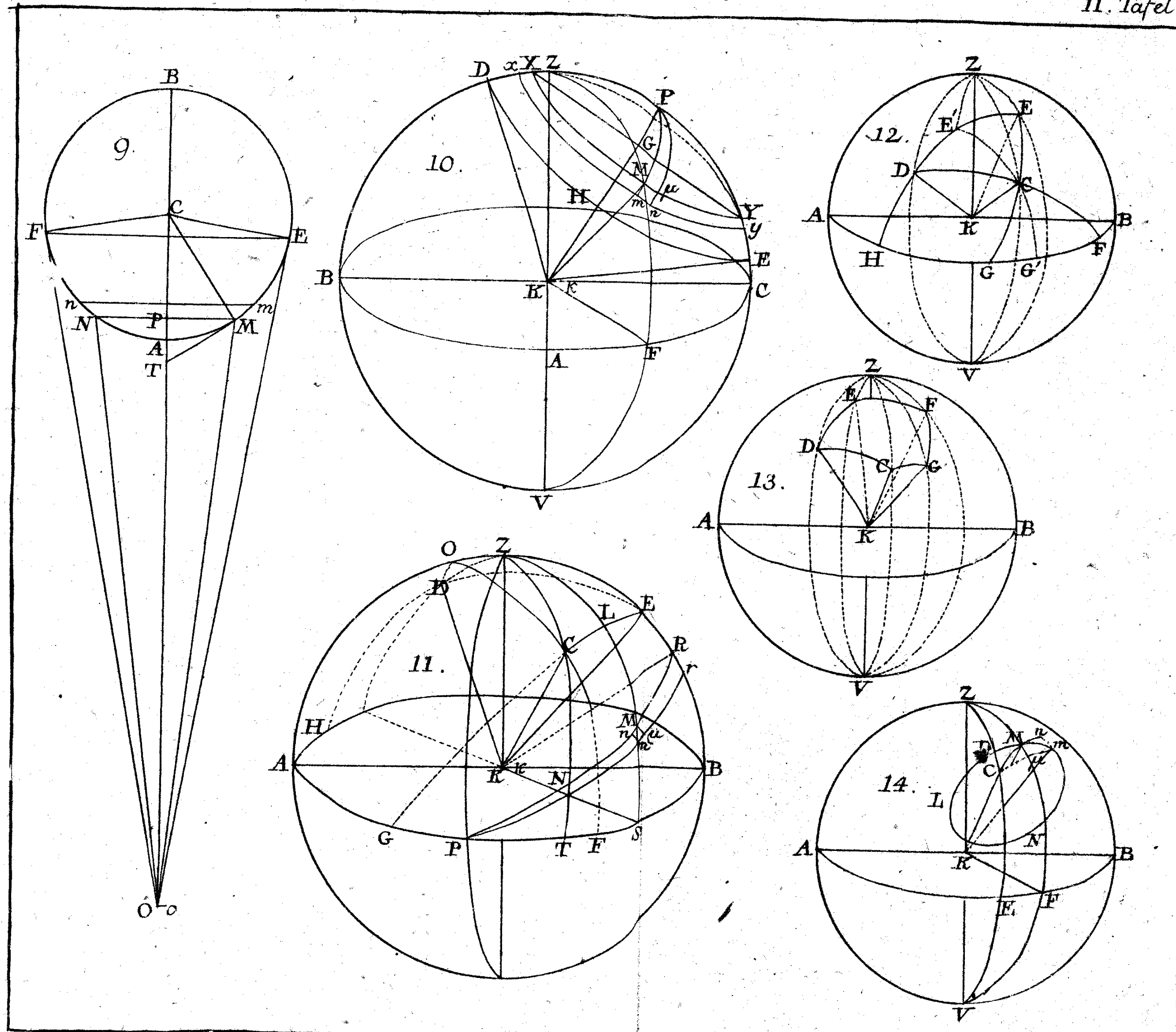
" " 719 S. 18 Z. nach k muß das Zeichen = und nach Toisen ein Comma stehen.

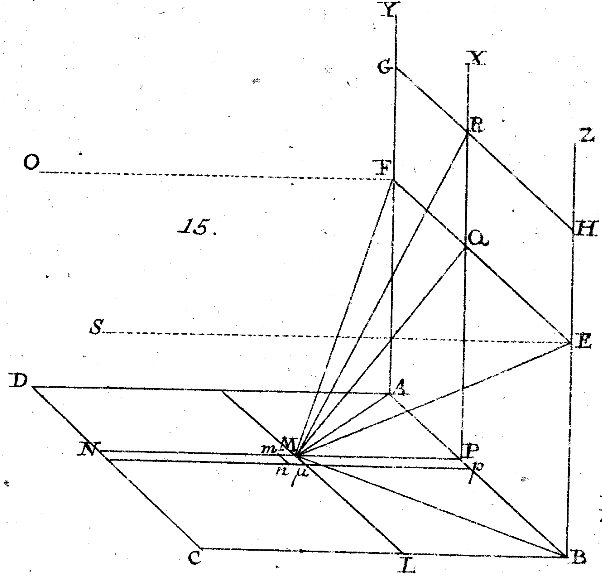
" " 721 S. 10 Z. 1000 l. 10000.

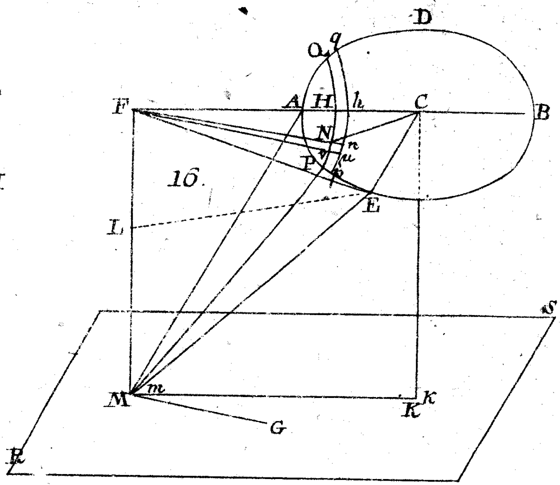
" " 727 S. 7 Z. v. u. nach -1 steht der Haken (verkehrt

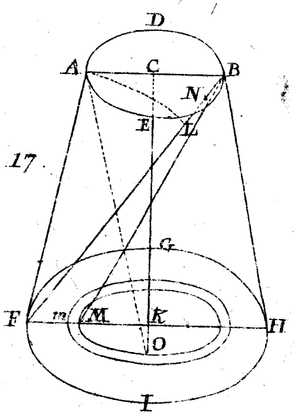
" " 728 S. 4 Z. 13 G l. BG.

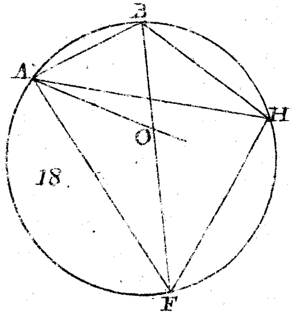

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

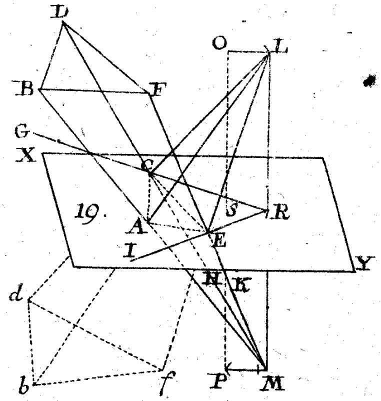

9.
10.
11.
12.
13.
14.

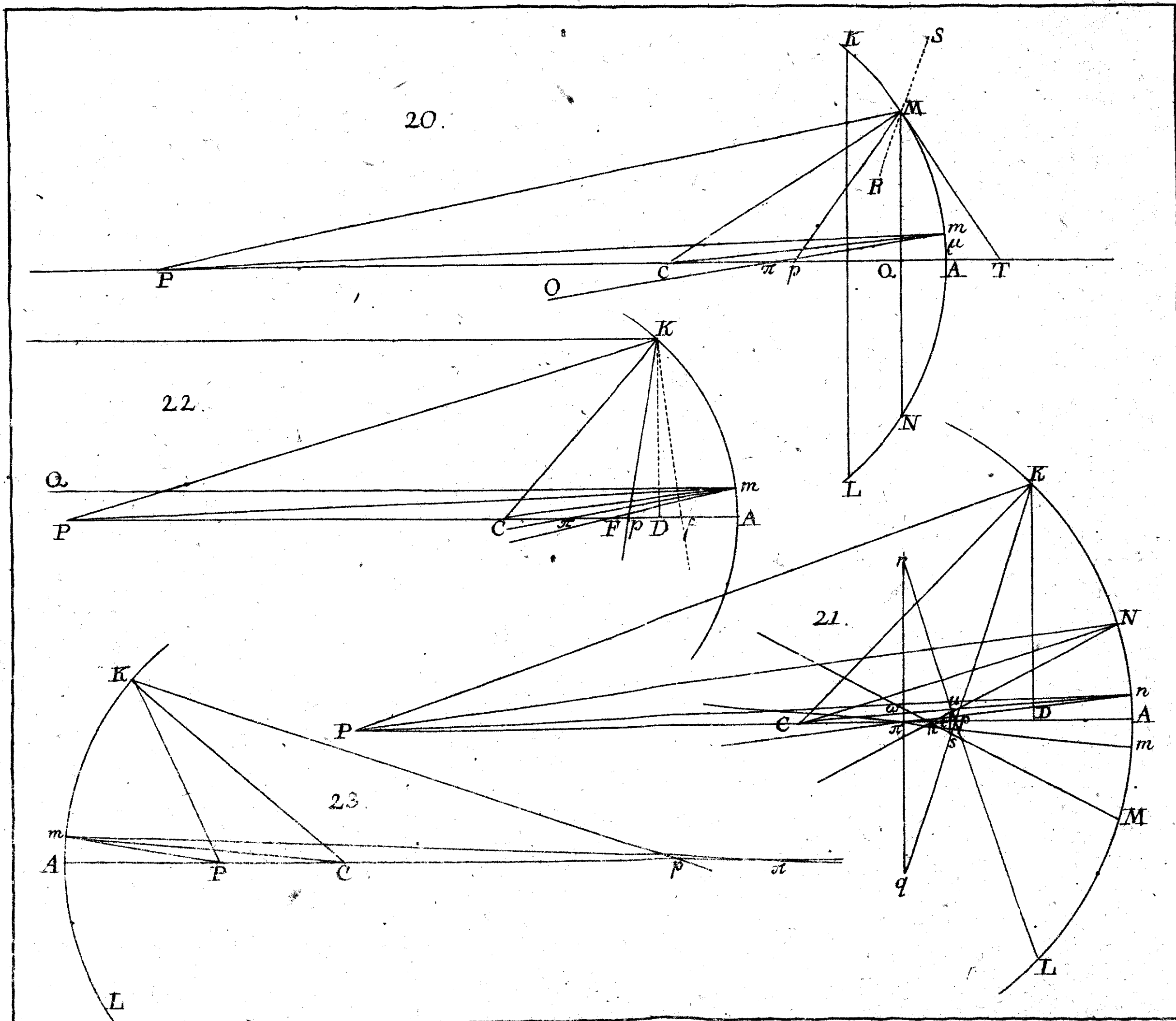

15.
Y G X R Z O F H Q S E D A N m M P n μ p C L B

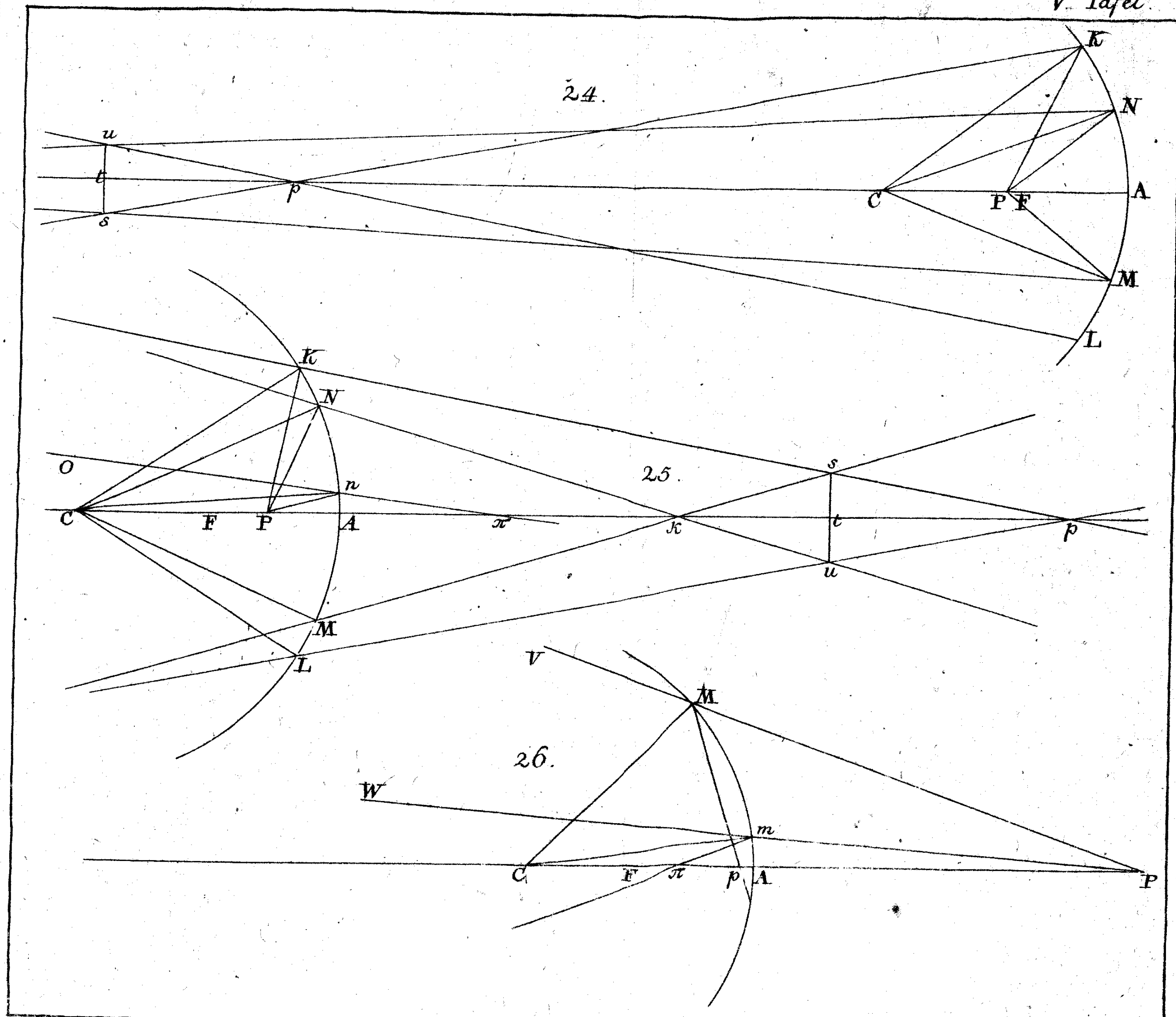

16.
D O q A H h C F B N n P μ p E L S M m K K G R


17.
D A C B N E L G F m M K H O I

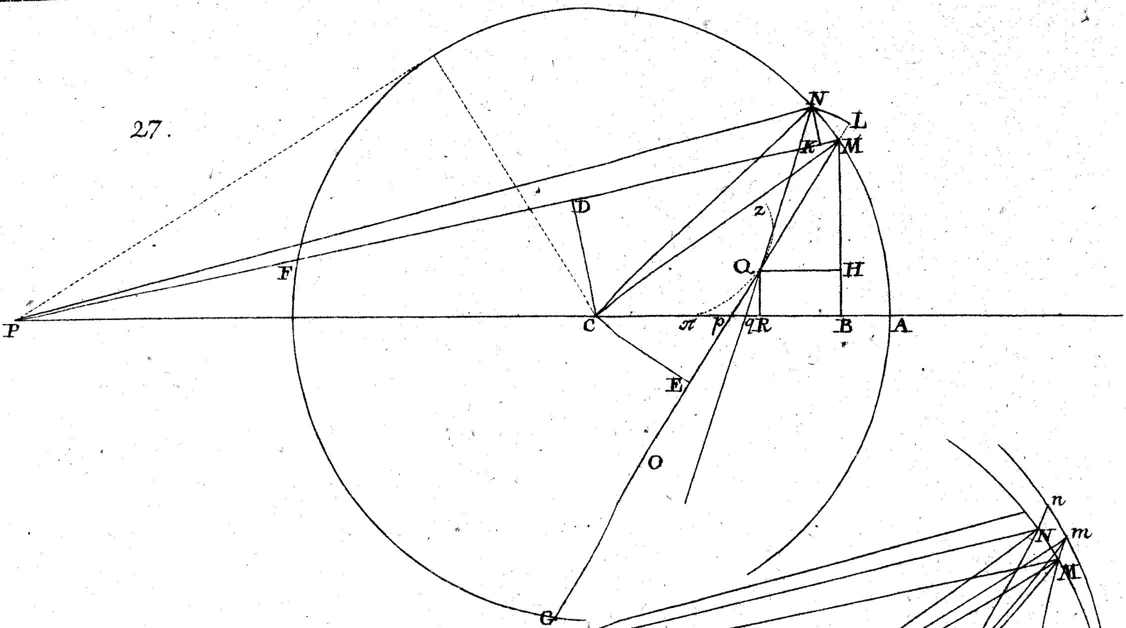

18.
B A H O F


19.
D O L B F G X C S R A E I Y H K d b f P M

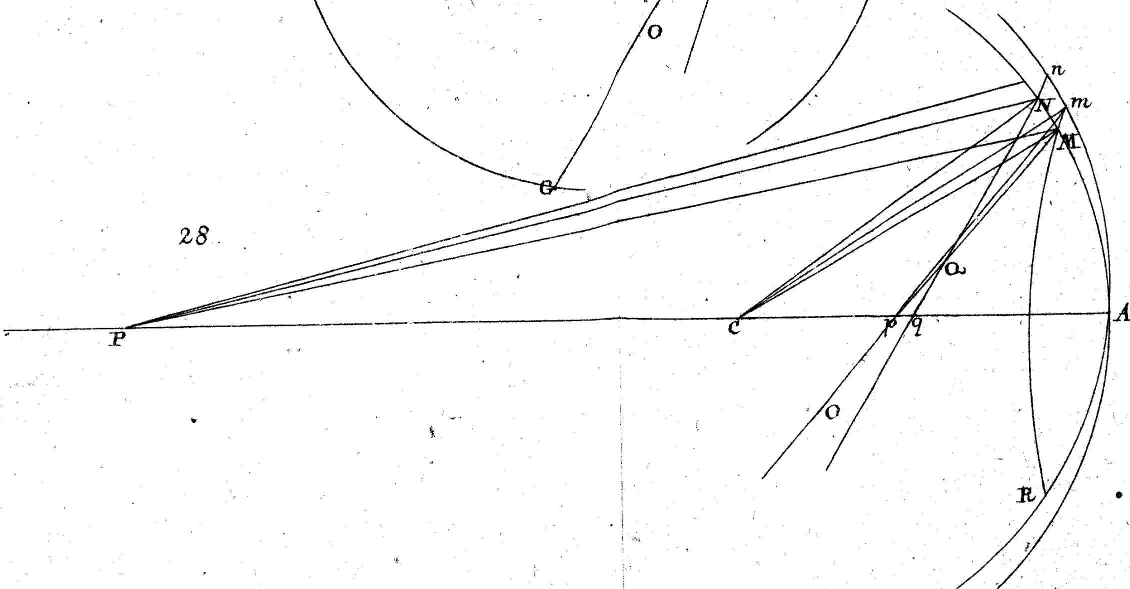

20.
21.
22.
23.

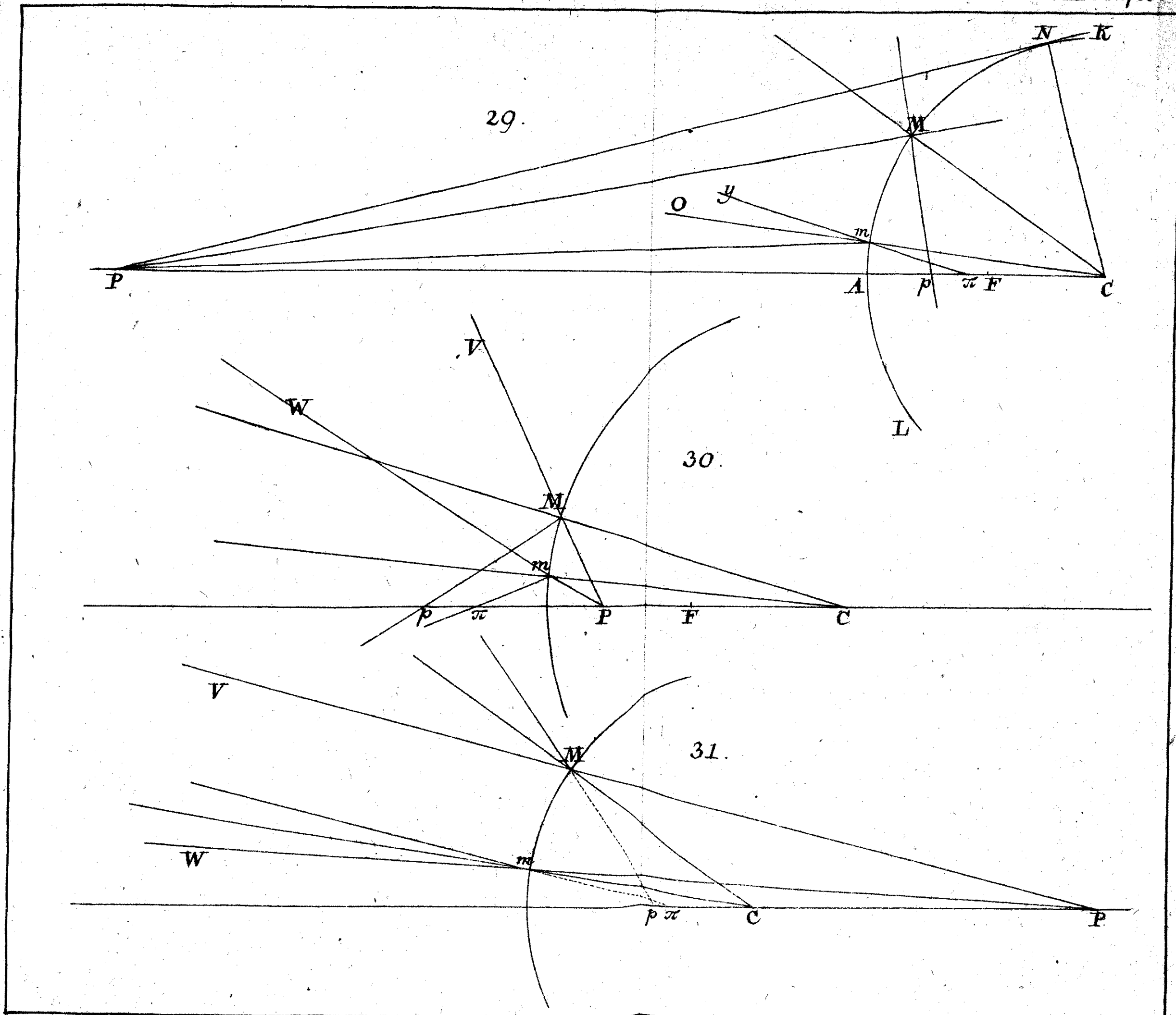

24.
K
N
A
M
L
C
P
F
u
t
s
p
25.
K
N
n
O
C
F
P
A
π
M
L
s
t
u
κ
p
26.
V
M
W
m
C
F
π
p
A
P

27.

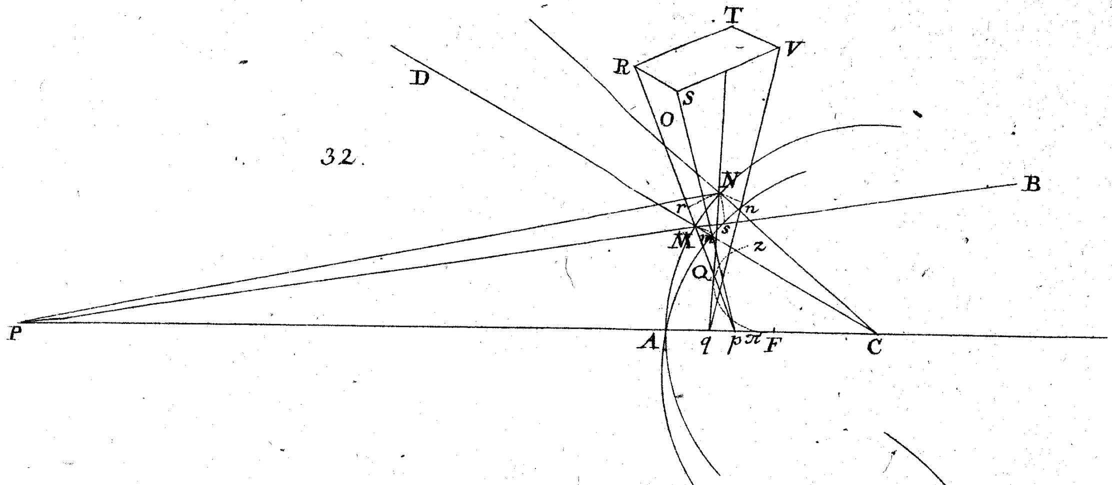


28.

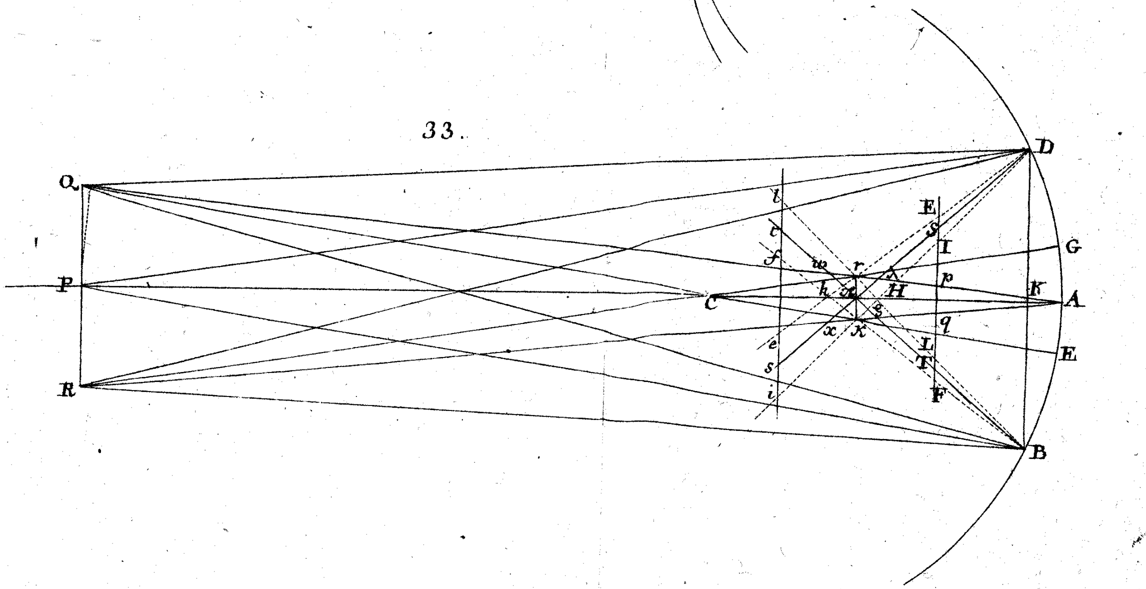


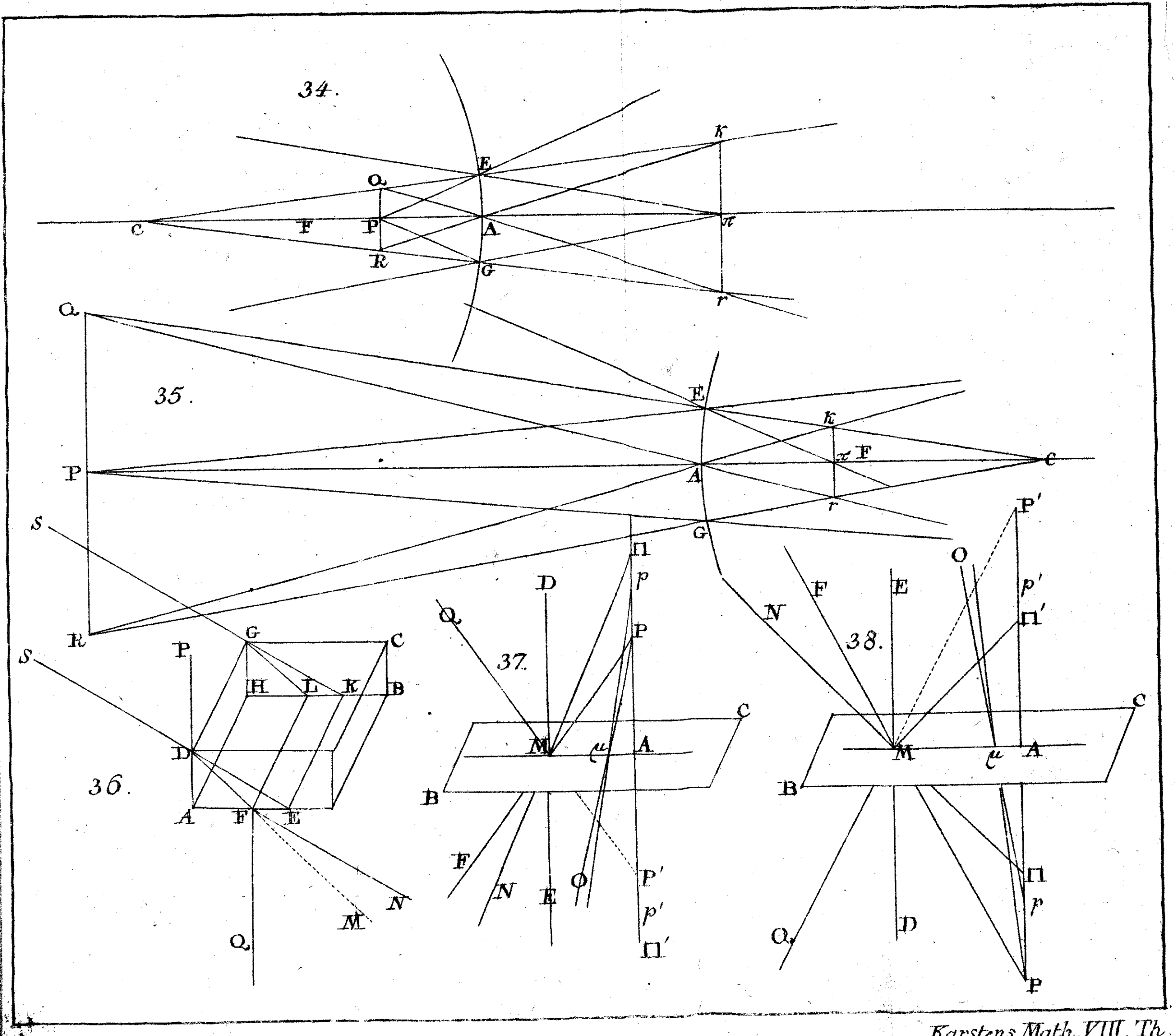

29.
N
K
M
O
y
m
P
A
p
π
F
C
L
V
W
30.
M
m
p
π
P
F
C
V
M
31.
W
m
p
π
C
P

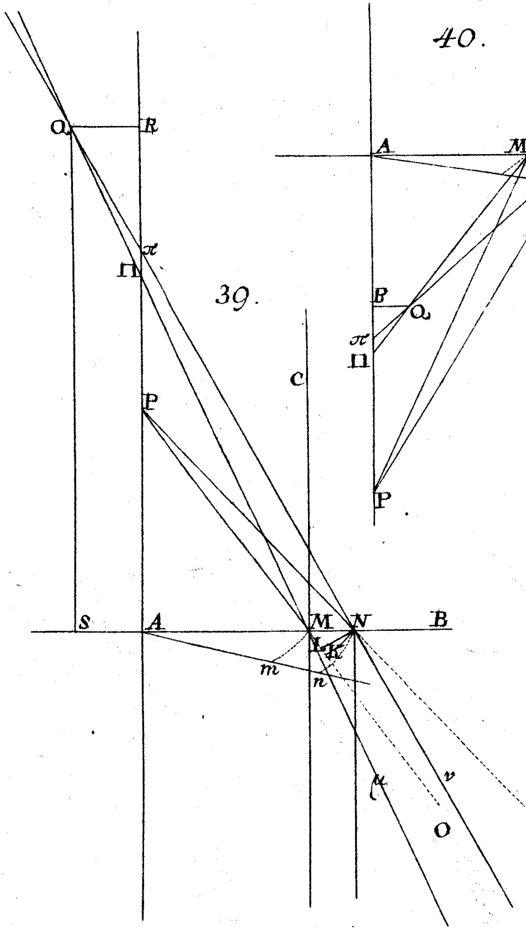
32.


T
R
V
D
S
O
N
B
r
n
s
M
m
z
Q
P
A
q
p
π
F
C

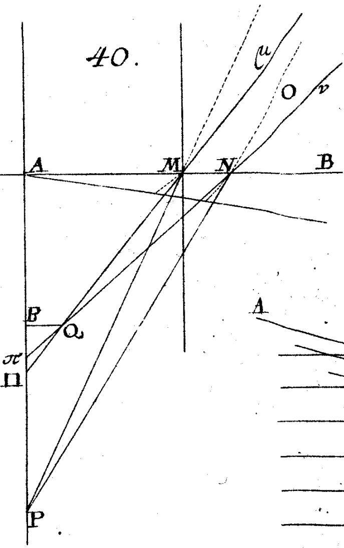
33.


D
Q
l
E
S
t
I
G
f
w
r
λ
P
p
k
H
K
A
C
g
x
K
q
e
L
E
s
T
R
i
F
B

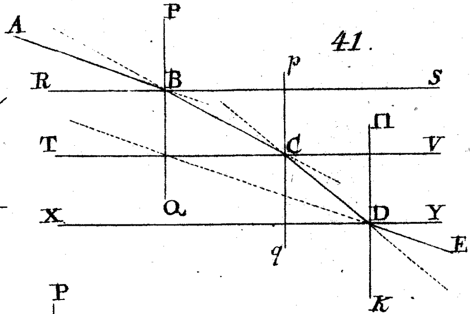

34.
35.
36.
37.
38.


Q R
π Π
P
C
S A M N B
L K
m n
μ v
O

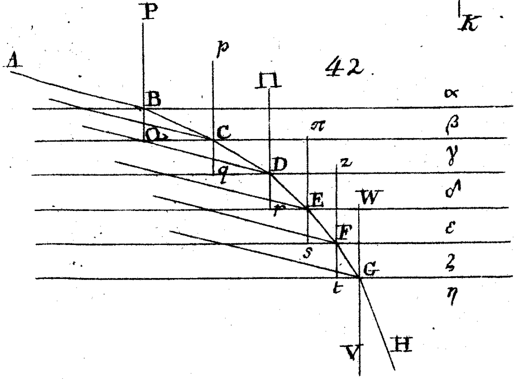
39.


μ
O v
A M N B
B Q
π Π
P

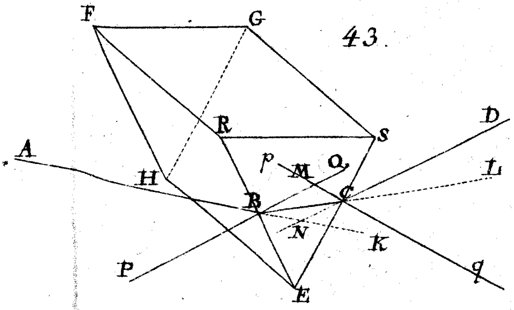
40.


A P
R B p S
T C Π V
X Q D Y
q E
K

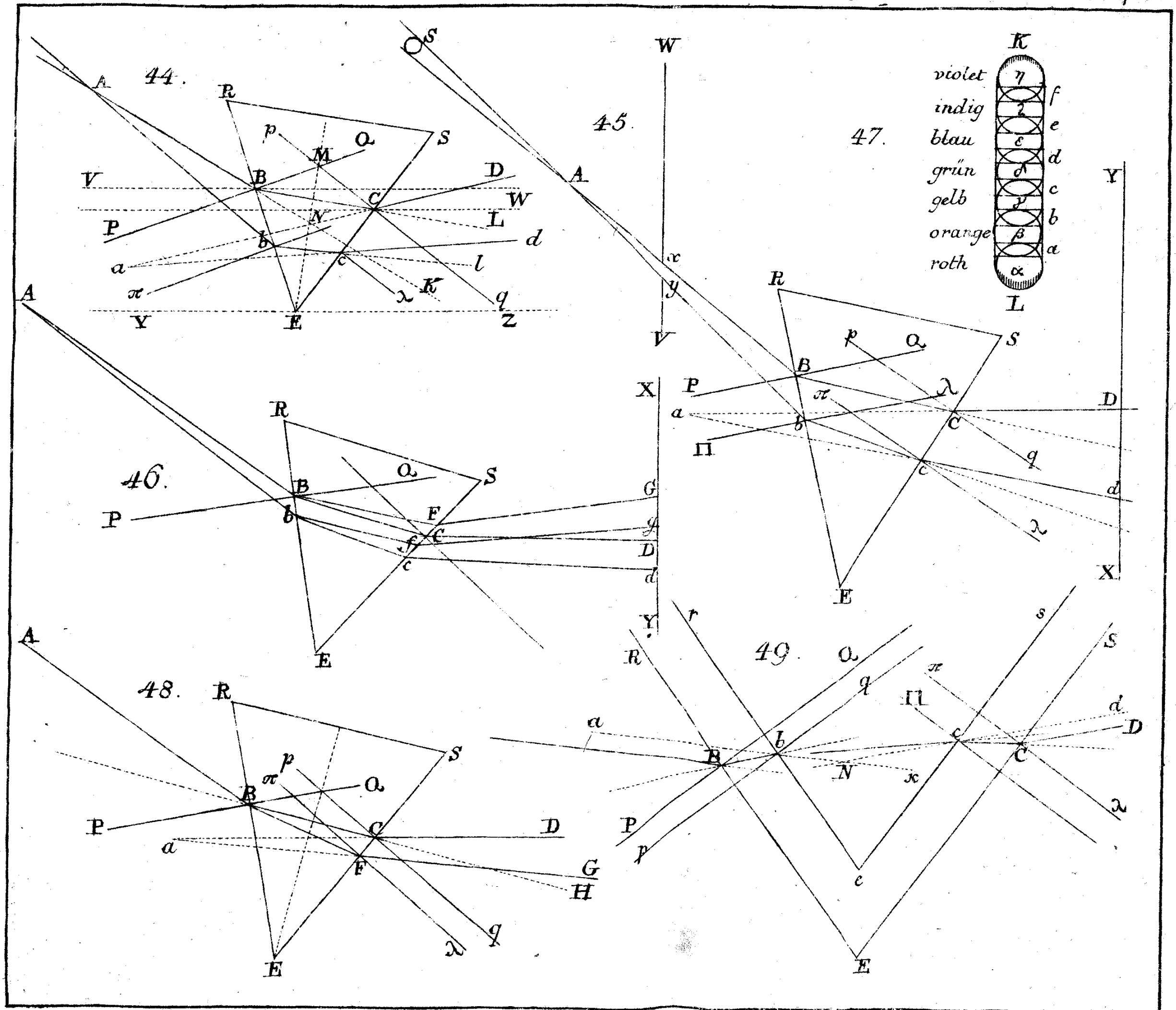
41.


P
A p Π
B α
Q C π β
D z γ
q
E W δ
r
F ε
s
G ζ
t η
V H

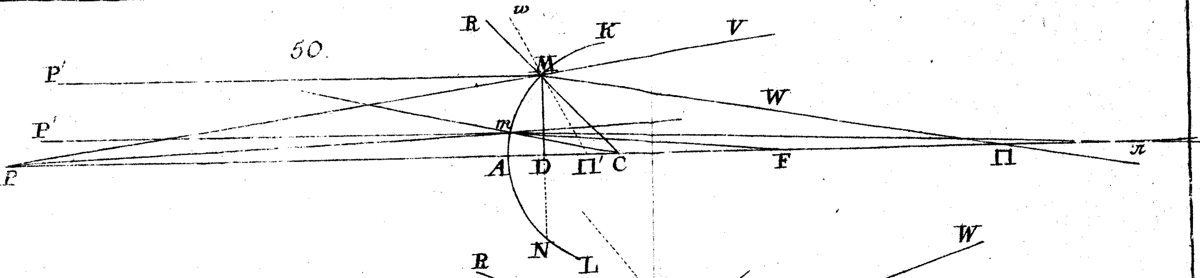
42.


F G
R S D
A p M Q L
H
B C
N K
P q
E

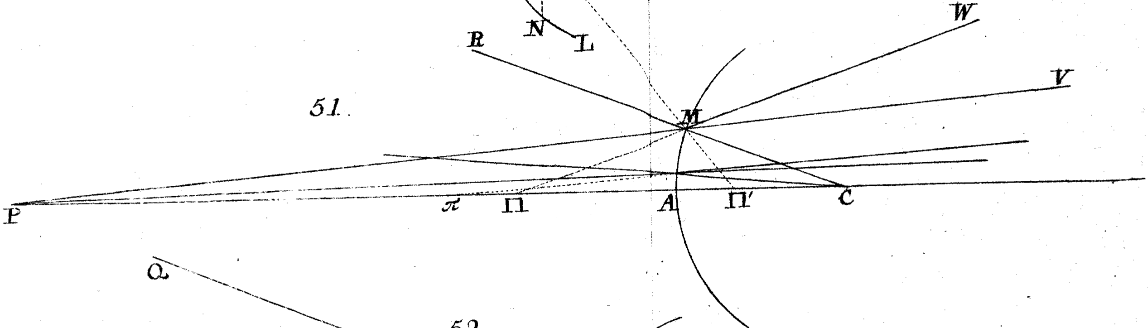
43.


44.
45.
46.
47.
48.
49.
violet
indig
blau
grün
gelb
orange
roth

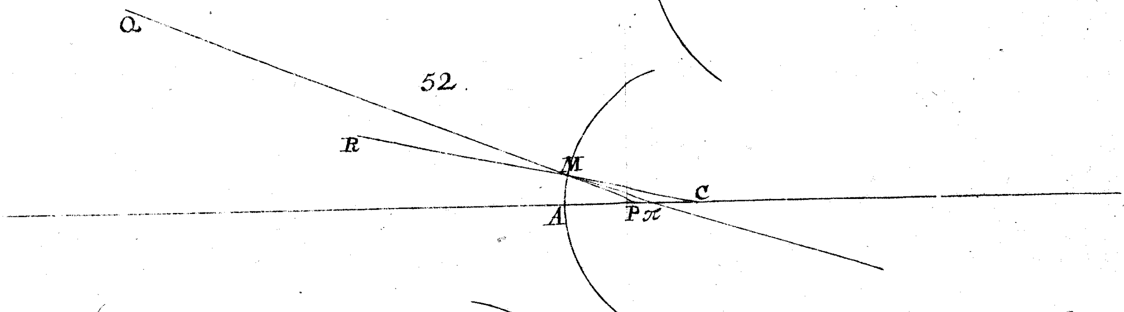
50.



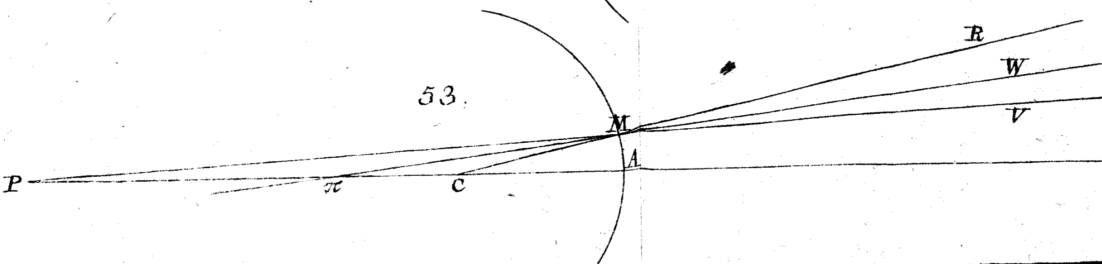
51.

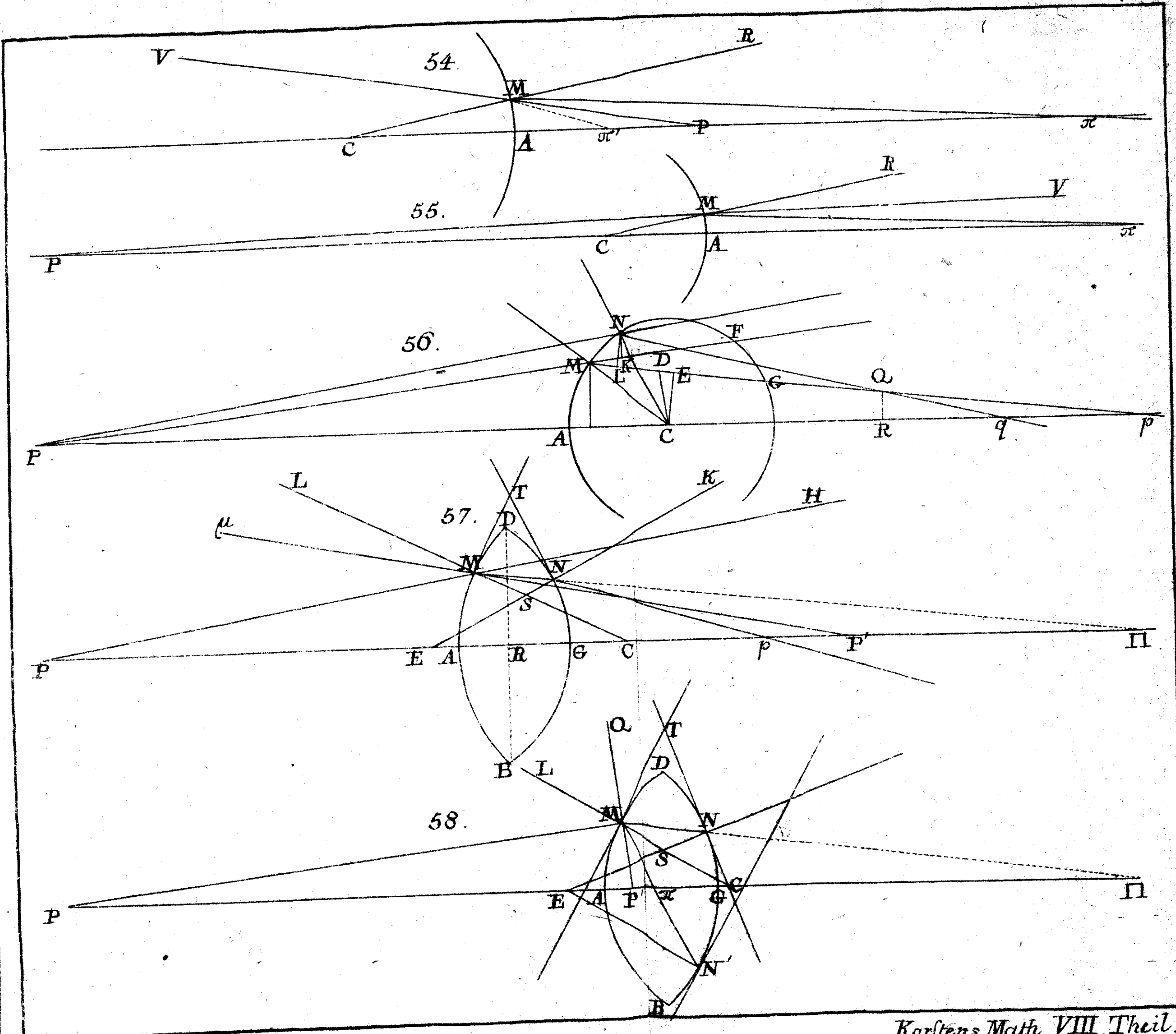


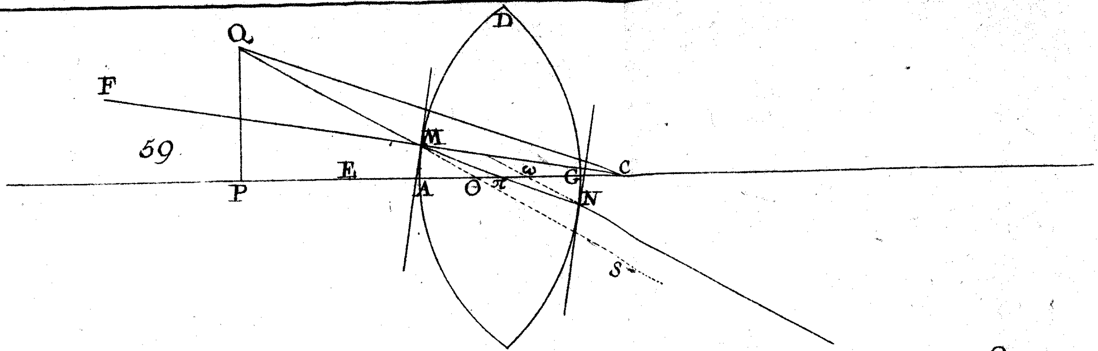
52.

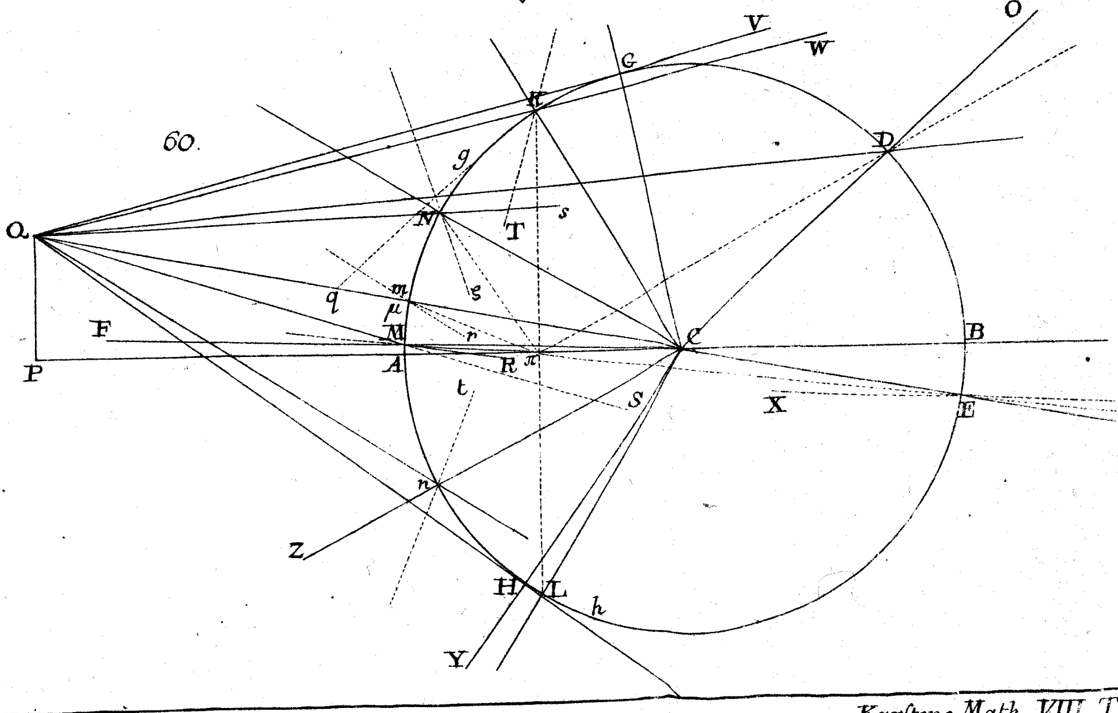


53.

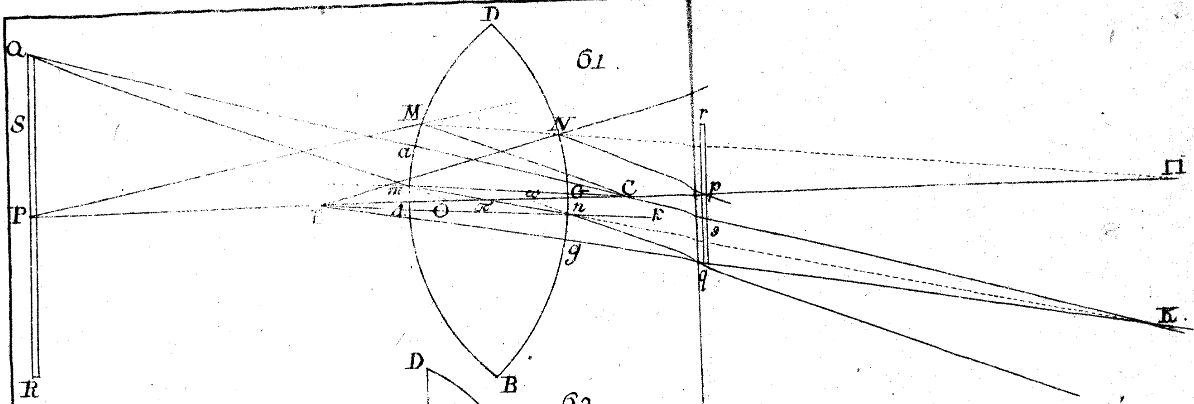



54.
V
R
M
C
A
π′
P
π
55.
R
V
M
P
C
A
π
56.
N
F
M
K
D
L
E
G
Q
P
A
C
R
q
p
57.
L
T
K
H
μ
D
M
N
S
P
E
A
R
G
C
p
P′
Π
B
L
58.
Q
T
D
M
N
S
P
E
A
P′
π
G
C
Π
N′
B

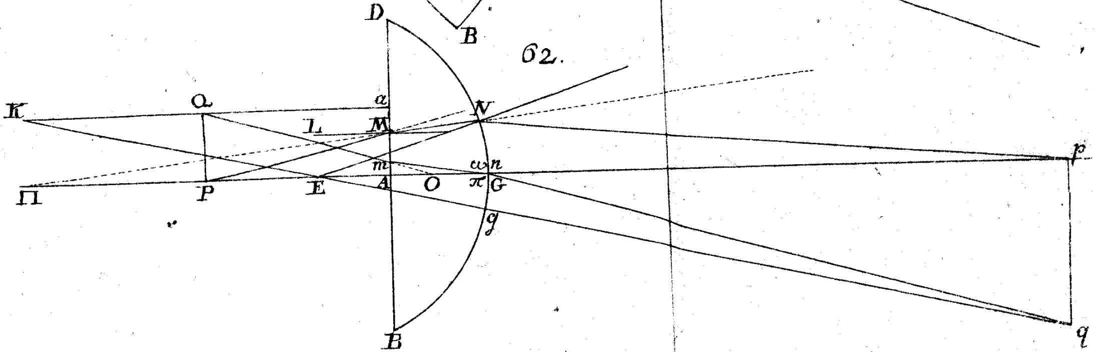

59.
Q
F
D
M
E
P
A
O
π
ω
G
C
N
S


60.
V
W
O
G
K
D
g
N
s
T
Q
q
m
ξ
μ
F
M
r
C
B
P
A
R
π
t
S
X
E
n
Z
H
L
h
Y

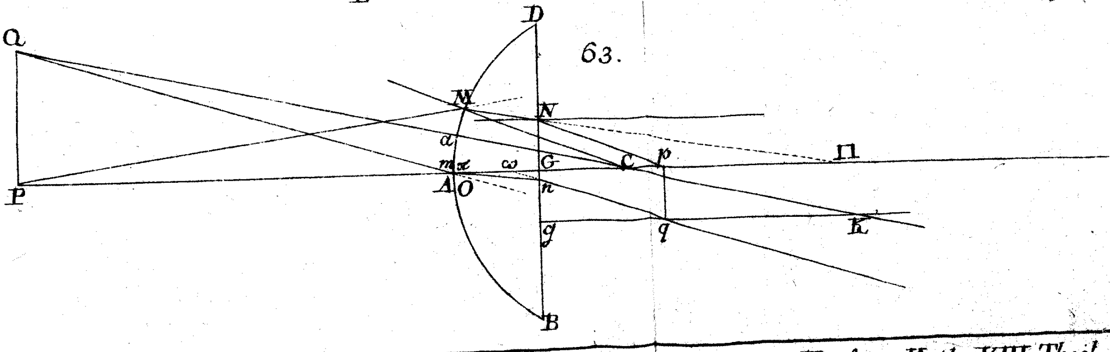
61.


D
Q
S
P
R
M
N
a
m
ω
G
C
A
O
π
n
E
g
B
r
p
s
q
Π
K

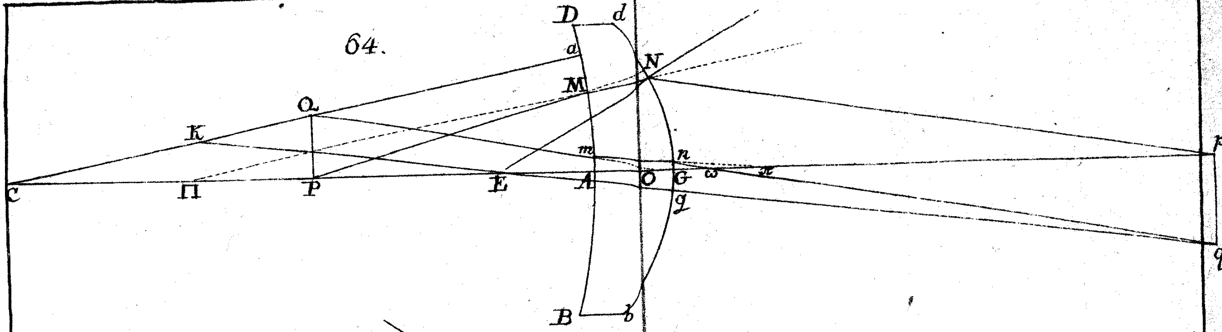
62.


D
a
K
Q
N
L
M
m
ωn
Π
P
E
A
O
π
G
g
p
q
B

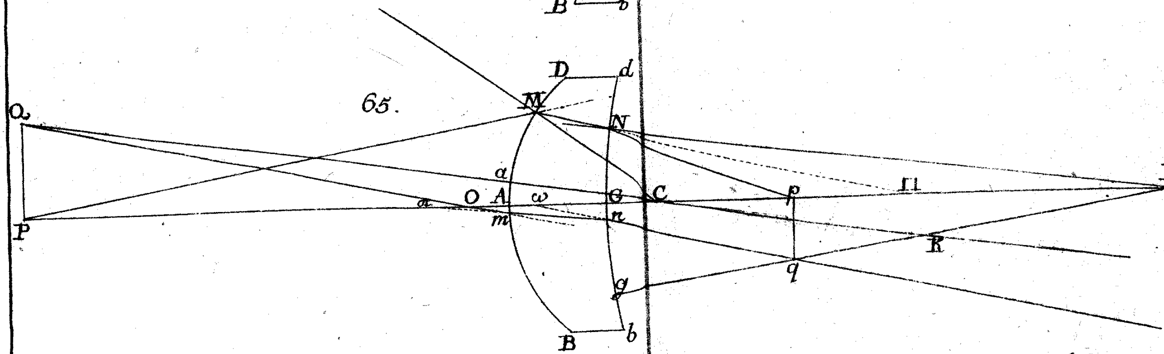
63.

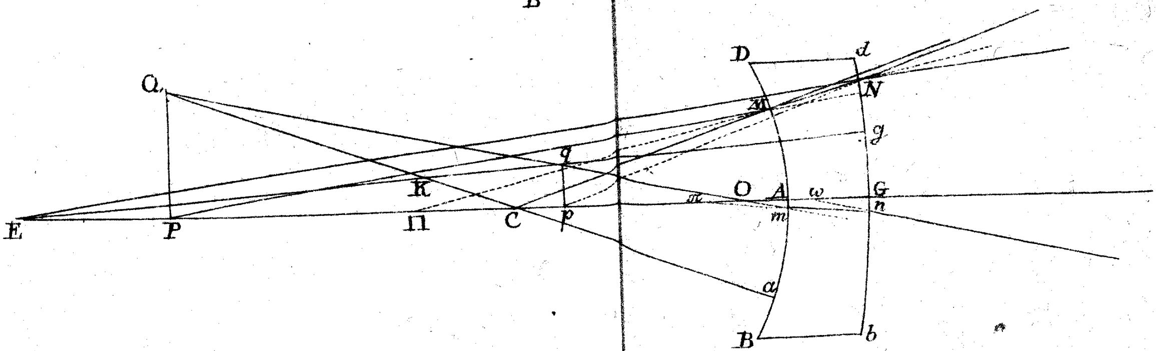

D
Q
M
N
a
mπ
ω
G
C
p
Π
A
O
n
P
g
q
K
B

64.

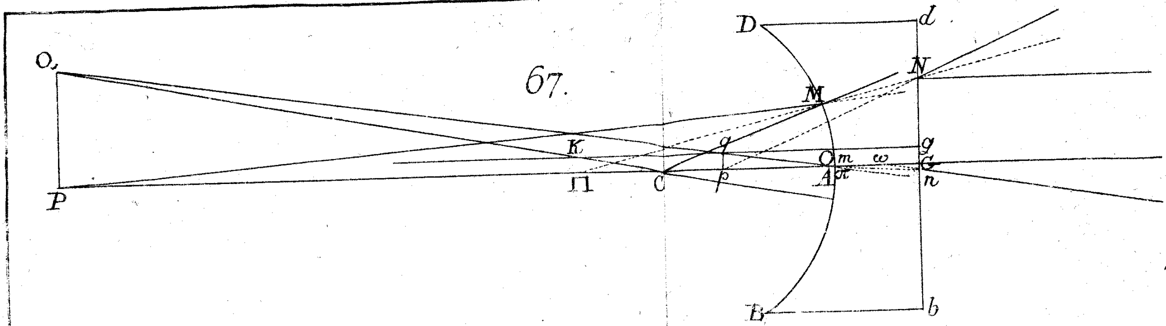

D
d
a
N
M
Q
K
m
n
p
C
Π
P
E
A
O
G
ω
π
g
q
B
b

65.

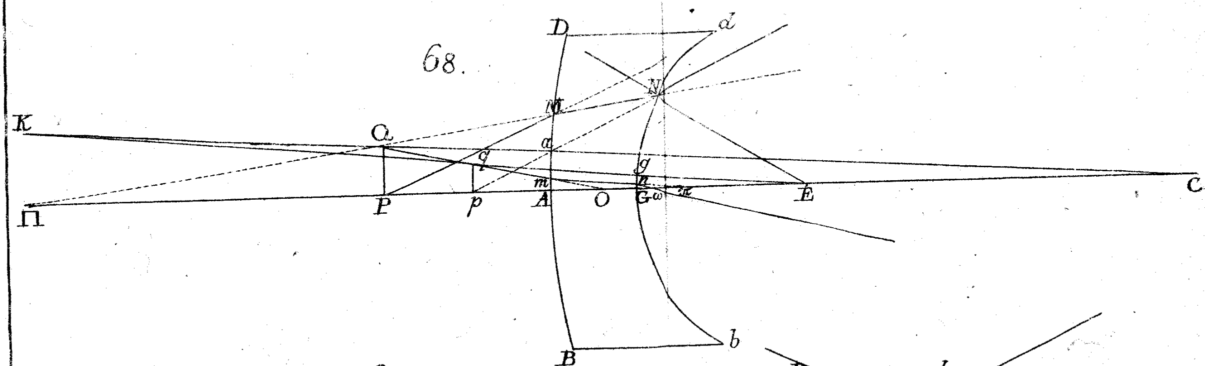

D
d
M
Q
N
a
E
O
A
ω
G
C
p
Π
π
m
n
P
R
q
g
B
b


D
d
N
M
Q
g
q
K
O
A
ω
G
π
m
n
E
P
Π
C
p
a
B
b

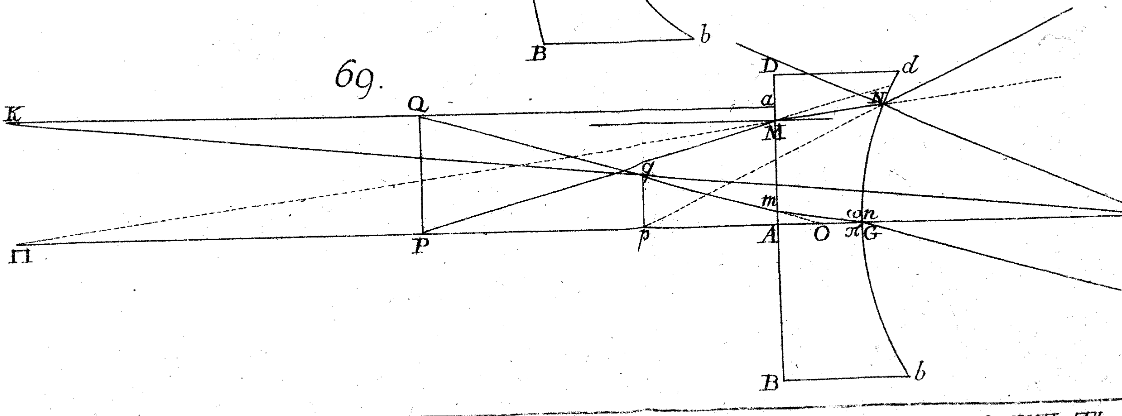
67.

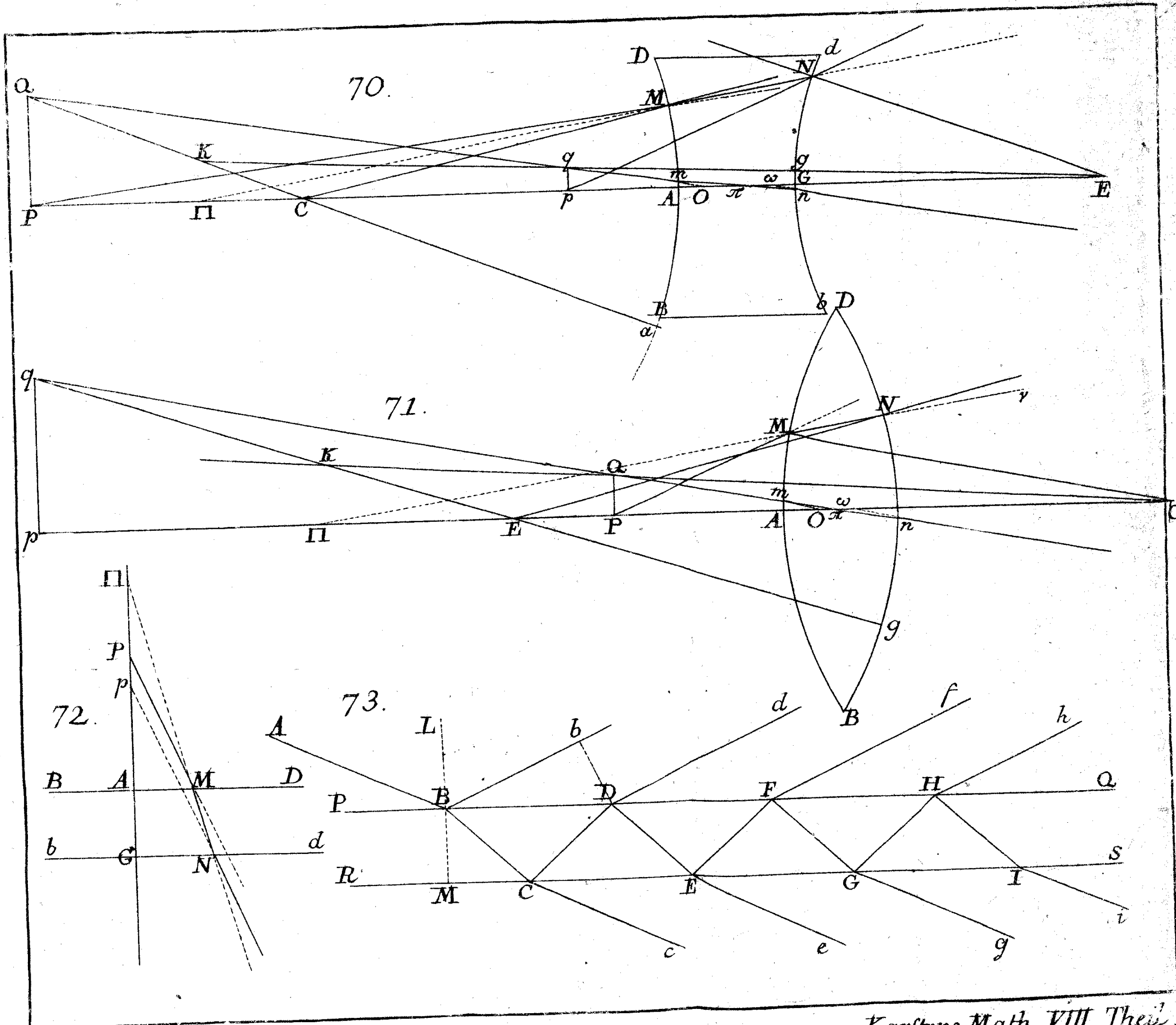


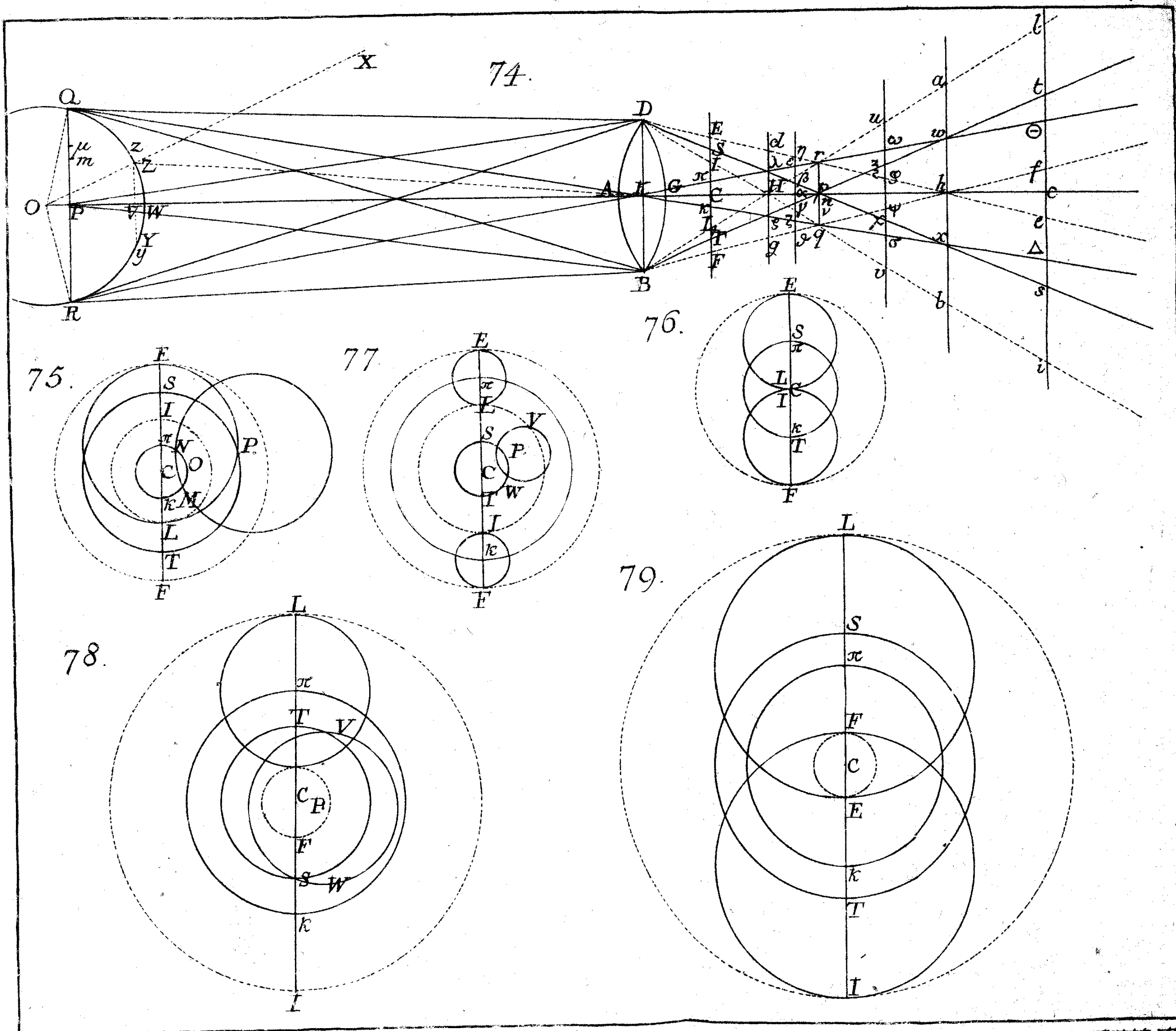
68.

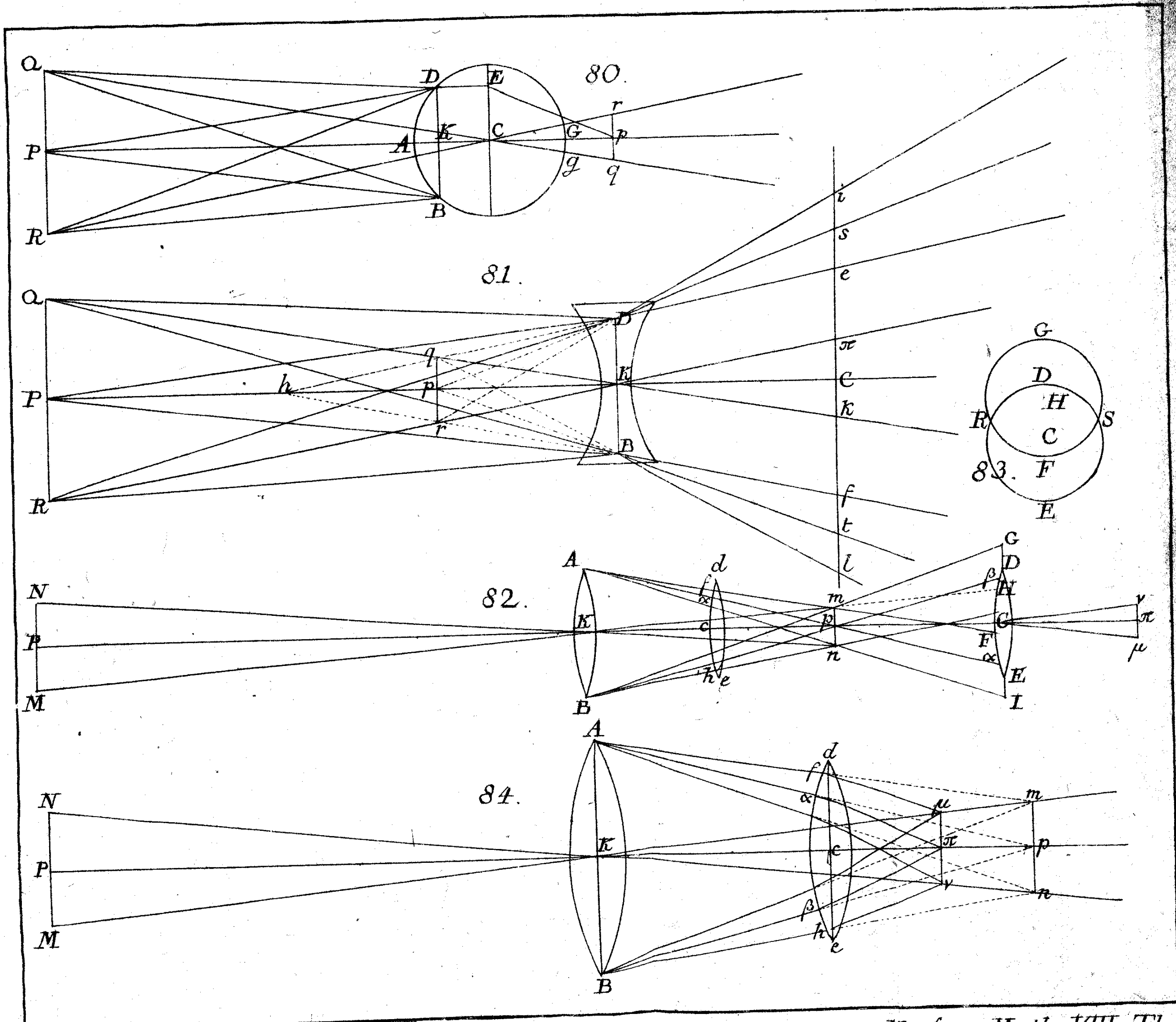


69.

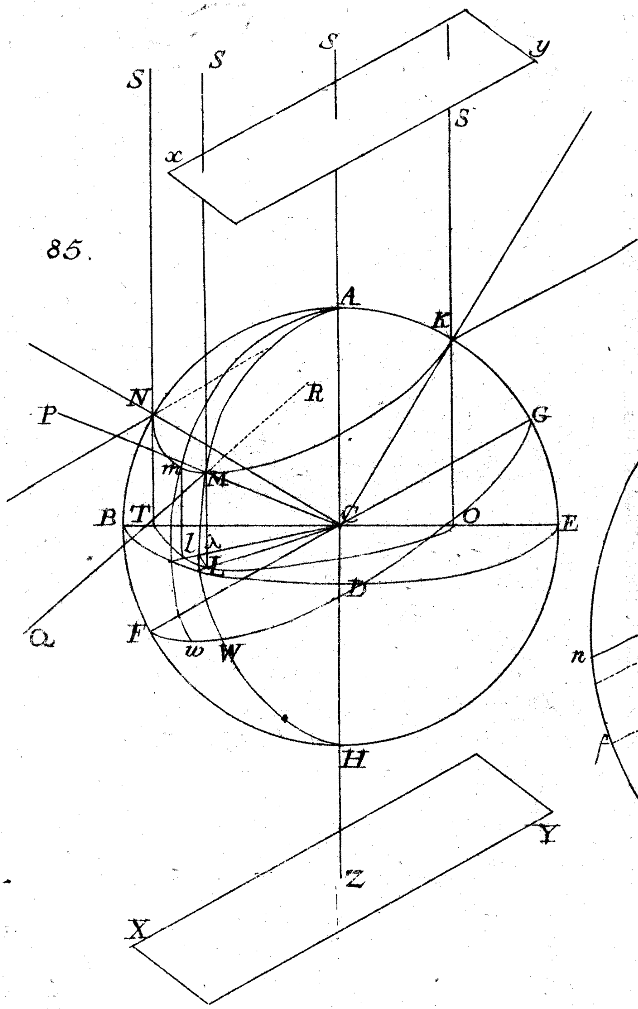



70.
71.
72.
73.

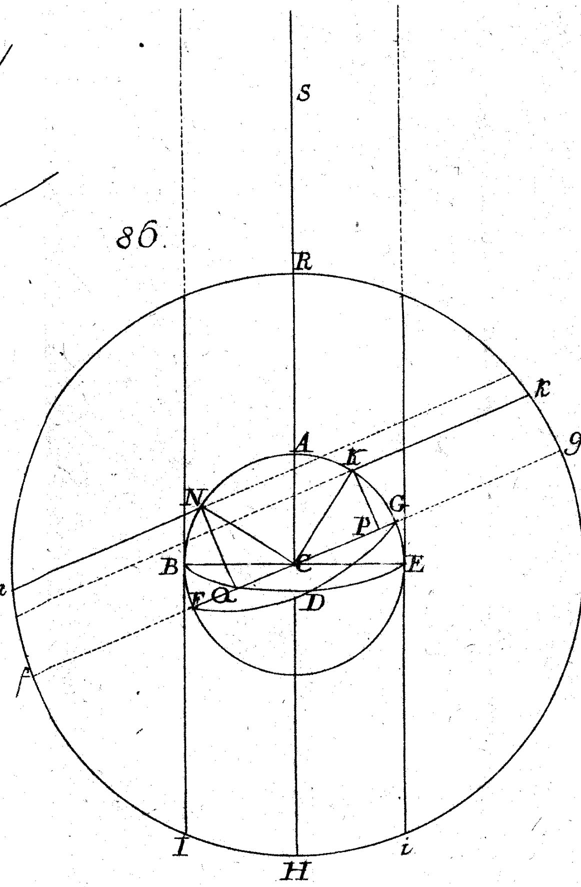

74.
75.
76.
77
78.
79.

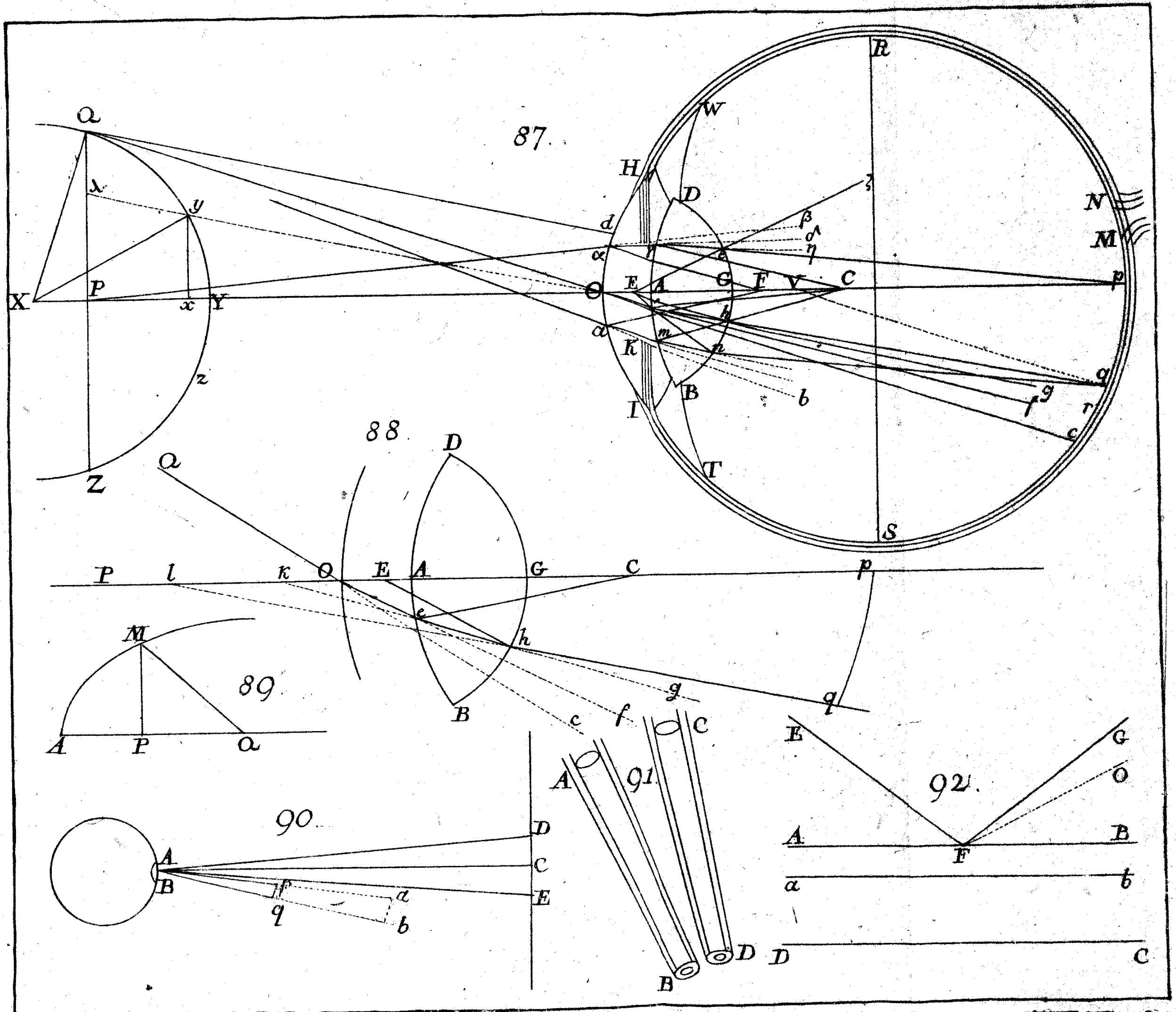

80.
81.
82.
83.
84.

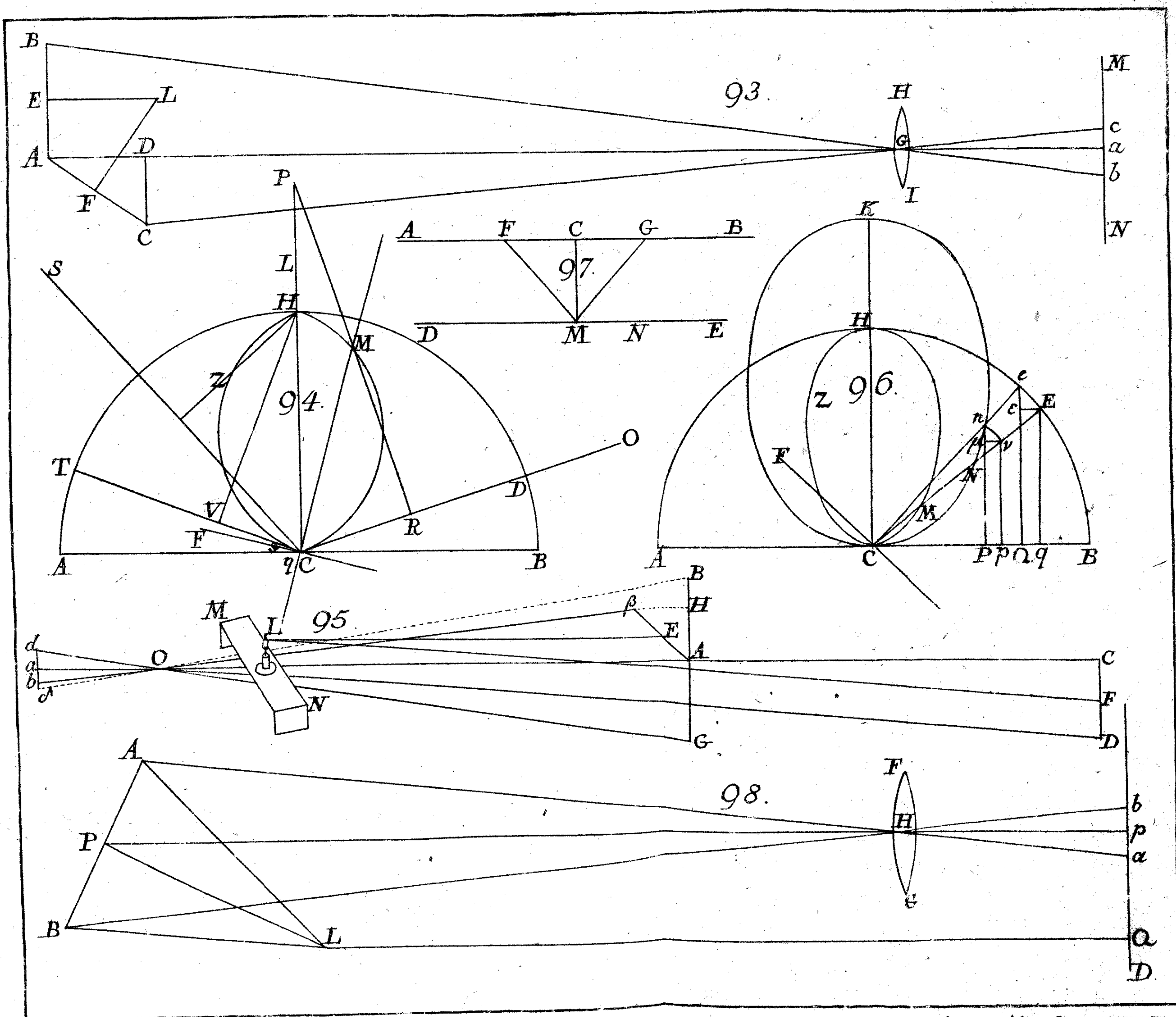
85.

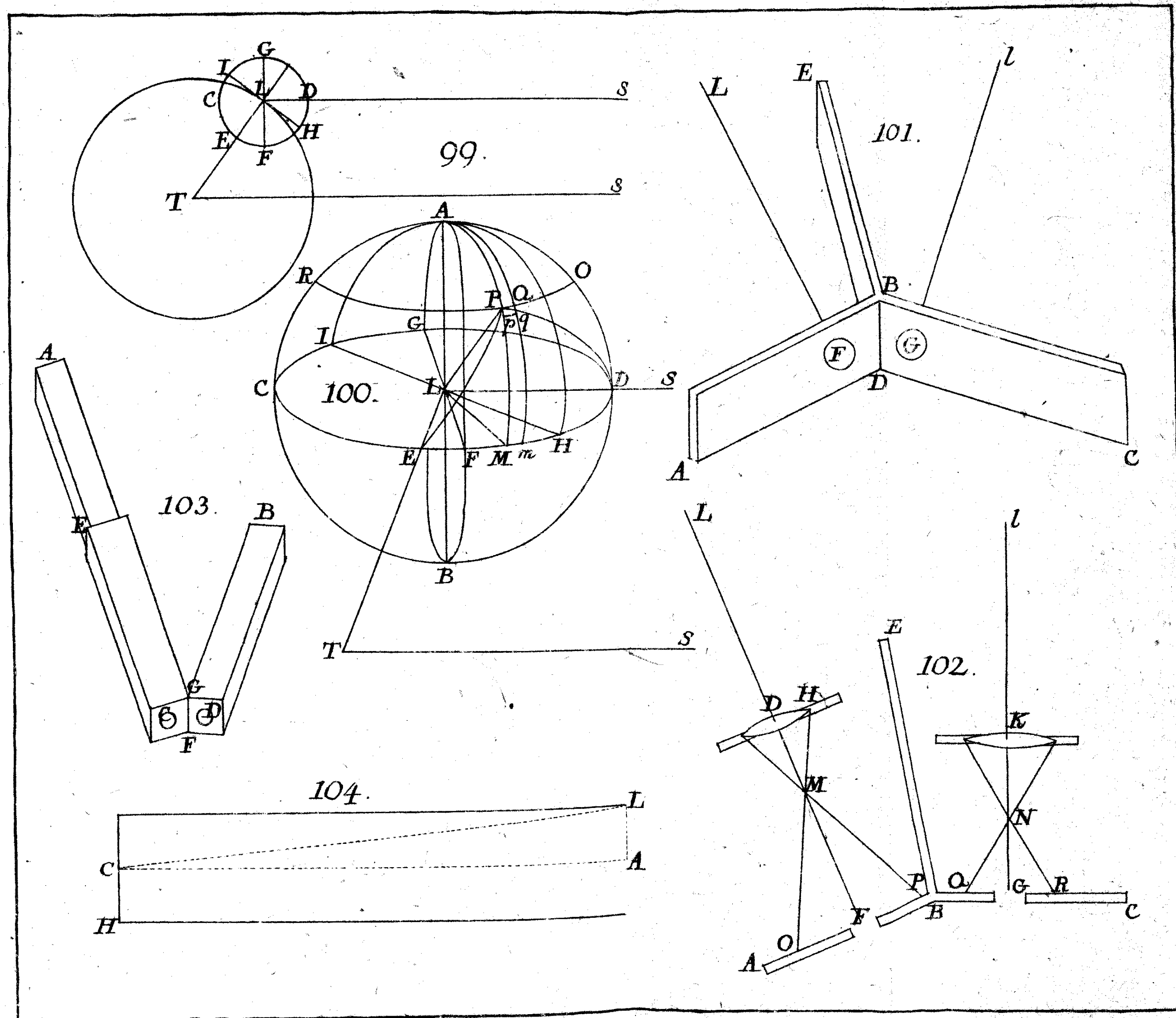

S
S
S
S
x
y
A
K
R
N
P
G
m
M
B
T
C
O
E
l
λ
L
D
Q
F
w
W
H
Y
Z
X

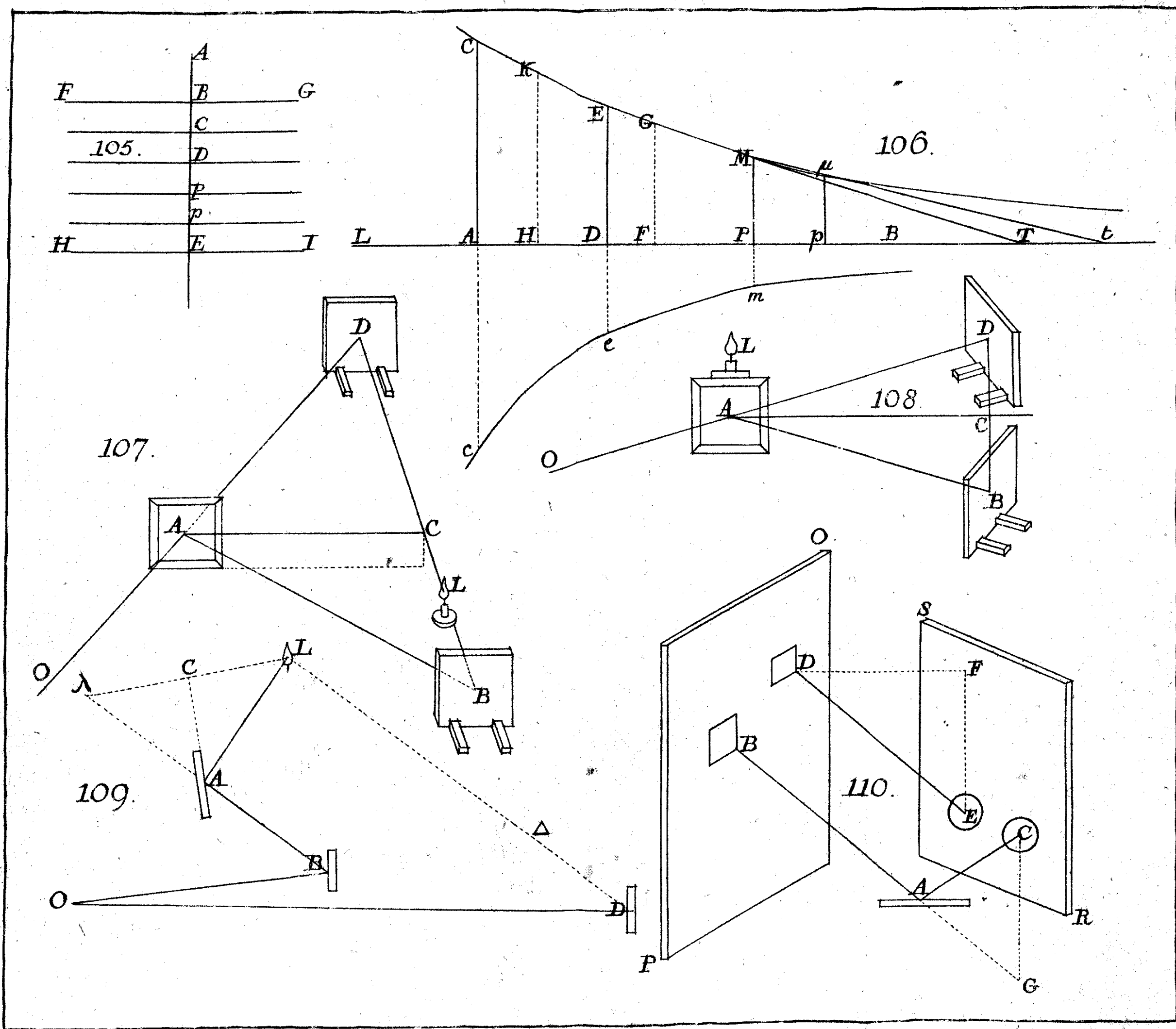
86.

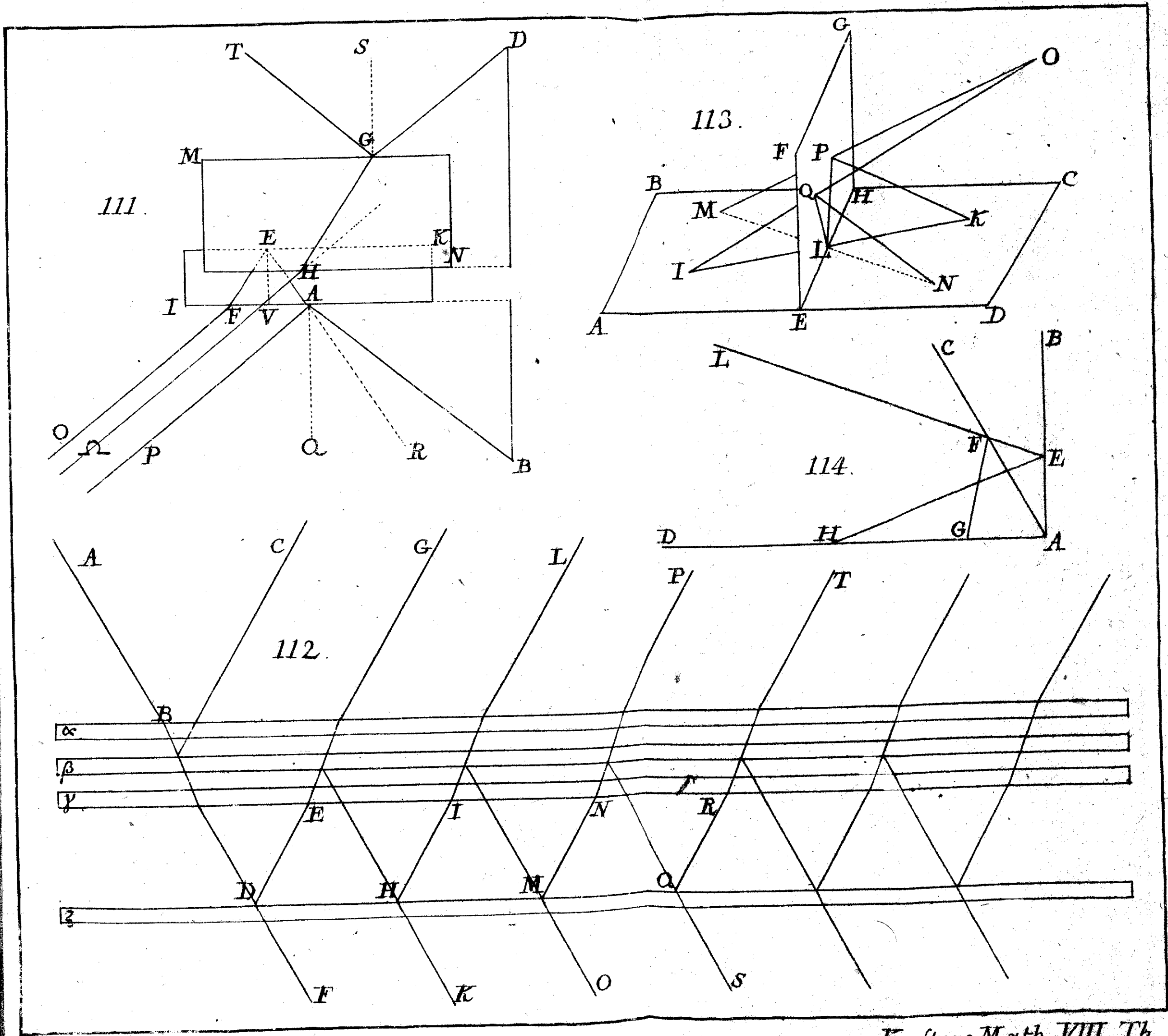

S
R
k
g
A
K
N
G
P
B
C
E
n
F
Q
D
f
I
H
i

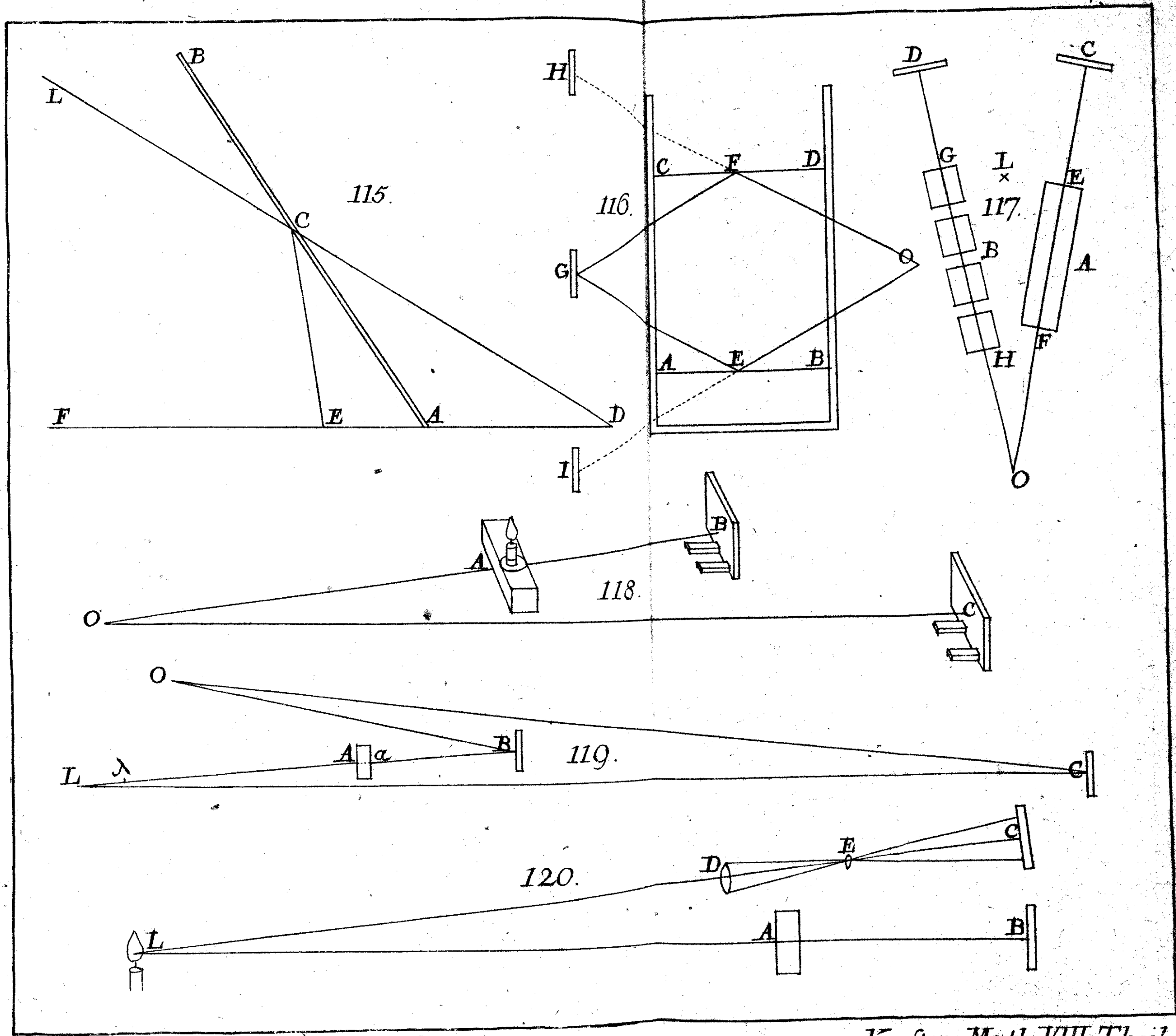

87.
88.
89.
90.
91.
92.


93.
B
E
L
A
D
F
C
H
G
I
M
c
a
b
N
94.
P
L
S
H
M
Z
T
V
F
R
O
D
A
q C
B
97.
A F C G B
D M N E
96.
K
H
Z
e
E
n
ε
μ
ν
F
N
M
A
C
P p Q q
B
95.
B
β
H
M
L
E
A
d
a
b
δ
O
C
N
F
G
D
98.
A
F
H
P
b
p
a
B
L
Q
D

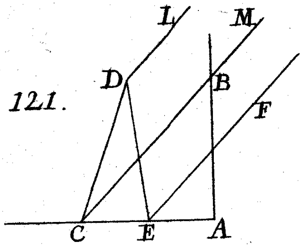

99.
G
L
C
L
D
S
E
H
F
T
S
100.
A
R
O
P
Q
G
p
q
I
C
L
D
S
E
F
M
m
H
B
T
S
101.
E
L
l
B
F
G
D
A
C
102.
L
l
E
D
H
K
M
N
P
Q
G
R
F
B
C
O
A
103.
A
E
B
G
C
D
F
104.
L
C
A
H


105.
106.
107.
108.
109.
110.

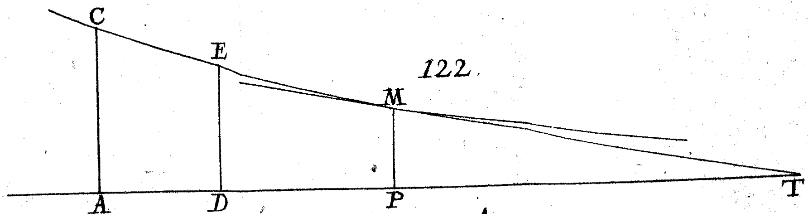

111.
112.
113.
114.


115.
L
B
C
F
E
A
D
116.
H
C
F
D
G
O
A
E
B
I
117.
D
C
G
L
E
B
A
F
H
O
118.
A
B
O
C
119.
O
A
a
B
L
λ
C
120.
D
E
C
L
A
B

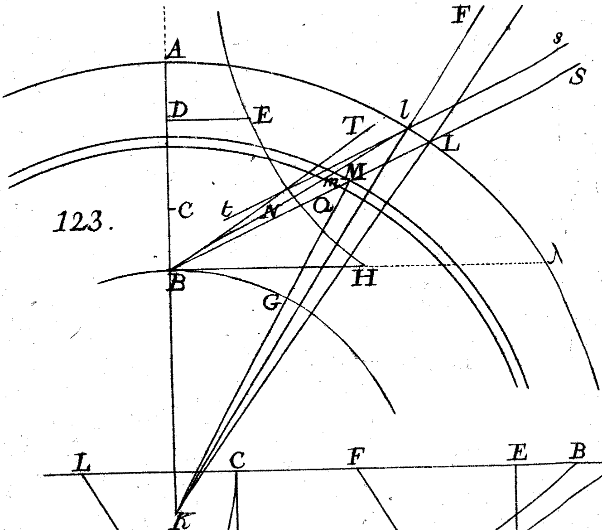
121.



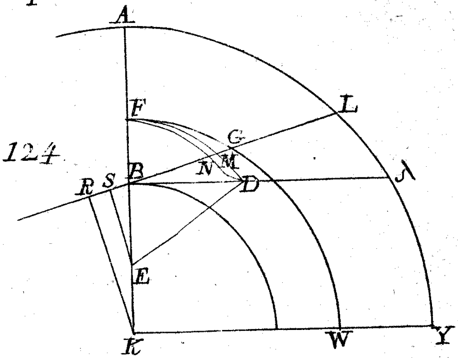
122.



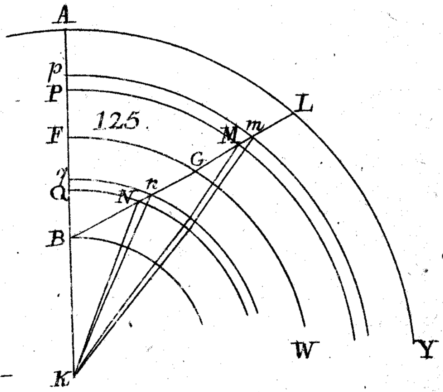
123.



124.



125.



126.